О ЗАМКНУТЫХ ОПЕРАТОРАХ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. Э. Лянце

1. Предварительные замечания. Все операторы, рассматриваемые в этой статье, предполагаются линейными, и, как правило, это особо не оговаривается. Символы $D(T)$, $R(T)$ и $Z(T)$ обозначают соответственно область определения, область значений и многообразие нулей оператора T. Запись $T: X \to Y$ означает, что $D(T) \subset X$ и $R(T) \subset Y$.

Через H мы обозначаем фиксированное комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot\,,\cdot)$ и с нормой $\|\cdot\|$. Если $T: H \to H$, то

$$(f, g)_T \overset{df}{=} (f, g) + (Tf, Tg), \quad f, g \in D(T),$$

$$\|f\|_T \overset{df}{=} \{(f, f)_T\}^{1/2}, \quad f \in D(T). \qquad (1.1)$$

Напомним, что замкнутость оператора T эквивалентна $\|\cdot\|_T$ — полноте линейного пространства $D(T)$.

Если $M \subset H$, то $\overline{M}$ обозначает замыкание в H множества M, а $M^{\perp}$ — ортогональное дополнение в H этого множества. Для обозначения $(\cdot, \cdot)_T$ — ортогональной суммы и разности подпространств пространства $D(T)$ мы применяем символы соответственно $\oplus^T$ и $\ominus^T$. В случае $T = 1$ мы пишем $\oplus$ и $\ominus$ вместо $\oplus^1$ и $\ominus^1$. Для произвольного оператора $T: H \to H$ полагаем

$$m(T) \overset{df}{=} \dim [D(T)^{\perp}] \tag{1.2}$$

и через $\mathscr{E}^{\cdot}(H)$ обозначаем класс тех замкнутых операторов $T: H \to H$, для которых

$$m(T) < \infty. \tag{1.3}$$

Далее принимаем

$$\mathscr{E}(H) \overset{df}{=} \{T \in \mathscr{E}^{\cdot}(H) : m(T) = 0\}, \tag{1.4}$$

так что $\mathscr{E}(H)$ является классом плотно заданных замкнутых операторов $H \to H$. Напомним, что, если $T \in \mathscr{E}(H)$, то существует T^* и $T^* \in \mathscr{E}(H)$. Множество ограниченных операторов из $\mathscr{E}(H)$ ($\mathscr{E}^{\cdot}(H)$) обозначим через $B(H)$ ($B^{\cdot}(H)$). Как известно, если $T \in \mathscr{E}^{\cdot}(H)$, то $T \in B^{\cdot}(H)$ тогда и только тогда, когда $\overline{D(T)} = D(T)$.

1.1. Определение. *Пусть $T_j: H \to H$, $j = 1, 2$, $T_1 \subset T_2$ и $\dim [D(T_2)/D(T_1)] = m$. Тогда оператор T_2 (T_1) называется m-кратным расширением (сужением) оператора T_1 (T_2) и мы пишем $T_1 \subset m \subset T_2$ или $T_2 \supset m \supset T_1$. Если $m < \infty$, то расширение (сужение) называется конечнократным.*

В дальнейшем рассматриваются только конечнократные расширения и сужения.

Отметим, что, если $T \in B(H)$, то все расширения и сужения оператора T, принадлежащие $\mathscr{E}(H)$, совпадают с T. Однако, как будет показано в дальнейшем (см. 2.6 и 3.4), справедливо следующее предложение.

1.2. Предложение. *Если $T \in \mathscr{E}(H)$ и T неограничен, то при любом натуральном m существует m-кратное расширение и m-кратное сужение оператора T, принадлежащее $\mathscr{E}(H)$.*

В этой статье описываются некоторые элементарные структурные свойства, которыми бинарное отношение $\subset m \subset$ наделяет множества $\mathscr{E}(H)$ и $\mathscr{E}^{\cdot}(H)$.

2. Конечнократные расширения. Для описания конечнократных расширений воспользуемся некоторыми простыми вспомогательными предложениями.

2.1. ***Лемма.*** *Пусть D и U — произвольные линейные множества в H и P — ортопроектор H на $\overline{D}$. 1°. Если $\overline{D + U} = H$, то $\overline{(1 - P) U} = D^{\perp}$. 2°. Если $(1 - P) U = D^{\perp}$, то $\overline{D} + U = H$.*

Доказательство. 1°. Пусть $\overline{D \dotplus U} = H$ и $w \in D^{\perp}$. Тогда существуют такие $d_n \in D$ и $u_n \in U$, что $d_n + u_n \to w$. Следовательно, $(1 - P) u_n = (1 - P)(d_n \dotplus u_n) \to (1 - P) w = w$, т. е. $D^{\perp} \subset \overline{(1 - P) U}$; обратное включение очевидно. 2°. Если $(1 - P) U = D^{\perp}$, то для произвольного $f \in H$ существует такое $u \in U$, что $(1 - P) u = (1 - P) f$. Следовательно, $f = P(f - u) + u \in \overline{D} + U$.

2.2. Следствие. *В обозначениях леммы 2.1 имеем*

$$\overline{D \dotplus U} = \overline{D} \oplus \overline{(1 - P) U}. \tag{2.1}$$

В частности, если $\dim D^{\perp} < \infty$ и $\dim U < \infty$, то

$$\dim (D \dotplus U)^{\perp} = \dim D^{\perp} - \dim (1 - P) U \tag{2.2}$$

и

$$\overline{D} \dotplus U = \overline{D + U}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Полагая $\overline{D \dotplus U} = H_1$, в силу 2.1.1° имеем $\overline{(1-P_1)\,U} = H_1 \ominus \overline{D}$, где P_1 — ортопроектор H_1 на $\overline{D}$. Однако, так как $(1-P)\,U = (1-P_1)\,U$, имеет место (2.1). Если $\dim U < \infty$, то и $\dim(1-P_1)\,U < \infty$, а потому $(1-P_1)\,U = \overline{(1-P_1)\,U} = H_1 \ominus \overline{D}$. Следовательно, в силу 2.1.2° имеет место (2.3).

2.3. Следствие. *Если $\dim U < \infty$, то U содержит некоторое прямое дополнение подпространства $\overline{D}$ в H тогда и только тогда, когда*

$$\dim\,(1-P)\,U = \dim D^{\perp}, \tag{2.4}$$

P — ортопроектор $H \to \overline{D}$.

Действительно, в силу (2.3) $\overline{D} \dotplus U = H$ тогда и только тогда, когда $(D + U)^{\perp} = (0)$ и наше утверждение вытекает из (2.2).

2.4. **Теорема** 1°. *Конечнократное расширение замкнутого оператора является замкнутым оператором.* Более подробно: 2°. *Пусть $L_0 \in \mathscr{E}^{\cdot}(H)$ и U — такое подпространство в H, что*

$$U \cap D(L_0) = (0). \tag{2.5}$$

$$\dim U = m < \infty. \tag{2.6}$$

Если линейный оператор $L : H \to H$ удовлетворяет соотношениям

$$L \supset L_0,\; D(L) = D(L_0) \dotplus U, \tag{2.7}$$

то $L \in \mathscr{E}^{\cdot}(H)$, $L \supset m \supset L_0$ и (см. (1.2))

$$m(L) = m(L_0) - \dim\,(1-P)\,U, \tag{2.8}$$

где P — ортопроектор $H \to \overline{D(L_0)}$. В частности, $L \in \mathscr{E}(H)$ (см. (1.4)) *тогда и только тогда, когда U содержит некоторое прямое дополнение подпространства $\overline{D(L_0)}$ в H.*

Доказательство. Если выполняется (2.7), то график $G(L)$ оператора L равен (алгебраической) сумме графиков $G(L_0)$ и $G(L \mid U)$ соответственно оператора L_0 и сужения оператора L на U. Так как L_0 замкнут, то $G(L_0)$ является замкнутым подпространством в $H \oplus H$. Поскольку $\dim G(L \mid U) < \infty$ (см. (2.6)), то $G(L_0) \dotplus G(L \mid U)$ — замкнутое подпространство в $H \oplus H$, а поэтому L — замкнутый оператор $H \to H$. Формула (2.8) вытекает непосредственно из (1.2) и (2.2).

2.5. Следствие. *Область определения неограниченного замкнутого оператора $H \to H$ имеет в H бесконечную коразмерность*[1].

Действительно, предположим, что L_0 — замкнутый оператор $H \to H$ и $\operatorname{codim} D(L_0) < \infty$. Тогда существует в H такое конечномерное подпространство U, удовлетворяющее условию (2.5), что $D(L_0) \dotplus U = H$. В этом случае линейный оператор L, удовлетворяющий соотношениям (2.7), будет задан на всем H, а так как по доказанному он замкнут, то $\|L\| < \infty$. Это невозможно, если L_0 неограничен, ибо $L \supset L_0$.

2.6. *Замечание.* Из теоремы 2.4 и следствия 2.5 вытекает часть предложения 1.2, относящаяся к существованию конечнократных расширений.

3. **Абстрактная формула Грина.** В этом пункте через L_0 и L мы обозначаем такие произвольные операторы из $\mathscr{E}(H)$, что $L_0 \subset L$, и полагаем $M_0 \overset{df}{=} L^*$, $M \overset{df}{=} L_0^*$,

$$U \overset{df}{=} D(L) \ominus^{L} D(L_0),\; V \overset{df}{=} D(M) \ominus^{M} D(M_0). \tag{3.1}$$

Отметим, что $M_0, M \in \mathscr{E}(H)$, $M_0 \subset M$. Отметим также, что в доказательствах этого пункта не используется условие $\dim D(L)/D(L_0) < \infty$.

[1] Отметим, что в H существуют линейные всюду плотные множества положительной конечной коразмерности. Например, многообразие нулей линейного неограниченного функционала, заданного на всем H, имеет коразмерность 1 и всюду плотно в H.

3.1. *Лемма. Имеют место следующие соотношения:*

$$MV = U, \ LU = V, \tag{3.2}$$

$$LMv = -v, \ v \in V, \tag{3.3}$$

$$MLu = -u, \ u \in U. \tag{3.4}$$

Доказательство. Если $v \in V$, то, для произвольного $g \in D(M_0)$, $0 = (g, v)_M = (g, v) \dotplus (M_0 g, \ Mv)$, т. е. для произвольного $g \in D(L^*)$ $(L^* g \ Mv) = (g, -v)$, а потому $Mv \in D(L)$ и выполняется (3.3). Аналогичным способом доказываем, что $Lu \in D(M)$, $u \in U$ и выполняется (3.4). Далее, для произвольных $v \in V$, $f \in D(L_0)$ имеем $(f, Mv)_L = (f, \overset{*}{L_0} v) \dotplus (L_0 f, -v) = 0$, откуда заключаем, что $MV \subset U$. Аналогично доказываем, что $LU \subset V$. Из этих включений и из (3.3) и (3.4) вытекает (3.2).

3.2. Следствие. *Сужение оператора L на U является унитарным отображением пространства U со скалярным произведением $(.\,,.)_L$ на пространство V со скалярным произведением $(.\,,.)_M$; обратным отображением является сужение оператора — M на V.*

Действительно, если $u \in U$ и $v = Lu$, то в силу 3.1

$$(u, u)_L \overset{\text{—}}{=} (u, u) \dotplus (Lu, \ Lu) = (-Mv, \ -Mv) \dotplus (v, v) = (v, v)_M.$$

3.3. Следствие. *Для того чтобы $L_0 \subset m \subset L$, необходимо и достаточно, чтобы $L_0^* \supset m \supset L^*$.*

Действительно, из 3.1 вытекает, что $\dim U = \dim V$.

3.4. *Замечание.* Теперь нетрудно доказать часть предложения 1.2, относящуюся к существованию конечнократных сужений. Действительно, если T — произвольный неограниченный оператор из $\mathscr{E}(H)$, то согласно 2.6 существует такой оператор $T_1 \in \mathscr{E}(H)$, что $T_1 \supset m \supset T^*$. Полагая $T_0 \overset{df}{=} T_1^*$, в силу 3.3 имеем $T_0 \in \mathscr{E}(H)$, $T_0 \subset m \subset T$.

3.5 *Замечание.* Пусть подпространства $U_j \subset U$ и $V_j \subset V$ связаны (эквивалентными друг другу) соотношениями

$$V_j = LU_j, \ U_j = MV_j. \tag{3 5}$$

Тогда, как вытекает из 3.2, равенство

$$U = U_1 \oplus^L \ldots \oplus^L U_\mu \tag{3.6'}$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$V = V_1 \oplus^M \ldots \oplus^M V_\mu. \tag{3.6''}$$

Следующее предложение представляет по существу лишь другую формулировку следствия 3.2.

3.6. **Теорема.** *Пусть выполняются соотношения (3.5) и (3.6). Пусть P_j означает $(.\,,.)_L$-ортогональный проектор $D(L) \to U_j$, а Q_j — $(.\,,.)_M$-ортогональный проектор $D(M) \to V_j$, $j = 1, \ldots, \mu$. Тогда справедлива «абстрактная» формула Грина*[1]

$$(Lf, g) - (f, Mg) = \sum_{j=1}^{\mu} (LP_j f, \ Q_j g)_M =$$

$$= -\sum_{j=1}^{\mu} (P_j f, \ MQ_j g)_L = \sum_{j=1}^{\mu} [(LP_j f, \ Q_j g) -$$

$$-(P_j f, \ MQ_j g)], \ f \in D(L), \ g \in D(M). \tag{3.7}$$

---

* Привычная запись этой формулы приведена в 5.5.

Доказательство. Положим $P_j f = u_j$, $Q_j g = v_j$, $u = u_1 \dotplus \cdots \dotplus u_\mu$, $v = v_1 \dotplus \cdots \dotplus v_\mu$, $f_0 = f - u$, $g_0 = g - v$. Учитывая, что $f_0 \in D(L_0)$, $g_0 \in D(M_0)$, находим

$$(Lf, g) - (f, Mg) = (L_0 f_0, g) - (f_0, Mg) \dotplus (Lu, g) - \\ - (u, Mg) = 0 \dotplus (Lu, g_0) - (u, Mg_0) \dotplus (Lu, v) - (u, Mv) = \\ = 0 \dotplus (Lu, v) - (u, Mv).$$

Таким образом,

$$(Lf, g) - (f, Mg) = (LP_L f, Q_M g) - (P_L f, MQ_M g), \quad f \in D(L), \; g \in D(M) \tag{3.8}$$

где $P_L - (.\,,.)_L$ — ортопроектор $D(L) \to U$;
$Q_M - (.\,,.)_M$ — ортопроектор $D(M) \to L$:

$$P_L = P_1 \dotplus \cdots \dotplus P_\mu, \quad Q_M = Q_1 \dotplus \cdots \dotplus Q_\mu. \tag{3.9}$$

В силу 3.1 правая часть (3.8) равна

$$(Lu, v) - (u, Mv) = (Lu, v)_M = \sum_{i,\, j=1}^{\mu} (Lu_i, v_j)_M.$$

Отсюда, принимая во внимание (3.5) и (3.6), находим

$$(Lu, v) - (u, Mv) = \sum_{j=1}^{\mu} (Lu_j, v_j)_M =$$

$$= \sum_{j=1}^{\mu} [(Lu_j, v_j) - (u_j, Mv_j)] = - \sum_{j=1}^{\mu} (u_j, Mv_j)_L,$$

что и требовалось доказать.

3.7. *Замечание*. Предположим, что подпространство U конечномерно, и пусть $(u_1, \ldots, u_m)$ — произвольный $(\cdot,\cdot)_L$-ортогональный базис этого подпространства. Полагая $v_j = Lu_j$, на основании 3.2 заключаем, что $(u_1, \ldots, v_m)$ есть $(\cdot\,,\cdot)_M$-ортогональный базис подпространства V. Теперь формуле Грина может быть придан вид

$$(Lf, g) - (f, Mg) = \sum_{j=1}^{m} (f, u_j)_L (v_j, g)_M, \quad f \in D(L), \; g \in D(M). \tag{3.10}$$

Действительно, полагая

$$P_j f \overset{df}{=} (f, u_j)_L u_j, \quad f \in D(L),$$

$$Q_j g \overset{df}{=} (g, v_j)_M v_j, \quad g \in D(M), \tag{3.11}$$

находим, что P_j, Q_j являются проекторами, к которым применима теорема 3.6. Для вывода (3.10) из (3.7) достаточно заметить, что $(Lu_j, v_j)_M = 1$, $j = 1, \ldots, m$*.

---

* Формула (3.10) может быть получена как следствие следующего элементарного предложения теории линейных пространств: если пересечение многообразий нулей функционалов $u'_1, \ldots, u'_m$ содержится в многообразии нулей функционала u', то u' есть линейная комбинация $u'_1, \ldots, u'_m$. Применяя это предложение к $u'_g(f) \overset{df}{=} (Lf, g) - (f, Mg)$ и $u'_j(f) \overset{df}{=} (f, u_j)_L$, $j = 1, \ldots, m$, находим, что $(Lf, g) - (f, Mg) = \sum_{j=1}^{m} c_j(g)\,(f, u_j)_L$, откуда легко вывести (3.10).

3.8. *Замечание.* Дополним теорему 2.4, описывающую конечнократные расширения. Пусть $L_0 \in \mathscr{E}(H)$ и U — такое подпространство в H, что выполняется (2.5) и (2.6). Пусть L — линейный оператор $H \to H$, удовлетворяющий соотношениям (2.7). Тогда в силу 2.4 $L \in \mathscr{E}(H)$. Не ограничивая общность, можно считать, что прямая сумма в (2.7) является $(\cdot, \cdot)_L$-ортогональной. В этом случае возникает некоторая дополнительная информация. *Для того чтобы прямая сумма в (2.7) была $(.,.)_L$-ортогональной, необходимо и достаточно, чтобы подпространство U удовлетворяло условию*

$$U \subset R(L_0^*), \tag{3.12}$$

существовало такое подпространство $V \subset D(L_0^*)$, которое отображается оператором L_0^* взаимно однозначно на U, и чтобы[1]

$$Lf = L_0(f - P_L f) - (L_0^* \mid V)^{-1} P_L f, \; f \in D(L), \tag{3.13}$$

где P_L — проектор $D(L) \to U$ параллельно $D(L_0)$.

Необходимость этих условий вытекает из 3.1, а достаточность проверяется непосредственно. Оператор P_L в (3.13) является $(.,.)_L$-ортопроектором.

4. Конечнократные сужения[2]. Конечнократные сужения в противоположность конечнократным расширениям замкнутого оператора необязательно замкнуты (см. сноску на стр. 167). Здесь излагается элементарный результат о построении замкнутых сужений и, в частности, необходимое и достаточное условие для того, чтобы замкнутое сужение было плотно заданным.

4.1. Теорема. 1°. *Пусть $L \in \mathscr{E}(H)$ и U — такое подпространство в H, что*

$$U \subset D(L), \tag{4.1}$$

$$\dim U = m < \infty. \tag{4.2}$$

Положим

$$U_* \overset{df}{=} \{u \in U : Lu \in D(L^*)\}. \tag{4.3}$$

Если

$$L_0 \subset L, \; D(L_0) = D(L) \ominus^L U, \tag{4.4}$$

то $L_0 \in \mathscr{E}^{\cdot}(H)$, $L_0 \subset m \subset L$, и (см. (1.2))

$$m(L_0) = \dim U_*. \tag{4.5}$$

В частности, если

$$\{u \in U : Lu \in D(L^*)\} = (0), \tag{4.6}$$

то $\overline{D(L_0)} = H$, так что $L_0 \in \mathscr{E}(H)$.

2° *Пусть $L_0 \in \mathscr{E}^{\cdot}(H)$, $L \in \mathscr{E}(H)$* и $\dim[D(L)/D(L_0)] < \infty$. *Положим*

$$U_* \overset{df}{=} \{u \in D(L) \ominus^L D(L_0) : Lu \in D(L^*)\}. \tag{4.3'}$$

Тогда $\overline{D(L_0)} \cap U_* = (0)$,

$$\overline{D(L_0)} \dotplus U_* = H, \tag{4.7}$$

так что выполняется (4.5).

Доказательство. Если выполняется (4.4), то $D(L_0)$ (как $(.,.)_L$-ортогональное дополнение) является $\|\cdot\|_L$-замкнутым, а поэтому L_0 есть замкнутый оператор. Предположим сначала, что выполняется (4.6), т. е. формула (4.3) определяет тривиальное подпространство $U_* = (0)$. Для того чтобы в этом частном случае доказать утверждение 1°, достаточно проверить, что

---

[1] Символ $T \mid M$ обозначает сужение оператора T на подпространство $M \subset D(T)$.

[2] Вопросы, близкие к рассматриваемым в этом пункте, изучались в [1].

$\overline{D(L_0)} = H$. С этой целью рассмотрим произвольный $(.,.)_L$-ортогональный базис $(u_1, \ldots, u_m)$ подпространства U (удовлетворяющего соотношениям (4.1), (4.2)). В силу (4.4) имеем $f - \sum_{j=1}^m (f, u_j)_L u_j \in D(L_0)$ для каждого $f \in D(L)$. Поэтому если $h \in D(L_0)^\perp$, то

$$(f, h - \sum_{j=1}^{m} (h, u_j) u_j) = (Lf, L\sum_{j=1}^{m} (h, u_j) u_j), \; f \in D(L). \tag{4.8}$$

Следовательно, $L\sum_{j=1}^m (h, u_j) u_j \in D(L^*)$ и в силу (4.6) $(h, u_1) = \ldots = (h, u_m) = 0$. Отсюда на основании (4.8) заключаем, что $(f, h) = 0$ для всех $f \in D(L)$, а так как $\overline{D(L)} = H$, то $h = 0$ и $\overline{D(L_0)} = H$.

Теперь докажем утверждение 2°. Из (4.3') вытекает, что $(1 \dotplus L^*L) U_* \subset (L_0)^\perp$. Так как $Z(1 \dotplus L^*L) = (0)$, то отсюда заключаем, что $\dim U_* \leqslant m(L_0) < \infty$. Введем обозначение

$$U_1 \overset{df}{=} [D(L) \ominus^L D(L_0)] \ominus^L U_*. \tag{4.9}$$

Из (4.3') и (4.9) вытекает, что $\{u \in U_1 : Lu \in D(L^*)\} = (0)$. Следовательно, учитывая, что $\dim U_1 \leqslant \dim D(L)/D(L_0) < \infty$, на основании доказанного уже частного случая утверждения 1°, заключаем, что множество $D(L) \ominus^L U_1$ плотно в H. Но из (4.9) вытекает, что это множество равно $D(L_0) \dotplus U_*$, поэтому $\overline{D(L_0) \dotplus U_*} = H$. Поскольку $\dim U_* < \infty$, на основании (2.3) заключаем, что имеет место (4.7). Сумма в (4.7) прямая, ибо, как мы видели, $\dim U_* \leqslant m(L_0) = \dim D(L_0)^\perp$. Следовательно, имеет также место (4.5).

Докажем теперь утверждение 1° в общем случае. По предположению $\overline{D(L_0) \dotplus U} = \overline{D(L)} = H$ и $\dim U < \infty$. Поэтому, вторично применяя (2.3), находим, что $\overline{D(L_0)} \dotplus U = H$, а поэтому $m(L_0) \leqslant \dim U < \infty$ и $L_0 \in \mathscr{E}^\cdot(H)$. Следовательно, к операторам L_0 и L применимо утверждение 2°. В силу (4.4) определение подпространства U_* формулой (4.3) эквивалентно его определению формулой (4.3'). Поэтому в силу утверждения 2° имеет место (4.5).

4.2. *Замечание*. С помощью 4.1 легко получить также описание замкнутых конечнократных сужений в случае $L \in \mathscr{E}^\cdot(H)$. Для этого достаточно продолжить L на $D(L)^\perp$, например, нулем, а затем применить 4.1.

4.3. *Замечание*. Пусть $L_0 \in \mathscr{E}^\cdot(H)$, $L \in \mathscr{E}(H)$, $L_0 \subset L$ и $\dim[D(L)/D(L_0)] < \infty$. Тогда существует единственный такой оператор $L_1 \in \mathscr{E}^\cdot(H)$, что $L_0 \subset L_1 \subset L$ и

$$\dim[D(L)/D(L_1)] = m(L_1) = m(L_0). \tag{4.10}$$

Оператор L_1 определяется условием

$$D(L_1) = D(L) \ominus^L U_*, \tag{4.11}$$

где U_* задается формулой (4.3'). Мы имеем

$$\overline{D(L_1)} = \overline{D(L_0)}. \tag{4.12}$$

Доказательство. Из 4.1.1° вытекает, что, если $L_1 \subset L$ и выполняется (4.3'), то $L_1 \in \mathscr{E}^\cdot(H)$ и $m(L_1) = \dim U_* = m(L_0)$. Кроме того, из (4.11) вытекает, что $D(L_1) \supset D(L_0)$, а поэтому оператор L_1 обладает требуемыми свойствами. Так как $\overline{D(L_0)} \subset \overline{D(L_1)}$ и в силу (4.10) $\dim D(L_1)^\perp = \dim D(L_0)^\perp$, то имеет место (4.12).

Обратно, пусть L_1 — оператор с требуемыми свойствами. Тогда в силу 4.1.2°, $m(L_1) = \dim\{u \in D(L) \ominus^L D(L_1) : Lu \in D(L^*)\}$, а в силу (4.10) $m(L_1) = \dim[D(L) \ominus^L \ominus^L D(L_1)]$. Отсюда заключаем, что $Lu \in D(L^*)$ для всех $u \in$

$\in D(L) \ominus^L D(L_1)$, т. е. $D(L) \ominus^L D(L_1) \subset U_*$ (см. (4.3')). Но в силу (4.5) и (4.10) имеет место также равенство $m(L_1) = \dim U_*$, а поэтому $\dim [D(L) \ominus^L D(L_1)] = \dim U_*$. Следовательно, $D(L) \ominus^L D(L_1) = U_*$ и выполняется (4.11).

5. **L-краевые формы.** Дадим описание замкнутых плотно заданных сужений в терминах «краевых условий».

5.1. Определение. *Пусть L — произвольный оператор из $\mathscr{E}(H)$. L-краевой формой мы называем такой линейный функционал u', заданный на $D(L)$, что*

$$\sup_{0 \neq f \in D(L)} |u'(f)|/\|f\|_L < \infty, \tag{5.1}$$

$$\sup_{0 \neq f \in D(L)} |u'(f)|/\|f\| = \infty. \tag{5.2}$$

Линейное пространство, образованное L-краевыми формами и нулевым функционалом обозначаем через $\mathrm{T}(L)$.

5.2. *Замечание.* Из теоремы Рисса вытекает, что для каждого линейного функционала u', заданного на $D(L)$ и удовлетворяющего условию (5.1), существует единственный такой элемент $u \in D(L)$, что

$$u'(f) = (f, u)_L, \; f \in D(L). \tag{5.3}$$

Про такой элемент u будем говорить, что он *представляет* функционал u'. Легко видеть, что, если $u \in D(L)$ и представляет u', то

$$u' \in \mathrm{T}(L) \text{ эквивалентно } Lu \,\overline{\in}\, D(L^*), \tag{5.4}$$

поскольку $Lu \,\overline{\in}\, D(L^*)$ эквивалентно (5.2).

5.3. **Теорема.** *Пусть $L \in \mathscr{E}(H)$ и U' — подпространство в $\mathrm{T}(L)$ конечной размерности m. Если*

$$L_0 \subset L, \; D(L_0) = \{g \in D(L) : u'(g) = 0, \; u' \in U'\}, \tag{5.5}$$

то $L_0 \in \mathscr{E}(H)$ и $L_0 \subset m \subset L$.

Обратно, если L_0, $L \in \mathscr{E}(H)$ *и* $L_0 \subset m \subset L$, *то множество*

$$U' \overset{df}{=} \{u' \in \mathrm{T}(L) : u'(g) = 0, \; g \in D(L_0)\} \tag{5.6}$$

является линейным пространством размерности m и выполняется (5.5).

Доказательство. Если U' — некоторое множество функционалов, удовлетворяющих условию (5.1), а U — множество элементов $u \in D(L)$, представляющих функционалы $u' \in U'$, то в силу (5.4) включение $U' \subset \mathrm{T}(L)$ эквивалентно тому, что $\{u \in U : Lu \in D(L^*)\} = (0)$. Следовательно, так как (4.4) эквивалентно (5.5), то из $U' \subset \mathrm{T}(L)$ на основании (4.5) заключаем, что $m(L_0) = 0$, а поэтому $L_0 \in \mathscr{E}(H)$.

Обратное утверждение теоремы очевидно, ибо (5.6) эквивалентно соотношению $U = D(L) \ominus^L D(L_0)$.

5.4. *Замечание.* Поскольку неограниченность u' относительно нормы $\|\cdot\|$ пространства H эквивалентна тому, что $Lu \,\overline{\in}\, D(L^*)$ (см. (5.4)), то соотношение (4.5) можно вывести также из следующего известного предложения [2]. Пусть u' — линейный функционал, заданный на линейном топологическом пространстве D. Если u' непрерывен, то многообразие нулей $Z(u')$ этого функционала *замкнуто* в D, в противном случае $Z(u')$ *всюду плотно* в D.

5.5. *Замечание.* Запишем формулу Грина (см. п. 3) с помощью L-краевых форм. Пусть L_0, $L \in \mathscr{E}(H)$, $L_0 \subset m \subset L$, $M = L_0^*$, $M_0 = L^*$, $U = D(L) \ominus^L D(L_0)$, $V = D(M) \oplus^M D(M_0)$. Через $\mathrm{T}(L, L_0)$ обозначим множество тех функционалов из $\mathrm{T}(L)$, которые равны нулю на $D(L_0)$. В силу теоремы 5.3 $\mathrm{T}(L, L_0)$ является линейным пространством размерности m. Пусть $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ — некоторый базис этого пространства. Вектор $\gamma f \overset{df}{=} (\gamma_1(f), \ldots, \gamma_m(f)) \in \mathbf{C}^m$ (через $\mathbf{C}^m$ обозначаем комплексное m-мерное арифметическое пространство) называем *гранич-*

ным значением элемента $f \in D(L)$, отвечающим базису γ. Аналогичным способом определяем граничное значение δg элемента $g \in D(M)$, отвечающее базису δ пространства $\mathrm{T}(M, M_0)$.

Для произвольной пары базисов γ и δ пространств соответственно $\mathrm{T}(L, L_0)$ и $\mathrm{T}(M, M_0)$ существует такой линейный обратимый оператор $B: \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^m$, что[1]

$$(Lf, g) - (f, Mg) = (B\gamma f, \delta g)_{\mathbf{C}^m}, \tag{5.7}$$

$$f \in D(L), \ g \in D(M).$$

Доказательство вытекает непосредственно из (3.10). Действительно, эту формулу можно переписать в виде

$$(Lf, g) - (f, Mg) = \sum_{j=1}^{m} u_j'(f)\,\overline{v_j'(g)}, \tag{5.8}$$

$$f \in D(L), \ g \in (M),$$

где u_j' (v_j') — функционал, представляемый элементом u_j (v_j) (см. (3.10)). Таким образом, при $\gamma = (u_1', \ldots, u_m')$, $\delta = (v_1', \ldots, v_m')$ наше утверждение верно (в этом случае оператор B в (5.7) равен единице). Так как переход к новому базису осуществляется с помощью неособенной матрицы, то наше утверждение верно также в общем случае.

Отметим, что для каждого базиса $(u_1', \ldots, u_m')$ пространства $\mathrm{T}(L, L_0)$ существует такой базис $(v_1', \ldots, v_m')$ пространства $\mathrm{T}(M, M_0)$, что выполняется (5.8). Базисы $(u_1', \ldots, u_m')$ и $(u_1', \ldots, u_m')$, для которых формула Грина записывается в виде (5.8) (т. е. $B = 1$), называем *сопряженными*.

6. Ограниченные пары операторов. Введем некоторые определения.

6.1. Определение. *Пара операторов T_1, T_2 из $\mathscr{E}^{\cdot}(H)$ называется ограниченной снизу (сильно ограниченной снизу), если операторы T_1 и T_2 имеют общее конечнократное сужение, принадлежащее $\mathscr{E}^{\cdot}(H)$ (принадлежащее $\mathscr{E}(H)$; разумеется, последнее возможно лишь в том случае, когда $T_1, T_2 \in \mathscr{E}(H)$). Пара T_1, T_2 из $\mathscr{E}^{\cdot}(H)$ называется ограниченной сверху, если операторы T_1 и T_2 имеют общее конечнократное расширение.* В силу 2.4 это расширение автоматически принадлежит $\mathscr{E}^{\cdot}(H)$ и существует общее конечнократное расширение, принадлежащее $\mathscr{E}(H)$. Отношение ограниченности снизу, сильной ограниченности снизу и ограниченности сверху обозначаем символами соответственно $\dot{\vee}$, $\vee$ и $\wedge$.

6.2. **Предложение.** 1° *Отношения $\dot{\vee}$, $\vee$ и $\wedge$ рефлексивны и симметричны.*

2°. *Если $T_1, T_2 \in \mathscr{E}^{\cdot}(H)$ и $T_1 \wedge T_2$, то $T_1 \dot{\vee} T_2$.*

Доказательство. Утверждение 1° вытекает непосредственно из определения. Для доказательства 2° обозначим через B общее конечнократное расширение операторов T_1 и T_2 и положим $U_j \overset{df}{=} D(B) \ominus^B D(T_j)$, $j = 1, 2$, $U \overset{df}{=} U_1 \dotplus U_2$. Определим оператор A соотношениями $D(A) = D(B) \ominus^B U$, $A \subset B$. Очевидно, $A \in \mathscr{E}^{\cdot}(H)$ и A есть общее конечнократное сужение операторов T_1 и T_2.

6.3. Определение. *Пусть $T_1, T_2 \in \mathscr{E}^{\cdot}(H)$ и $T_1 \dot{\vee} T_2$. Обозначим через A_0 сужение операторов T_1 и T_2 на многообразие нулей $Z(T_1 - T_2)$ оператора $T_1 - T_2$ $(D(T_1 - T_2) \overset{df}{=} D(T_1) \cap D(T_2))$. Нетрудно видеть, что $A_0 \in \mathscr{E}^{\cdot}(H)$*[2] и A_0 *обладает следующим свойством: если $A \subset T_j$, $j = 1, 2$, то $A \subset A_0$.*

---

[1] $(x, y)_{\mathbf{C}^m} \overset{df}{=} x_1\bar{y}_1 + \cdots + x_m\bar{y}_m$.

[2] Действительно, пусть L_0, $L \in \mathscr{E}^{\cdot}(H)$ и $L_0 \subset m \subset L$. Пусть D — произвольное линейное множество, такое что $D(L_0) \subset D \subset D(L)$. Тогда D является $\|\cdot\|_L$-замкнутым, как прямая сумма $\|\cdot\|_L$-замкнутого множества $D(L_0)$ и некоторого конечномерного подпространства. Поэтому *сужение L на D есть замкнутый оператор.*

Оператор A_0 называется точной нижней гранью пары T_1, T_2 и обозначается символом $\inf(T_1, T_2)$.

6.4. Определение. Пусть $T_1, T_2 \in \mathscr{E}^{\cdot}(H)$ и $T_1 \wedge T_2$. Определим оператор B_0 соотношениями $D(B_0) \overset{df}{=} D(T_1) \dotplus D(T_2)$, $B_0(f_1 \dotplus f_2) = T_1 f_1 \dotplus T_2 f_2$ при $f_j \in D(T_j)$, $j = 1, 2$. Легко видеть, что это определение корректно и B_0 обладает следующим свойством: если $B \supset T_j$, $j = 1, 2$, то $B \supset B_0$. *Оператор B_0 называется точной верхней гранью пары T_1, T_2 и обозначается символом* $\sup(T_1, T_2)$.

6.5. **Предложение.** 1°. *Если $T_1, T_2 \in \mathscr{E}(H)$, то $T_1 \vee T_2$ тогда и только тогда, когда $T_1^* \wedge T_2^*$. 2°. Если $T_1, T_2 \in \mathscr{E}(H)$ и $T_1 \vee T_2$, то* $[\inf(T_1, T_2)]^* = \sup(T_1^*, T_2^*)$

Доказательство вытекает непосредственно из 3.3, 6.3 и 6.4.

Далее нам понадобится следующее очевидное замечание.

6.6. *Замечание.* Если $S_1, S_2, S_3 \in \mathscr{E}^{\cdot}(H)$, $S_1 \subset p \subset S_2$ и $S_2 \subset q \subset S_3$, то $S_1 \subset p \dotplus q \subset S_3$.

6.7. Определение. *Пусть $T_1, T_2 \in \mathscr{E}^{\cdot}(H)$ и $T_1 \dot{\vee} T_2$ $(T_1 \wedge T_2)$. Пусть $A(B)$ — общее конечнократное сужение (расширение) операторов T_1, T_2, принадлежащее $\mathscr{E}^{\cdot}(H)$. Нетрудно видеть, что число*

$$\varkappa(T_1, T_2) \overset{df}{=} \dim \frac{D(T_1)}{D(A)} - \dim \frac{D(T_2)}{D(A)}$$
$$\left(\varkappa_*(T_1, T_2) \overset{df}{=} \dim \frac{D(B)}{D(T_1)} - \dim \frac{D(B)}{D(T_2)}\right) \tag{6.1}$$

не зависит от $A(B)$. Кроме того, если $T_1 \wedge T_2$, то (см. 6.2.2°) $\varkappa_*(T_1, T_2) = -\varkappa(T_1, T_2)$. *Число $\varkappa(T_1, T_2)$ называется относительным индексом (упорядоченной) пары T_1, T_2.*

Независимость правой части (6.1) от A доказывает следующее: пусть $A_0 = \inf(T_1, T_2)$, $A_0 \subset \overset{\circ}{p}_j \subset T_j$, $A \subset p_j \subset T$, $j = 1, 2$, $A \subset p \subset A_0$. В силу замечания 6.6 $p_j = p_0 \dotplus \overset{\circ}{p}_j$, откуда $p_1 - p_2 = \overset{\circ}{p}_1 - \overset{\circ}{p}_2$. Аналогично проверяется справедливость остальных сформулированных выше утверждений.

6.8. **Теорема.** *Отношение ограниченности снизу $\dot{\vee}$ транзитивно и, если $T_1, T_2, T_3 \in \mathscr{E}^{\cdot}(H)$, $T_1 \dot{\vee} T_2$, $T_2 \dot{\vee} T_3$,* то

$$\varkappa(T_1, T_2) \dotplus \varkappa(T_2, T_3) \dotplus \varkappa(T_3, T_1) = 0. \tag{6.2}$$

Доказательство. Пусть выполняются условия теоремы. Положим $A = \inf(T_1, T_2)$, $B = \inf(T_2, T_3)$, и пусть $A \subset p_j \subset T_j$, $j = 1, 2$, $B \subset q_j \subset T_j$, $j = 2, 3$. Кроме того, положим $U_A \overset{df}{=} D(T_2) \ominus^{T_2} D(A)$, $U_B \overset{df}{=} D(T_2) \ominus^{T_2} D(B)$, $U_C \overset{df}{=} U_A \dotplus U_B$. Определим оператор C соотношениями $C \subset T_2$, $D(C) = D(T_2) \ominus^{T_2} U_C$. Полагая $m \overset{df}{=} \dim U_C$, имеем $m \leqslant \dim U_A \dotplus \dim U_B = p_2 \dotplus q_2 < \infty$, а поэтому в силу 4.1.1° $C \in \mathscr{E}^{\cdot}(H)$ и $C \subset m \subset T_2$. Далее, $D(C) \subset D(A) \cap D(B)$. Применяя замечание 6.6, находим $C \subset m - p_2 \subset A$, $C \subset m - q_2 \subset B$, а поэтому $C \subset (m - p_2) \dotplus p_1 \subset T_1$ и $C \subset (m - q_2) \dotplus q_3 \subset T_3$. Следовательно, $T \dot{\vee} T_3$ и $\varkappa(T_1, T_3) = [(m - p_2) \dotplus p_1] - [(m - q_2) \dotplus q_3] = (p_1 - p_2) \dotplus (q_2 - q_3) = \varkappa(T_1, T_2) + \varkappa(T_2, T_3)$.

В дальнейшем нам понадобятся признаки ограниченности сверху пар, ограниченных снизу.

6.9. ***Лемма.*** *Если $T_1, T_2 \in \mathscr{E}^{\cdot}(H)$ и $T_1 \dot{\vee} T_2$, то $T_1 \wedge T_2$ тогда и только тогда, когда*[1]

$$D(T_1) \cap D(T_2) \subset Z^{\cdot}(T_1 - T_2). \tag{6.3}$$

Доказательство. Необходимость условия (6.3) очевидна. Для доказательства достаточности предположим, что (6.3) выполняется и положим $A_0 = \inf(T_1, T_2)$. Тогда в силу определения 6.3

$$D(T_1) \cap D(T_2) = D(A_0). \tag{6.3'}$$

Положим $U_j \overset{df}{=} D(T_j) \ominus^{T_j} D(A_0)$, $j = 1, 2$. Легко видеть, что

$$D(T_j) \cap U_k = (0), \; k \neq j. \tag{6.4}$$

Действительно, пусть, например, $u_1 \in U_1 \cap D(T_2)$. Тогда $u_1 \in D(T_1) \cap D(T_2)$ и в силу (6.3') $u_1 \in D(A_0)$. Но так как $U_1 \cap D(A_0) = (0)$, то $u_1 = 0$. Из (6.4) вытекает, что

$$D(T_1) + D(T_2) = D(A_0) + U_1 + U_2,$$

где $\dotplus$ — символ прямой суммы. Определим оператор B_0 следующим образом: $D(B_0) = D(T_1) \dotplus D(T_2)$, $\quad B_0(f \dotplus u_1 \dotplus u_2) = A_0 f \dotplus T_1 u_1 \dotplus T_2 u_2$, $\quad f \in D(A_0)$, $u_j \in U_j$, $j = 1, 2$. Легко видеть, что B_0 является оператором, существование которого достаточно, для того чтобы $T_1 \wedge T_2$ (см. 6.1).

6.10. ***Лемма.*** *Пусть $A, T \in \mathscr{E}^{\cdot}(H)$ и $A \subset m \subset T$ для некоторого целого $m \geqslant 0$. Пусть U_1 — такое подпространство в H, что $U_1 \cap D(T) = (0)$ и $\dim U_1 < \infty$. Если линейный оператор T_1 удовлетворяет соотношениям $T_1 \supset A$ $D(T_1) = D(A) \dotplus U_1$, то $T_1 \wedge T$, причем $\varkappa_*(T, T_1) = \dim U_1 - m$.*

Доказательство. Очевидно $T_1 \dot{\vee} T$. Пусть $f \in D(T) \cap D(T_1)$, тогда $f = f_0 \dotplus u$, где $f_0 \in D(A)$, а $u \in U_1$. Мы имеем $u = f - f_0 \in D(T) + D(A) = D(T)$ и в силу условия $U_1 \cap D(T) = (0)$ $u = 0$. Таким образом, $f = f_0 \in D(A)$, а это означает, что $D(T) \cap D(T_1) \subset Z(T - T_1)$. Отсюда на основании 6.9 заключаем, что $T_1 \wedge T$. Наконец, $\varkappa_*(T, T_1) = -\varkappa(T, T_1) = -(m - \dim U_1)$.

7. **Родственные операторы.** Разобьем множество $\mathscr{E}(H)$ на попарно непересекающиеся классы «родственных» операторов.

7.1. Определение. *Операторы S и T, принадлежащие $\mathscr{E}(H)$ называются родственными* (*-родственными), *если существует такая конечная цепочка $\{T_k\}_{k=0}^{n+1} \subset \mathscr{E}(H)$, что $T_0 = S$, $T_{n+1} = T$ и $T_k \vee T_{k+1} (T_k \wedge T_{k+1})$ при $k = 0, \ldots, n$.* Отношение родственности (*-родственности) обозначаем символом $\sim$ $(\overset{*}{\sim})$.

Наша основная цель — доказательство эквивалентности отношения $\sim$ отношению $\overset{*}{\sim}$ и отношению $\dot{\vee}$.

7.2. ***Лемма.*** *Если $S, T \in \mathscr{E}(H)$ и $S \dot{\vee} T$, то существуют такие S', $T' \in \mathscr{E}(H)$, что $S' \vee S$, $T' \vee T$ и $D(S') = D(T')$.*

Доказательство. Пусть S, $T \in \mathscr{E}(H)$, $S \dot{\vee} T$ и $D \overset{df}{=} D(S) \cap D(T)$. Множество D $\|\cdot\|_S$-замкнуто в $D(S)$ и $\|\cdot\|_T$-замкнуто в $D(T)$ (см. сноску на стр. 173). Положим $U_S \overset{df}{=} D(S) \ominus^S D$, $U_T \overset{df}{=} D(T) \ominus^T D$. Легко видеть, что $D(S) \cap U_T = D(T) \cap U_S = (0)$ и, следовательно, $D(S) \dotplus D(T) = D(S) \dotplus U_T = D(T) \dotplus U_S$, где $\dotplus$ — символ прямой суммы. Обладающие нужными нам свойствами операторы S' и T' определим соотношениями: $D(S') = D(T') = D(S) + D(T)$, $S'(f \dotplus u) = Sf \dotplus Tu$ при $f \in D(S)$, $u \in U_T$, $T'(f \dotplus u) = Tf \dotplus Su$, $f \in D(T)$, $u \in U_S$.

---

[1] Очевидно, включение (6.3) эквивалентно равенству $D(T_1) \cap D(T_2) = Z(T_1 - T_2)$.

7.3. *Лемма. Если* $S, T \in \mathscr{E}(H)$, $S \dot{\vee} T$ *и* $D(S) = D(T) = D$, *то нормы* $\|\cdot\|_S$ *и* $\|\cdot\|_T$ *эквивалентны на* D. *В частности,* $\mathrm{T}(S) = \mathrm{T}(T)$ *(см.* (5.1)

Доказательство. Пусть выполняются условия леммы. Тогда

$$(S - T) f = u_1'(f) w_1 + \cdots + u_k'(f) w_k, \ f \in D, \tag{7.1}$$

где $w_1, \ldots, w_k$ — некоторые элементы из H, а $u_1', \ldots, u_k'$ — некоторые линейные функционалы, заданные на D и равные нулю на $Z(S - T)$. Так как многообразие нулей каждого из функционалов u_j' является $\|\cdot\|_T$-замкнутым (см. сноску на стр. 173), то каждый из этих функционалов непрерывен по норме $\|\cdot\|_T$. Следовательно, в силу (7.1) $\|Sf\| \leqslant \|Tf\| + C_1 \|f\|_T \|w_1\| + \cdots$ $\cdots + C_k \|f\|_T \|w_k\|$, откуда $\|f\|_S \leqslant C \|f\|_T$.

7.4. *Лемма. Пусть выполняются условия леммы 7.3 и пусть* U' — *подпространство, натянутое на функционалы* $u_1', \ldots, u_k'$, *содержащиеся в* (7.1). *Если* $U' \subset \mathrm{T}(S) = \mathrm{T}(T)$, *то* $S \vee T$.

Доказательство. Обозначим через T_0 (общее) сужение операторов S и T на $D_0 \stackrel{df}{=} \{f \in D : u_1'(f) = \cdots = u_k'(f) = 0\}$. В силу теоремы 5.3 $T_0 \in \mathscr{E}(H)$ и T_0 является конечнократным сужением операторов S и T.

7.5. Теорема. *Если* $S, T \in \mathscr{E}(H)$, *то* $S \sim T$ *тогда и только тогда, когда* $S \overset{*}{\sim} T$, *а также тогда и только тогда, когда* $S \dot{\vee} T$.

Доказательство. Пусть $S, T \in \mathscr{E}(H)$. Если $S \sim T$, то существует такая цепочка $\{T_k\}_{k=0}^{n+1} \subset \mathscr{E}(H)$, что $T_0 = S$, $T_{n+1} = T$ и $T_k \vee T_{k+1}$, $k = 0, \ldots, n$. Тем более, $T_k \dot{\vee} T_{k+1}$, $k = 0, \ldots, n$ и в силу транзитивности отношения $\dot{\vee}$ $S \dot{\vee} T$. Если же $S \overset{*}{\sim} T$, то используя 6.2.2°, опять приходим к выводу, что $S \dot{\vee} T$. Далее, если $S \sim T$ и $\{T_k\}_{k=0}^{n+1}$ — цепочка, о которой говорилось раньше, то, вставляя между T_k и T_{k+1} оператор $T_k' \stackrel{df}{=} \inf(T_k, T_{k+1})$, $k = 0, \ldots, n$, мы получим $T_k \wedge T_k'$, $T_k' \wedge T_{k+1}'$, $k = 0, \ldots, n$ и, следовательно, $S \overset{*}{\sim} T$. Теперь для завершения доказательства нам достаточно показать, что из $S \dot{\vee} T$ вытекает $S \sim T$.

Пусть $S \dot{\vee} T$. В силу леммы 7.2., не ограничивая общность, можно предположить, что все функционалы u_j' в формуле (7.1) неограничены относительно нормы $\|\cdot\|$ пространства H. Действительно, в случае надобности мы можем представить u_j' в виде суммы двух функционалов, обладающих указанным свойством. Положим теперь

$$D(T_k) \stackrel{df}{=} D, \ T_0 \stackrel{df}{=} S, \ T_k f = T_{k-1} f + u_k'(f) w_k.$$
$$f \in D, \ k = 1, \ldots, n+1$$

В силу леммы 7.4 имеем $T_k \in \mathscr{E}(H)$, $T_k \vee T_{k+1}$, $k = 0, \ldots n$, а согласно (7.1) $T_{n+1} = T$, что и требовалось доказать.

8. **Индекс родственных операторов.** Напомним [3], что оператор $S : H \to H$ называется нормально разрешимым, если $R(S)$ замкнуто в H. Напомним также, что дефект, кодефект и индекс оператора $S : H \to H$ определяются соотношениями

$$\begin{gathered} \operatorname{def} S \stackrel{df}{=} \dim Z(S), \operatorname{codef} S \stackrel{df}{=} \dim R(S)^{\perp}, \\ \operatorname{ind} S = \operatorname{codef} S - \operatorname{def} S. \end{gathered} \tag{8.1}$$

Нормально разрешимый оператор S, для которого $\operatorname{def} S$ и $\operatorname{codef} S$ конечны, называется Ф-оператором.

8.1. ***Лемма.*** *Пусть* $S \in \mathscr{E}^{\cdot}(H)$ *и* S *есть* Ф-*оператор. Существует такой* Ф-*оператор* $S_0 \in \mathscr{E}^{\cdot}(H)$, *что* $\operatorname{def} S_0 = \operatorname{codef} S_0 = 0$ *и* $S_0 \dot{\vee} S$.

Доказательство. Определим S_1 соотношениями $S_1 \subset S$, $D(S_1) = D_1 \overset{df}{=} D(S) \ominus^S Z(S)$. Так как $\dim Z(S) = \operatorname{def} S < \infty$, то в силу 4.1.1° $S_1 \in \mathscr{E}^{\circ}(H)$. Очевидно, $R(S_1) = R(S)$, а поэтому $R(S_1)$ замкнуто в H. Рассмотрим произвольное подпространство U, удовлетворяющее условиям $U \cap D_1 = (0)$, $U \supset Z(S)$, $\dim U = \operatorname{codef} S$: в силу 2,5 такое U существует. Пусть S_2 — линейное взаимнооднозначное отображение U на $R(S)^{\perp}$. Определим S_0 как прямую сумму S_1 и S_2. Очевидно, S_0 обладает требуемыми свойствами.

8.2. **Теорема.** *Пусть* $S \in \mathscr{E}^{\cdot}(H)$ *и* S *есть* Ф-*оператор. Если* $T \in \mathscr{E}^{\cdot}(H)$ *и* $T \dot{\vee} S$, *то* T *также является* Ф-*оператором и (см.* (6.1))

$$\operatorname{ind} S - \operatorname{ind} T = \varkappa(T, S). \tag{8.2}$$

Доказательство. Пусть S_0 — оператор, построенный в предыдущей лемме. В силу 6.8 имеем также $T \dot{\vee} S_0$. Обозначим через A какое-нибудь общее конечнократное сужение операторов S, T и S_0, принадлежащее $\mathscr{E}^{\cdot}(H)$. Проверим что $R(A)$ замкнуто в H. Пусть $f_n \in D(A)$ и $Af_n \to g$ по норме пространства H. Тогда, так как $R(S_0) = H$, существует такое $f \in D(S_0)$, что $S_0 f = g$. Поскольку $A \subset S_0$, то $f_n = S_0^{-1} A f_n \to S_0^{-1} g = f$, ибо оператор S_0^{-1} ограничен. Следовательно, так как A замкнут, то $f \in D(A)$ и $Af = g$, т. е. $\overline{R(A)} = g$. Таким образом, оператор A нормально разрешим и, как конечнократное сужение оператора с конечным дефектом и конечным кодефектом, также имеет конечный дефект и конечный кодефект. Это означает, что A является Ф-оператором. Как известно [2, лемма 2.2], конечнократное расширение Ф-оператора есть Ф-оператор и при расширении на k измерений индекс уменьшается на k единиц. Следовательно, T является Ф-оператором и $\operatorname{ind} T = \operatorname{ind} A - \varkappa(T, A)$, $\operatorname{ind} S = \operatorname{ind} A - \varkappa(S, A)$, откуда в силу (6.2) вытекает (8.2).

8.3. Следствие. *Пусть* $S \in \mathscr{E}(H)$ *и* S *есть* Ф-*оператор. Если* $T \in \mathscr{E}(H)$ *и* $T \sim S$, *то* T *также является* Ф-*оператором.*

Действительно, если $T \sim S$, то $T \dot{\vee} S$.

9. **Резольвенты родственных операторов.** В этом пункте S обозначает некоторый фиксированный оператор из $\mathscr{E}(H)$, с непустым резольвентным множеством, обозначаемым через $\rho(S)$. Пусть $T \in \mathscr{E}(H)$ и $T \sim S$. Опишем «общее решение» f уравнения

$$(T - \zeta) f = g. \tag{9.1}$$

Пусть A — какое-нибудь общее конечнократное сужение операторов S и T, принадлежащее $\mathscr{E}^{\cdot}(H)$. Рассмотрим какие-нибудь прямые разложения

$$D(S) = D(A) \dotplus U_S, \quad D(T) = D(A) \dotplus U_T \tag{9.2}$$

и через P_S (P_T) обозначим проектор пространства $D(S)$ ($D(T)$) на U_S (U_T) параллельно $D(A)$. При $\zeta \in \rho(S)$ положим [1]

$$\Omega(\zeta) \overset{df}{=} \Omega_{T/S}(\zeta) \overset{df}{=} P_S S_\zeta (T - \zeta) P_T \mid U_T, \tag{9.3}$$

где $S_\zeta \overset{df}{=} (S - \zeta)^{-1}$.

9.1. **Предложение.** 1°. *Пусть* $\zeta \in \rho(S)$, $f \in D(T)$ *и выполняется* (9.1). *Тогда*

$$\Omega(\zeta) u = P_S S_\zeta g, \tag{9.4}$$

[1] См. сноску [1] на стр. 170.

где $u = P_T f$ *и*

$$f = S_\zeta g \dotplus [1 - S_\zeta (T - \zeta)]\, u. \qquad (9.5)$$

2°. *Пусть* $\zeta \in \rho(S)$, $g \in H$, *и предположим, что существует* $u \in U_T$, *удовлетворяющее уравнению (9.4). Если* f *определить формулой (9.5), то* $f \in D(T)$ *и выполняется (9.1).*

Доказательство. Из (9.1) вытекает, что $(S - \zeta)(f - u) \dotplus (T - \zeta)\, u = g$, где $u \overset{df}{=} P_T f$. Отсюда $f - u \dotplus S_\zeta (T - \zeta)\, u = S_\zeta g$, а поэтому выполняется (9.5). Принимая во внимание, что $P_S (f - u) = P_S (1 - P_T) f = 0$, отсюда же получаем (9.4). 2°. Если $u \in U_T$ и u удовлетворяет уравнению (9.4), а f определяется формулой (9.5), то $f - u \in D(S)$ и, как легко проверить, $(1 - P_S)(f - u) = f - u$, так что фактически $f - u \in D(A)$, а поэтому $f \in D(T)$. Следовательно, $(T - \zeta)(f - u) = (S - \zeta)(f - u) = g - (T - \zeta)\, u$ и выполняется (9.1).

9.2. **Теорема.** *Пусть* $\zeta \in \rho(S)$ *и в прямых разложениях* (9.2) $A = \inf(S, T)$ (см. 6.3). *Для того чтобы* $\zeta \in \rho(T)$, *где* $\rho(T)$ — *резольвентное множество оператора* T, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$Z(\Omega_{T/S}(\zeta)) = (0) \text{ и } \varkappa(T, S) = 0 \qquad (9.6)$$

(см. (9.3), (6.1)). *Если эти условия выполняются, то*

$$R(\Omega_{T/S}(\zeta)) = U_S, \qquad (9.7)$$

$$T_\zeta = S_\zeta \dotplus T_S(\zeta), \qquad (9.8)$$

где $T_\zeta \overset{df}{=} (T - \zeta)^{-1}$, *а*

$$T_S(\zeta) \overset{df}{=} [1 - S_\zeta (T - \zeta)]\, \Omega(\zeta)^{-1} P_S S_\zeta. \qquad (9.9)$$

Доказательство. Пусть $u \in Z(\Omega(\zeta))$ и $f \overset{df}{=} [1 - S_\zeta (T - \zeta)]\, u$. Тогда в силу 9.1 $f \in D(T)$ и $(T - \zeta) f = 0$. Поэтому, если $\zeta \in \rho(T)$, то $f = 0$, т. е. $u = S_\zeta (T - \zeta)\, u$, откуда $u \in D(S)$ и $(S - T)\, u = 0$. Таким образом, $u \in Z(T - S) = D(A)$, а так как $Z(\Omega(\zeta)) \subset U_T$ и $U_T \cap D(A) = (0)$, то $u = 0$, что доказывает необходимость первого из равенств (9.6). Далее, так как $R(S_\zeta) = D(S)$, то, когда g пробегает все H, правая часть (9.4) пробегает все U_S и следовательно, если $\zeta \in \rho(T)$, то в силу (9.1) выполняется (9.7). Но поскольку существует $\Omega(\zeta)^{-1}$, то из (9.7) заключаем, что $\dim U_S = \dim U_T$. Это доказывает необходимость второго из равенств (9.6).

Предположим теперь, что равенства (9.6) выполняются. Тогда выполняется (9.7) и при любом $g \in H$ уравнение (9.4) имеет единственное решение $u \in U_T$. В частности, при $g = 0$ имеем $u = 0$ и из 9.1.1° вытекает, что, если $f \in D(T)$ и $(T - \zeta) f = 0$, то $f = 0$. Таким образом, существует T_ζ. Решая (9.4) относительно u и подставляя это решение в (9.5), приходим к формулам (9.8), (9.9). Поскольку $D(T_\zeta) = H$ и T замкнут, то $\zeta \in \rho(T)$.

9.3. *Замечание.* Покажем, что при $\zeta \in \rho(S)$ оператор $P_S (S - \zeta)^{-1} : H \to H$ непрерывен.

Для этого заметим, что поскольку $D(A)$ является $\|\cdot\|_S$-замкнутым, а U_S конечномерно, то P_S является непрерывным оператором в пространстве $D(S)$ с нормой $\|\cdot\|_S$:

$$\| P_S f \|_S \leqslant C \| f \|_S, \quad f \in D(S). \qquad (9.10)$$

Следовательно, учитывая, что S_ζ и SS_ζ ограничены относительно нормы пространства H, имеем

$$\| P_S S_\zeta f \| \leqslant \| P_S S_\zeta f \|_S \leqslant C \| S_\zeta f \|_S =$$
$$= C \sqrt{\| S_\zeta f \|^2 + \| S S_\zeta f \|^2} \leqslant C_1 \| f \|.$$

Оператор $T_S(\zeta) \overset{df}{=} T_\zeta - S_\zeta$ ограничен, поскольку T_ζ, $S_\zeta \in B(H)$. Из доказанного замечания также вытекает, что $T_S(\zeta) \in B(H)$. Действительно, из (9.9) видно, что $T_S(\zeta)$ есть произведение непрерывного оператора $P_S S_\zeta$ и оператора $[1 - S_\zeta(T - \zeta)]\,\Omega(\zeta)^{-1}$, заданного на конечномерном пространстве U_S.

9.4 Следствие. *Функции* $\zeta \to P_S S_\zeta$, $\zeta \to \Omega_{T/S}(\zeta)$ (см. 9.2)) *голоморфны при* $\zeta \in \rho(S)$.

Действительно, в силу уравнения Гильберта для резольвенты мы имеем $P_S S_\zeta = P_S S_{\zeta_0}(1 + (\zeta - \zeta_0) S_\zeta)$, где ζ_0 — фиксированная точка из $\rho(S)$.

9.5. *Замечание*. Пусть $T \sim S$ и по-прежнему в прямых разложениях (9.2) $\Lambda = \inf(S, T)$. Предположим, что $\varkappa(T, S) = 0$, т. е. $\dim U_T = \dim U_S$. Пусть $(t_1, \ldots, t_n)$, или $(s_1, \ldots, s_n)$, — некоторый фиксированный базис пространства U_T (U_S). При $\zeta \in \rho(S)$ определим числа $\Omega_{jk}(\zeta)$ и элементы $\overset{*}{s}_j(\zeta) \in H$ с помощью соотношений

$$\Omega(\zeta)\, t_k = \sum_{j=1}^{n} \Omega_{jk}(\zeta)\, s_j, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{9.11}$$

$$P_S S_\zeta g = \sum_{j=1}^{n} (g, \overset{*}{s}_j(\bar{\zeta}))\, s_j, \quad g \in H. \tag{9.12}$$

Отметим, что в силу 9.4 *функции* $\zeta \to \Omega_{jk}(\zeta)$, $\zeta \to \overset{*}{s}_j(\xi)$ *голоморфны при* $\zeta \in \rho(S)$. Положим

$$\Delta(\zeta) \overset{df}{=} \det(\Omega_{jk}(\zeta))_{j,\,k=1}^{n}, \quad \zeta \in \rho(S), \tag{9.13}$$

Для того чтобы $\zeta \in \rho(T)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\Delta(\zeta) \neq 0$.

Действительно, $Z(\Omega(\zeta)) = (0)$, тогда и только тогда, когда $\Delta(\zeta) \neq 0$ и наше утверждение вытекает из 9.2.

Введем обозначения

$$t_k(\zeta) \overset{df}{=} [1 - S_\zeta(T - \zeta)]\, t_k, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{9.14}$$

$$\Delta(\zeta, g) \overset{df}{=} \begin{pmatrix} S_\zeta g & -t_1(\zeta) & \ldots & -t_n(\zeta) \\ (g, \overset{*}{s}_1(\bar{\zeta})) & \Omega_{11}(\zeta) & \ldots & \Omega_{1n}(\zeta) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (g, \overset{*}{s}_n(\bar{\zeta})) & \Omega_{n1}(\zeta) & \ldots & \Omega_{nn}(\zeta) \end{pmatrix}. \tag{9.15}$$

Тогда, *при* $\Delta(\zeta) \neq 0$ *справедлива формула*

$$T_\zeta g = \Delta(\zeta, g)/\Delta(\zeta), \quad g \in H. \tag{9.16}$$

Действительно, полагая $f \overset{df}{=} T_\zeta g$, в силу 9.1.1° заключаем, что f определяется формулой (9.5), где u удовлетворяет уравнению (9.4). Представим u в виде

$$u = \sum_{k=1}^{n} \mu_k t_k.$$

В силу (9.11) и (9.12) для чисел μ_k получаем систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} \Omega_{jk}(\zeta)\,\mu_k = (g,\ \overset{*}{s}_j(\bar{\zeta})),\quad j = 1, \ldots, n, \tag{9.4'}$$

а в силу (9.14) для элемента f, определяемого формулой (9.5), находим

$$T_\zeta g = f = S_\zeta g + \sum_{k=1}^{n} \mu_k t_k(\zeta). \tag{9.5'}$$

Исключая $\mu_1, \ldots, \mu_n$ из (9.4') и (9.5'), приходим к (9.16).

9.6. **Теорема.** *Пусть* S, $T \in \mathscr{C}(H)$ *и* $\zeta \in \rho(S) \cap \rho(T)$. *Для того чтобы* $S \sim T$, *необходимо и достаточно, чтобы оператор* $T_S(\zeta) \overset{df}{=} T_\zeta - S_\zeta$ *был конечномерным.*

Доказательство. Необходимость условия вытекает из (9.9). Для доказательства достаточности положим

$$R \overset{df}{=} Z(T_S(\zeta)). \tag{9.17}$$

Учитывая, что $T_S(\zeta) \in B(H)$ находим, что $\bar{R} = R$ и, так как $T_S(\zeta)$ — конечномерный оператор,

$$\dim R^\perp < \infty. \tag{9.18}$$

Введем обозначение

$$D \overset{df}{=} S_\zeta R = T_\zeta R. \tag{9.19}$$

Очевидно, что $Sf = Tf$ при $f \in D$. Пусть

$$A \overset{df}{=} S \mid D = T \mid D, \tag{9.20}$$

так что $D(A) = D$, $R(A) = R$. Так как $R(S - \zeta) = R(T - \zeta) = H$ и $Z(S - \zeta) = Z(T - \zeta) = (0)$, то

$$A \subset \dim R^\perp \subset S,\quad A \subset \dim R^\perp \subset T,$$

а поэтому в силу (9.18) A является конечнократным сужением операторов S и T. Ввиду того что отображение S пространства $D(S)$ с нормой $\|\cdot\|_S$ в пространство H с нормой $\|\cdot\|$ непрерывно, прообраз D множества $R = \bar{R}$ является $\|\cdot\|_S$-замкнутым и, следовательно, $A \in \mathscr{C}(H)$.

9.7. **Предложение.** *Пусть* S, $T \in \mathscr{C}(H)$, $S \sim T$, $\zeta \in \rho(S) \cap \rho(T)$, *тогда*

$$Z(T_\zeta - S_\zeta) = R(\inf(T, S) - \zeta), \tag{9.21}$$

$$R(T_\zeta - S_\zeta) = R(\inf(T^*, S^*) - \bar{\zeta}))^\perp. \tag{9.22}$$

Доказательство. Положим $T_S(\zeta) \overset{df}{=} T_\zeta - S_\zeta$, $A \overset{df}{=} \inf(S, T)$ и пусть $g \in R(A - \zeta)$. Тогда $T_\zeta g = A_\zeta g = S_\zeta g$, а поэтому $T_S(\zeta)\, g = 0$, т. е. $R(A - \zeta) \subset Z(T_S(\zeta))$. Обратно, пусть $g \in Z(T_S(\zeta))$. Полагая $u \overset{df}{=} \Omega(\zeta)^{-1} P_S S_\zeta g$, в силу (9.9) находим $[1 - S_\zeta(T - \zeta)]\, u = 0$. Рассуждая как при доказательстве 9.2, приходим к выводу, что $u = 0$. Поэтому $P_S(S - \zeta)^{-1} g = 0$, т. е. $(S - \zeta)^{-1} g \in D(A)$ и $g \in R(A - \zeta)$, что завершает доказательство равенства (9.21).

Ввиду того что $(T_\zeta - S_\zeta)^* = T^*_{\bar\zeta} - S^*_{\bar\zeta}$, в силу (9.21)

$$Z((T_\zeta - S_\zeta)^*) = R(\inf(T^*, S^*) - \bar\zeta). \tag{9.21*}$$

Так как $R(K) = Z(K^*)^\perp$ для произвольного конечномерного оператора K из $B(H)$, на основании (9.21*) $R(T_\zeta - S_\zeta) = Z((T_\zeta - S_\zeta)^*)^\perp = R(\inf(T^*, S^*) - \bar\zeta)^\perp$.

9.8. *Замечание.* Для произвольного оператора $T \in \mathscr{E}(H)$ с непустым резольвентным множеством $\rho(T)$ положим

$$T_{\zeta_1\zeta_2} \stackrel{df}{=} 1 \dotplus (\zeta_1 - \zeta_2) T_{\zeta_1} = (T - \zeta_2)(T - \zeta_1)^{-1}, \ \zeta_1 \ \zeta_2 \in \rho(T). \tag{9.23}$$

Очевидно, $T_{\zeta_1\zeta_2} \in B(H)$ и

$$T_{\zeta_1\zeta_2} T_{\zeta_2\zeta_1} = 1, \quad \zeta_1, \zeta_2 \in \rho(T). \tag{9.24}$$

9.2. *Замечание.* Пусть T, $S \in \mathscr{E}(H)$ и $\rho(T) \cap \rho(S) \neq \varnothing$. Тогда для произвольных ζ, $\zeta_0 \in \rho(T) \cap \rho(S)$

$$(T_\zeta - S_\zeta) T_{\zeta_0\zeta} = S_{\zeta\zeta_0}(T_{\zeta_0} - S_{\zeta_0}). \tag{9.25}$$

Для доказательства достаточно воспользоваться уравнением Гильберта для резольвент T_ζ и S_ζ.

9.10. **Теорема.** *Пусть S, $T \in \mathscr{E}(H)$, $T \sim S$ и $\rho(S) \cap \rho(T) \neq \varnothing$. Тогда*

$$T_\zeta f = S_\zeta f \dotplus \sum_{\nu=1}^{n} (f, \overset{*}{e}_\nu(\bar\zeta))\, e_\nu(\zeta), \ f \in H, \tag{9.26}$$

где функции $\zeta \to e_\nu(\zeta)$ и $\zeta \to \overset{*}{e}_\nu(\zeta)$ голоморфны при $\zeta \in \rho(S) \cap \rho(T)$, $\nu = 1, \ldots, n$ и $(e_1(\zeta), \ldots, e_n(\zeta))$ есть базис $R(T_\zeta - S_\zeta)$, а $(\overset{*}{e}_1(\bar\zeta), \ldots, e_n(\zeta))$ — базис $R((T_\zeta - S_\zeta)^*)$.

Доказательство. Возьмем фиксированное $\zeta_0 \in \rho(S) \cap \rho(T)$ и выберем в $R(T_\zeta - S_\zeta)$ и $R((T_\zeta - S_\zeta)^*)$ такие базисы — соответственно $(e_1(\zeta_0), \ldots, e_n(\zeta_0))$ и $(\overset{*}{e}_1(\bar\zeta_0), \ldots, \overset{*}{e}_n(\bar\zeta_0))$, чтобы (9.26) выполнялось при $\zeta = \zeta_0$. Это возможно в силу 9.7 и теоремы об общем виде конечномерного оператора в гильбертовом пространстве. В силу (9.24) и (9.25) имеем

$$(T_\zeta - S_\zeta) f = (T_\zeta - S_\zeta) T_{\zeta_0\zeta} T_{\zeta\zeta_0} f = S_{\zeta\zeta_0}(T_{\zeta_0} - S_{\zeta_0}) T_{\zeta\zeta_0} f =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{n} (T_{\zeta\zeta_0} f, \overset{*}{e}_\nu(\bar\zeta_0))\, S_{\zeta\zeta_0} e_\nu(\zeta_0)$$

и, полагая

$$e_\nu(\zeta) \stackrel{df}{=} S_{\zeta\zeta_0} e_\nu(\zeta_0), \ \overset{*}{e}_\nu(\bar\zeta) = (T_{\zeta\zeta_0})^* \overset{*}{e}_\nu(\bar\zeta_0), \tag{9.27}$$
$$\nu = 1, \ldots, n$$

приходим к утверждению теоремы.

10. **Описание родственных операторов.** Пусть S — произвольный оператор из $\mathscr{E}(H)$. Опишем операторы T, родственные S. Для этого заметим, что, если $T \sim S$, $D \stackrel{df}{=} D(S) \dotplus D(T)$ является расширением многообразия $D(S)$ на конечное число измерений (см. доказательство леммы 7.2). Поэтому, обозначая через

L произвольное линейное расширение оператора S, заданное на $D(L) \overset{df}{=} D$, мы имеем $L \in \mathcal{E}(H)$, $T \sim L$ (ибо $S \sim L$ и отношение $\sim$ транзитивно) и, кроме того, $D(T) \subset D(L)$.

10. 1. **Предложение.** *Пусть $L \in \mathcal{E}(H)$ и T — такой оператор из $\mathcal{E}(H)$, что $T \sim L$ и $D(T) \subset D(L)$. Существуют такие $x_1, \ldots, x_k \in H$, такие заданные на $D(L)$ и $\|\cdot\|_L$-непрерывные функционалы $t'_1, \ldots, t'_k$ и такие $\tau'_1, \ldots, \tau'_\varkappa \in \tau$* (L) (см. определение 5.1), *что*

$$D(T) = \{f \in D(L) : \tau'_j(f) = 0, \ j = 1 \ \ldots, \varkappa\}, \tag{10.1}$$

$$Tf = Lf \dotplus \sum_{i=1}^{k} t'_i(f)\, x_i, \ f \in D(T). \tag{10.2}$$

Обратно, *для любых x_i, t'_i, τ'_j, обладающих перечисленными выше свойствами, соотношения* (10.1) *и* (10.2) *определяют такой оператор T, что $T \in \mathcal{E}(H)$, $T \sim L$ и $D(T) \subset D(L)$.*

Доказательство. Обозначим через T_1 какое-либо линейное продолжение оператора T на многообразие $D(L) \supset D(T)$. Очевидно, $T_1 \in \mathcal{E}(H)$ и $T_1 \sim L$, а поэтому (см. доказательство леммы 7.3)

$$T_1 f = Lf \dotplus \sum_{i=1}^{k} t'_i(f)\, x_i, \ f \in D(T_1) \overset{df}{=} D(L), \tag{10.2'}$$

где t'_i, x_i обладают перечисленными выше свойствами. Поскольку $T \in \mathcal{E}(H)$ и $T \subset T_1$, имеют место соотношения (10.1) и (10.2), причем в (10.1) $\tau'_i \in \mathrm{T}(T_1)$, $j = 1, \ldots, \varkappa$ (см. теорему 5.3). Но в силу 7.3 $\Gamma(T_1) = \Gamma(L)$, а поэтому $\tau'_j \in \mathrm{T}(L)$, $j = 1, \ldots, \varkappa$. Обратное утверждение очевидно.

10.2. ***Лемма.*** *Пусть T — оператор, о котором речь идет в предложении* 10.1. *Пусть t_i — такой (единственный) элемент из $D(L)$, что*

$$t'_i(f) = (f, t_i)_L, \ \text{для всех } f \in D(L), \tag{10.3}$$

$i = 1, \ldots, \varkappa$. *Для того чтобы элемент g из H принадлежал $D(T^*)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$g \dotplus \sum_{i=1}^{k} (g, x_i)\, Lt_i \in D(L_T^*), \tag{10.4}$$

где $L_T \overset{df}{=} L \mid D(T)$ — сужение оператора L на $D(T)$. Кроме того,

$$T^* g = L_T^* \Big(g \dotplus \sum_{i=1}^{k} (g, x_i)\, Lt_i\Big) \dotplus \sum_{i=1}^{k} (g, x_i)\, t_i. \tag{10.5}$$

Доказательство. Если $f \in D(T)$, то в силу (10.2) и (10.3) для каждого $g \in D(T^*)$ имеем $(f, T^*g) = (Tf, g) = (L_T f, g) \dotplus \sum_{i=1}^{k} [(f, t_i) + \dotplus (Lf, Lt_i)](x_i, g)$, откуда $\left(L_T f, g \dotplus \sum_{i=1}^{k} (g, x_i)\, Lt_i\right) = \left(f, T^* g - - \sum_{i=1}^{k} (g, x_i)\, t_i\right)$, и, следовательно, для всех $g \in D(T^*)$ выполняется (10.4) и (10.5). Обратно, пусть для некоторого g из H выполняется (10.4). Тогда для всех f из $D(T)$

$$(Tf, g) = (L_T f, g) \dotplus \textstyle\sum_{i=1}^{k} (f, t_i)_L\, (x_i, g) =$$
$$= \left(L_T f, g \dotplus \textstyle\sum_{i=1}^{k} (g, x_i)\, Lt_i\right) - \textstyle\sum_{i=1}^{k} (Lf, Lt_i)(x_i, g) \dotplus$$

$$+\sum_{i=1}^{k}[(f,\ t_i)+(Lf,\ Lt_i)](x_i,\ g)=$$

$$=\left(f,\ L_T^*\left(g+\sum_{i=1}^{k}(g,\ x_i)Lt_i\right)+\sum_{i=1}^{k}(f,\ t_i)(x_i,\ g),\right.$$

т. е., для всех f из $D(T)$,

$$(Tf,\ g)=(f,\ L_T^*\left(g+\sum_{i=1}^{k}(g,\ x_i)Lt_i\right)+\sum_{i=1}^{k}(g,\ x_i)t_i,$$

что и требовалось доказать.

10.3. *Замечание*. В дальнейшем мы будем считать, что каждая из систем $(\tau_1',\ \ldots,\ \tau_\varkappa')$, $(t_1',\ \ldots,\ t_k')$ и $(x_1,\ \ldots,\ x_k)$ (см. (10.1), (10.2)) является линейно независимой. Очевидно, это предположение не ограничивает общность. Из него вытекает, что $\varkappa(L,\ T)=\varkappa$ (см. (6.1)) и $D(\inf(L,\ T))=\{f\in D(L):\ :t_i'(f)=0,\ i=1,\ \ldots,\ k\}$ (см. определение 6.3).

Во избежание излишнего произвола при рассмотрении операторов T, родственных оператору L, кроме условия $D(T)\subset D(L)$, введем еще некоторые другие естественные ограничения.

10.4. Определение. *Пусть* $L_0,\ L\in\mathscr{E}(H)$, $L_0\subset m\subset L$ *при некотором натуральном* m *и* $M\overset{df}{=}L_0^*$, $M_0\overset{df}{=}L^*$. *Мы говорим, что функционал* γ' *из* $\mathrm{T}(L)$ *принадлежит* $\mathrm{T}(L,\ L_0)$ *по модулю* H *и пишем*

$$\gamma'\in\mathrm{T}(L,\ L_0)\ (\mathrm{mod}\ H),\tag{10.5}$$

если существует такой функционал $u'\in\mathrm{T}(L,\ L_0)$, *что разность* $\gamma'-u'$ *является* $\|\cdot\|$*-непрерывной, т. е. эта разность допускает представление*

$$\gamma'(f)-u'(f)=(f,\ \varphi),\ f\in D(L).\tag{10.5'}$$

где φ *— некоторый элемент из* H.

10.5. **Лемма.** *Если* $\gamma'\in\mathrm{T}(L)$, *то* (10.5) *имеет место тогда и только тогда, когда*

$$L\gamma\in D(M),\tag{10.6}$$

где $\gamma\in D(L)$ *и* $\gamma'(f)=(f,\ \gamma)_L$ *для всех* $f\in D(L)$.

Доказательство. Пусть выполняется (10.5′) и пусть $u\in D(L)$ и $(f,\ u)_L=u'(f)$, $f\in D(L)$. Тогда $(Lf,\ L\gamma-Lu)=(f,\ \varphi-\gamma+u)$, $f\in D(L)$. Отсюда $L\gamma-Lu\in D(M_0)\subset D(M)$, а так как в силу 3.1, $Lu\in D(M)$, то выполняется (10.6). Обратно, пусть выполняется (10.6) и v есть $(.\ ,\ .)_M$-ортогональная проекция элемента $L\gamma$ на $D(M)\ominus^M D(M_0)$. Полагая $u\overset{df}{=}-Mv$, в силу леммы 3.1 имеем $v=Lu$ и, следовательно, $L\gamma-Lu\in D(M_0)=D(L^*)$, откуда $(f,\ \gamma-u)_L=$ $=(f,\ \varphi)$, где $\varphi\overset{df}{=}(1+L^*L)(\gamma-u)$.

10.6. **Теорема.** *Пусть* $T\sim L$ *и* $D(T)\subset D(L)$. *Для того чтобы выполнялись условия*

$$D(T^*)\subset D(M),\tag{10.7}$$

$$D(L_T^*)\subset D(M),\tag{10.8}$$

где $L_T\overset{df}{=}L\mid D(T)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\tau_j',\ t_i'\in\mathrm{T}(L,\ L_0)\ (\mathrm{mod}\ H),\tag{10.9}$$

$$j=1,\ \ldots,\ \varkappa,\quad i=1,\ \ldots,\ k,$$

где τ_j', t_i' *те же, что в* (10.1) *и* (10.2).

Если выполняется (10.7) *и* (10.8), *то выполняется также условие*

$$D(M_{T^*}{}^*) \subset D(L), \tag{10.10}$$

где $M_{T^*} \overset{df}{=} M \mid D(T^*)$.

Доказательство. Если выполняется условие (10.8), то

$$L\tau_1, \ldots, L\tau_\varkappa \in D(M), \tag{10.11}$$

где $\tau_j \in D(L)$ и $(f, \tau_j)_L = \tau'_j(f)$, $f \in D(L)$, $j = 1, \ldots, \varkappa$. Действительно, так как $\tau'_j \in \mathrm{T}(L, L_T)$, то $\tau_j \in D(L) \ominus^L D(L_T)$ и в силу 3.1 $L\tau_j \in D(L_T{}^*) \ominus^{L_T{}^*} \times D(L^*) \subset D(M)$. Из (10.11) на основании леммы 10.5 заключаем, что $\tau'_j \in \mathrm{T}(L, L_0) \pmod H$.

Далее, из включений (10.7), (10.8) и леммы 10.2 (см. в частности, (10.4)) вытекает что $\sum_{i=1}^k (g, x_i) Lt_i \in D(M)$, $g \in D(T^*)$. Отсюда

$$Lt_1, \ldots, Lt_k \in D(M), \tag{10.12}$$

где $t_i \in D(L)$ и $(f, t_i)_L = t'_i(f)$, $f \in D(L)$. Действительно, так как $\overline{D(T^*)} = H$ и $x_1, \ldots, x_k$ линейно независимы, то существуют такие $g_1, \ldots, g_k \in D(T^*)$, что $\det(g_j, x_i) \neq 0$, а поэтому $Lt_1, \ldots, Lt_k$ являются линейными комбинациями элементов $m_j \overset{df}{=} \sum_{i=1}^k (g, x_i) Lt_i \in D(M)$. Из (10.12) на основании леммы 10.5 заключаем, что $t'_i \in \mathrm{T}(L, L_0) \pmod H$.

Обратно, пусть выполняются соотношения (10.9), а следовательно, также (10.11) и (10.12) (в силу леммы 10.5). Ввиду того что $\tau_1, \ldots, \tau_\varkappa$ есть базис пространства $D(L) \ominus^L D(L_T)$, то согласно лемме 3.1 $L\tau_1, \ldots, L\tau_\varkappa$ есть базис пространства $D(L_T{}^*) \ominus^{L_T{}^*} D(M_0)$ и из включений (10.11) вытекает (10.8). Пусть теперь $g \in D(T^*)$. Тогда из (10.4) и (10.8) следует, что $g + \sum_{i=1}^k (g, x_i) Lt_i \in D(M)$, откуда на основании (10.12) заключаем, что $g \in D(M)$, т. е. выполняется (10.7). Доказательство последней части теоремы, связанной с соотношением (10.10), нам удобно несколько отодвинуть.

10.7. *Замечание*. Пусть выполняется (10.8) и, следовательно, $\tau'_j \in \mathrm{T}(L, L_0) \pmod H$, $j = 1, \ldots, \varkappa$. Пусть $u'_j \in \mathrm{T}(L, L_0)$ и $\varphi_j \in H$ таковы, что

$$\tau'_j(f) = u'_j(f) - (f, \varphi_j), \quad f \in D(L). \tag{10.13}$$
$$j = 1, \ldots, \varkappa$$

Тогда функционалы $u'_1, \ldots, u'_\varkappa$ линейно независимы, а поэтому

$$\varkappa = \varkappa(L, T) \leqslant \varkappa(L, L_0) = m. \tag{10.14}$$

Действительно, если $c_1 u'_1 + \cdots + c_\varkappa u'_\varkappa = 0$, то в силу (10.1) $(f, c_1\varphi_1 + \cdots + c_\varkappa \varphi_\varkappa) = 0$, $f \in D(T)$, откуда $c_1\varphi_1 + \cdots + c_\varkappa\varphi_\varkappa = 0$ (ибо $\overline{D(T)} = H$), а поэтому $c_1\tau'_1 + \cdots + c_\varkappa\tau'_\varkappa = 0$. Следовательно, $c_1 = \cdots = c_\varkappa = 0$, поскольку $\tau'_1, \ldots, \tau'_\varkappa$ предполагаются линейно независимыми (см. замечание 10.3).

10.8. Следствие. *Если выполнены условия* (10.7) *и* (10.8), *то существует такой базис* $u'_1, \ldots, u'_m$ *пространства* $\mathrm{T}(L, L_0)$ *и такие* $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, $\psi_1, \ldots, \psi_n$, $\chi_1, \ldots, \chi_n \in H$, *что*

$$D(T) = \{f \in D(L) : u'_j(f) = (f, \varphi_j),\ j = 1, \ldots, \varkappa\}, \tag{10.15}$$

$$Tf = Lf + \sum_{j=\varkappa+1}^{m} u'_j(f)\varphi_j + \sum_{i=1}^{n} (f, \chi_i)\psi_i, \quad f \in D(T). \tag{10.16}$$

Действительно, в силу (10.14) формула (10.1) может быть записана в виде (10.15). Так как $u'_1, \ldots, u'_\varkappa$ линейно независимы (см. 10.7), то существуют функционалы $u'_{\varkappa+1}, \ldots, u'_m$, дополняющие их до базиса пространства $\mathrm{T}(L, L_0)$. Поскольку $t'_l \in \mathrm{T}(L, L_0)$ (mod H), то $t'_l(f)$ есть линейная комбинация $u'_j(f)$, $j = 1, \ldots, m$ с точностью до слагаемого вида (f, g_l), где $g_l \in H$. Учитывая это, а также (10.15), формулу (10.2) можно преобразовать к виду (10.16).

10.9. **Предложение.** *Если оператор T задается соотношениями* (10.15) *и* (10.16), *то*

$$D(T^*) = \{g \in D(M) : v'_j(g) = -(g, \varphi_j),\ j = \varkappa + 1, \ldots, m\}, \tag{10.17}$$

$$T^*g = Mg + \sum_{j=1}^{\varkappa} v'_j(g)\varphi_j + \sum_{l=1}^{n} (g, \psi_l)\chi_l,\ g \in D(T^*), \tag{10.18}$$

где $v'_1, \ldots, v'_m$ — такой базис пространства $\tau(M, M_0)$, что (см. 5.5)

$$(Lf, g) - (f, Mg) = \sum_{j=1}^{m} u'_j(f)\overline{v'_j(g)},\ f \in D(L),\ g \in D(M). \tag{10.19}$$

Доказательство. Из (10.15), (10.16) и (10.19) с помощью несложных преобразований получаем

$$(Tf, g) = (f, Mg + \sum_{j=1}^{\varkappa} v'_j(g))\varphi_j + \sum_{l=1}^{n}(g, \psi_l)\chi_l) +$$
$$+ \sum_{j=\varkappa+1}^{m} u'_j(f)[v'_j(g) + (g, \varphi_j)],\ f \in D(T),\ g \in D(M). \tag{10.20}$$

Покажем, что функционалы $u'_{\varkappa+1}, \ldots, u'_m$, рассматриваемые на $D(T)$, линейно независимы. Действительно, если $[c_{\varkappa+1}u'_{\varkappa+1} + \cdots + c_m u'_m] \mid D(T) = 0$, то в силу (10.15) существуют такие числа $c_1, \ldots, c_\varkappa$, что $c_{\varkappa+1}u'_{\varkappa+1} + \cdots + c_m u'_m = c_1[u'_1 - (\cdot, \varphi_1)] + \cdots + c_\varkappa[u'_\varkappa - (\cdot, \varphi_\varkappa)]$ (на $D(L)$), т. е. $c_1u'_1 + \cdots + c_m u'_m = (\cdot, \varphi)$ для некоторого $\varphi \in H$. Так как $u'_1, \ldots, u'_m$ есть базис $\mathrm{T}(L, L_0)$, то $c_1 = \cdots = c_m = 0$. Из доказанной линейной независимости $u'_{\varkappa+1}, \ldots, u'_m$ из (10.20) и общего определения сопряженного оператора вытекает (10.17) и (10.18). Напомним, что имеет место (10.7). Сначала вычисляем T^*g, а для этого применяем (10.20) к таким $f \in D(T)$, для которых $u'_{\varkappa+1}(f) = \cdots = u'_m(f) = 0$,— множество таких f плотно в H.

Теперь нетрудно завершить доказательство теоремы 10.6. Из (10.17) и (10.18) вытекает, что

$$D(T^*) = \{g \in D(M) : \tilde{\tau}_j(g) = 0,\ j = \varkappa + 1, \ldots, m\}, \tag{10.17'}$$

$$T^*g = Mg + \sum_{j=1}^{\tilde{k}} \tilde{t}'_l(g)\tilde{x}_l,\ g \in D(T^*), \tag{10.18'}$$

где

$$\tilde{\tau}_j,\ \tilde{t}_l \in \mathrm{T}(M, M_0) \ (\mathrm{mod}\ H).$$

Поэтому, применяя к T^* доказанные уже утверждения теоремы 10.6, приходим к включению (10.10).

В заключение укажем следующий пример. Пусть $H = L_2(0, \infty)$ и L_0, L — соответственно «минимальный» и «максимальный» операторы, порождаемые в H дифференциальным выражением $-y'' + p(x)y$, с комплексным коэффициентом

$p(x)$, суммируемым на полуоси $(0, \infty)$. Оператор L_0 отвечает краевым условиям $y(+0)=0$, $y'(+0)=0$, а в случае оператора L краевые условия отсутствуют. Оператор T, родственный оператору L, удовлетворяющий условию $D(T) \subset D(L)$, условиям (10,7), (10.8) и условию $\varkappa(L, T)=1$ (или эквивалентному условию $\varkappa(T, L_0)=1$), описывается следующим образом. Существует такая невырожденная матрица $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$, где α_i, β_i — комплексные числа, такие $\varphi_1\ \varphi_2 \in H$ и такое вырожденное ядро Гильберта—Шмидта $K(x, \xi)$, что T задан на тех $f \in D(L)$, которые удовлетворяют краевому условию

$$\alpha_1 f(+0) - \beta_1 f'(+0) = \int_0^\infty f(\xi)\overline{\varphi_1(\xi)}\,d\xi,$$

и для таких f

$$Tf(x) = -f''(x) + p(x) f(x) + [\alpha_2 f(+0) - \beta_2 f'(+0)]\,\varphi_2(x) +$$

$$+ \int_0^\infty K(x, \xi) f(\xi)\,d\xi.$$

Сопряженный оператор T^* находим очевидным способом на основании предложения 10.9.

Обозначим через S оператор, порождаемый в H дифференциальным выражением $-y'' + p(x)y$ и краевым условием $y(+0)=0$. Спектральные свойства оператора S сравнительно хорошо изучены. Описанный выше оператор T является родственным S и $\varkappa(T, S)=0$, а поэтому резольвенты T и S отличаются на конечномерное слагаемое, аналитически зависящее от спектрального параметра. Благодаря этому при некоторых ограничениях удается проследить связь между спектральными свойствами операторов T и S.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Э. Лянце. Условия замкнутости сужения самосопряженного оператора. ДАН СССР, т. 132, № 5, 1960.

2. А. Робертсон, В. Робертсон. Топологические векторные пространства. Изд-во «Мир», 1967.

3. И. Д. Гохберг, М. Г. Крейн. Основные положения о дефектных и корневых числах линейных операторов. «Усп. матем. наук», XII, 2(74) 1957.

Поступила 16 сентября 1970 г.