ОБ АБСТРАКТНЫХ ФУНКЦИЯХ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ЛВП, НЕ СОДЕРЖАЩЕМ ПОДПРОСТРАНСТВА, ИЗОМОРФНОГО C_0

Д. Б. Димитров

Переносятся некоторые результаты А. Пелчиньского [3] и И. М. Гельфанда [1] о безусловно сходящихся рядах, об операторах и абстрактных функциях ограниченной вариации, доказанных для пространств Банаха, на локально выпуклые пространства, не содержащие подпространств, изоморфных c_0 (в дальнейшем ЛВП $\overline{\ni}\, c_0$). На этот класс банаховых пространств впервые обратил внимание А. Пелчиньский [3].

Теоремы 2, 4, 5, 6 этой заметки доказываются при более слабых ограничениях даже в случае, когда пространство банахово. Во всех теоремах выделен максимально широкий класс пространств, для которых они верны.

Обозначения: X — секвенциально полное ЛВП: X^* — его топологическое сопряженное; $\{p_\alpha(x)\}$ — семейство полунорм на X, определяющее топологию; $\langle x^*, x\rangle$ — линейная форма, где $x^* \in X^*$, $x \in X$; $M^0 = \{x^* \in X^* : \sup |\langle x^*, x\rangle| \leqslant 1, x \in M\}$ — поляра множества $M \subset X$; X^*_β — сопряженное пространство в сильной топологии $\beta(X^*, X)$, определяемой полярами ограниченных множеств из X; c_0, l_1 — банаховы пространства всех сходящихся к нулю последовательностей, всех абсолютно суммируемых последовательностей соответственно; $e_l = \{\delta_{ln}\}_{n=1}^{\infty}$, где δ_{ln} — символ Кронекера.

В дальнейшем нам понадобится следующее обобщение теоремы А. Пелчиньского [3] о безусловно сходящихся рядах на ЛВП.

Теорема 1*. *Если ЛВП $X \overline{\ni}\, c_0$, то каждый слабо абсолютно сходящийся ряд сходится безусловно в исходной топологии пространства X.*

Сначала докажем лемму.

Лемма 1. *Пусть в ЛВП X (не обязательно секвенциально полном) существует ряд $\sum\limits_1^\infty x_l$, обладающий следующими свойствами:*

$$1)\ \sum_1^\infty |\langle x^*, x_l\rangle| < \infty \quad \text{для всех} \quad x^* \in X^* \tag{1}$$

2) *последовательность его частичных сумм $S_n = \sum\limits_1^n x_l$ не является последовательностью Коши.*

Тогда в X существует последовательность векторов $\{z_l\}_1^\infty$, такая что для любого конечного набора коэффициентов $\{\lambda_l\}_1^n$ и любой непрерывной полунормы выполнено неравенство

$$p_\alpha\Big(\sum_1^n \lambda_l z_l\Big) \leqslant C_\alpha \max|\lambda_l|,\ C_\alpha < \infty, \tag{2}$$

а хотя бы для одной полунормы $p_0(x)$ — неравенство

$$p_0\Big(\sum_1^n \lambda_l z_l\Big) \geqslant a \max|\lambda_l|,\ a > 0. \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим факторпространство $X_\alpha = X/Y_\alpha$ с нормой $\bar{p}_\alpha(\bar{x}) = \inf[p_\alpha(x+y) : y \in Y_\alpha]$, где $Y_\alpha = \{y \in X : p_\alpha(y) = 0\}$; $\bar{x}$ — класс элементов, отвечающих элементу x. Из условия 1) леммы следует, что множество

*Теорема 1 получена Ю. Б. Тумаркиным [4] независимо от автора.

$\left\{\sum_{1}^{n} \varepsilon_i x_i\right\}$ $|\varepsilon_i| \leqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots$ слабо, а значит, сильно ограничено в X и X_α. Тогда для любого конечного набора чисел $\{\lambda_i\}_1^n$ и любой полунормы p_α выполняется неравенство (1):

$$p_\alpha\left(\sum_1^n \lambda_i x_i\right) \leqslant \max_i |\lambda_i| \cdot \sup_{|\varepsilon_i| \leqslant 1} p_\alpha\left(\sum_1^n \varepsilon_i x_i\right) \leqslant C_\alpha \max_i |\lambda_i|.$$

Так как S_n не является последовательностью Коши, то существуют полунорма $p_0(x)$, $a > 0$ и последовательность целых чисел $N_n < M_n < N_{n+1}$, такие что

$$p_0\left(\sum_{N_n}^{M_n} x_i\right) \geqslant a, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Натянем на векторы $\bar{y}_n = \sum_{N_n}^{M_n} \bar{x}_i$ сепарабельное пространство $Y_1 \subset X_0$. Из сходимости ряда (1) следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \bar{x}^*, \bar{y}_n \rangle|$, $(\bar{x}^* \in X_0^*)$. Из этого и из неравенства (4) следует, что последовательность $\bar{y}_n$ сходится слабо, но не сильно к нулю в Y_1. В Y_1 выполнены все условия теоремы 1 работы [2], и поэтому из $\{\bar{y}_n\}_1^\infty$ можно выделить базисную последовательность $\{\bar{z}_i\}_1^\infty$. Так как последовательность $\{\bar{z}_i\}_1^\infty$ базисная, то для любого конечного набора коэффициентов $\{\lambda_i\}_1^n$

$$p_0\left(\sum_1^n \lambda_i z_i\right) = p_0\left(\sum_1^n \lambda_i \bar{z}_i\right) \geqslant p_0(\bar{z}_k) \max_i |\lambda_i| = p_0(z_k) \max_i |\lambda_i| \geqslant a \max_i |\lambda_i|.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть из слабой абсолютной сходимости ряда $\sum_1^\infty x_i$ *не следует его безусловная сходимость.* Тогда существует набор чисел $\varepsilon_i = \pm 1$, для которого $S_n = \sum_1^n \varepsilon_i x_i$ не является последовательностью Коши. Из леммы 1 следует, что в X существуют векторы $\{z_i\}_1^\infty$, для которых выполняются неравенства (2), (3). Натянем на них секвенциально полное пространство $X_1 \subset X$. Определим на плотном множестве пространства c_0 линейное отображение $T : c_0 \to X_1$

$$T\left(\sum_1^n \lambda_i e_i\right) = \sum_1^n \lambda_i z_i.$$

Из неравенства (2) следует, что отображение T непрерывно. Используя секвенциальную полноту X_1 и неравенство (2), определим T по непрерывности на всем c_0. Рассмотрим обратное отображение $T^{-1} : X_1 \to c_0$. Из неравенства (3) следует его однозначность и непрерывность. Следовательно, $X_1 \subset X$ изоморфно c_0. Это противоречие доказывает теорему.

Замечание 1. Теорема 1 остается справедливой, если X заменить на X_β^*, а слабую абсолютную сходимость ряда — на слабую абсолютную сходимость в топологии $\sigma(X^*, X)$ и если X_β^* секвенциально полно.

орема 2. *Если $X_\beta^* \overline{\in} c_0$ и секвенциально полно, то любой оператор из компактен.*

оказательство. Пусть T линейный оператор из X в l_1. Тогда

$$Tx = \{\xi_n(x)\}_1^\infty, \quad \sum_1^\infty |\xi_n(x)| < \infty, \quad x \in X. \tag{5}$$

увидеть, что $\xi_n(x)$ является линейным функционалом из X^*, т. е. $x_n^*(x) = \xi_n(x)$. Из (5) следует, что ряд $\sum_1^\infty x_n^*$ сходится слабо абсолютно в топологии (X^*, X). Согласно замечанию 1 он сходится безусловно в топологии $\beta(X^*, X)$. Рассмотрим поляру M^0 ограниченного множества $M \subset X$. Она является окрестностью нуля в X_β^*. Из безусловной сходимости ряда $\sum_1^\infty x_n^*$ следует его равномерная сходимость по всем $|\varepsilon_n| \leqslant 1$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $N > 0$,

$$\sum_{n \geqslant N} \varepsilon_n x_n^* \subset \varepsilon M^0 \text{ для всех } |\varepsilon_n| \leqslant 1. \tag{6}$$

Следовательно,

$$\sum_{n \geqslant N} |\langle x_n^*, x \rangle| = |\langle \sum_{n \geqslant N} \varepsilon_n(x) x_n^*, x \rangle| < \varepsilon, \quad x \in M.$$

Компактность множества $Tx\ (x \in M)$ вытекает из неравенства

$$\sum_{n \geqslant N} |\xi_n(x)| = \sum_{n \geqslant N} |\langle x_n^*, x \rangle| < \varepsilon, \quad x \in M$$

и из критерия компактности для пространств с базисом.

Теорема 3. *Любой линейный оператор из c_0 в ЛВП $X \overline{\ni} c_0$ является компактным.*

Доказательство. Пусть $Te_n = x_n$, тогда

$$p_\alpha\left(\sum_1^n \varepsilon_i x_i\right) \leqslant C_\alpha \left|\left|\sum_1^n \varepsilon_i e_i\right|\right| = C_\alpha < \infty.$$

Из этого следует слабая абсолютная сходимость ряда $\sum_1^n x_n$, а из теоремы 1 — его безусловная сходимость.

Рассмотрим сеть $x_\beta = T\xi_\beta$ в X, где $||\xi_\beta|| \leqslant 1$, $\xi_\beta = \sum_{i=1}^\infty \xi_{\beta i} e_i \in c_0$. Выберем подсеть $x_\alpha = T\xi_\alpha$, для которой существуют все пределы

$$\operatorname{Lim}_\alpha \xi_{\alpha i} = \xi_{0i}, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Покажем, что сеть x_α сходится сильно в X. Пусть задана окрестность нуля V в X. Из безусловной сходимости ряда $\sum_1^\infty x_n$ и из ограниченности чисел $|\xi_{\alpha i}| \leqslant 1$ следует, что все ряды

$$x_0 = \sum_1^\infty \xi_{0i} x_i, \quad x_\alpha = \sum_{i=1}^\infty \xi_{\alpha i} x_i \tag{8}$$

сходятся безусловно. Отсюда согласно (6) для окрестности U, где $U+U+U\subset V$, существует целое число N, такое что

$$\sum_{i\geq N}\xi_{\alpha i}x_i\subset U,\ \sum_{i\geq N}\xi_{0i}x_i\subset U$$

для всех $|\xi_{\alpha i}|\leq 1$, $|\xi_{0i}|\leq 1$. Выберем окрестность W, такую что $\underbrace{W+W+\ldots W}_{N}\subset U$.

Найдем α_0 такое, что для всех $\alpha>\alpha_0$

$$(\xi_{0i}-\xi_{\alpha i})\,x_i\in W,\ i=1,\ 2,\ldots,\ N.$$

Рассмотрим разность x_0-x_α для всех $\alpha>\alpha_0$

$$x_0-x_\alpha=\sum_{i=1}^{N}(\xi_{0i}-\xi_{\alpha i})\,x_i+\sum_{i\geq N}\xi_{0i}x_i-$$
$$-\sum_{i\geq N}\xi_{\alpha i}x_i\subset U+U+U\subset V.$$

Следовательно, оператор T компактен. Теорема доказана.

Замечание 2. Для рефлексивных пространств Банаха последние две теоремы доказаны И. М. Гельфандом [1]. Для банаховых пространств $X\,\overline{\ni}\,c_0$ теорему 2 можно получить из результатов А. Пелчиньского [6] и теоремы 9. 3. 8 [5]. А если ЛВП X полно и слабо секвенциально полно, теорему 3 можно получить из теорем 9. 3. 8, 9. 4. 11, 9. 16 [5]. Заметим, что если X слабо секвенциально полно, то оно не содержит подпространств, изоморфных c_0.

Определение [1]. *Абстрактная функция $\sigma(t):[0,1]\to X$ называется функцией ограниченной вариации, если вещественные функции $\langle x^*,\ \sigma(t)\rangle$ имеют ограниченную вариацию для любого $x^*\in X^*$.*

И. М. Гельфанд [1] показал, что в слабо полном банаховом пространстве для любой абстрактной функции $\sigma(t)$ ограниченной вариации существуют слабые пределы слева и справа, а если $\sigma(t)$ обладает сильно ограниченной вариацией, то множество ее точек разрыва не более чем счетно. Однако имеет место более сильная теорема, даже, если X — банахово пространство.

Теорема 4. *Если ЛВП $X\,\overline{\ni}\,c_0$, то любая абстрактная функция $\sigma(t):[0,1]\to X$ ограниченной вариации имеет пределы слева и справа в исходной топологии пространства X. Если X обладает счетным тотальным множеством линейных функционалов*[1], *то множество точек разрыва функции $\sigma(t)$ не более чем счетно.*

Доказательство. Покажем сначала, что последовательность $\{\sigma(t_n)\}_1^\infty$ относительно секвенциально компактна при $t_n\to t_0$ (для определенности $t_n<t_0$) Рассмотрим монотонно возрастающую подпоследовательность $\tau_k=t_{n_k}$. Из ограниченности вариации функции $\sigma(t)$ получаем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}[\sigma(\tau_{k+1})-\sigma(\tau_k)]$ сходится слабо абсолютно. Согласно теореме 1 он сходится в исходной топологии пространства X. Значит, существует предел $\lim_{k\to\infty}\sigma(\tau_k)=x(t_0-0)\in X$.

Так как функция $\sigma(t)$ имеет ограниченную вариацию, то для любой последовательности $t_n\to t_0\,(t_n<t_0)$ существует слабый предел $\lim_n\langle x^*,\ \sigma(t_n)\rangle=$ $=\langle x^*,\ x(t_0-0)\rangle$, $x^*\in X^*$. Из этого и из компактности последовательности $\{\sigma(t_n)\}$ получаем, что существует $\lim_n\sigma(t_n)=x(t_0-0)\in X$. Обозначим через $\Omega_x{}^*$ множество точек разрыва функции $\langle x^*,\ \sigma(t)\rangle$ и через $\Omega=\bigcup_{x^*\in\Gamma}\Omega_x{}^*$, где Γ —

[1] Если X — еще и метрическое ЛВП, то область значений $\sigma(t)$ сепарабельна, и тогда всегда существует счетное тотальное к ней множество линейных функционалов.

[сч]етное тотальное множество линейных функционалов из X согласно условию [те]оремы. Так как каждая функция $\langle x^*, \sigma(t)\rangle$ имеет не более чем счетное множество точек разрыва, то Ω — счетное множество. В каждой точке $t_0 \in [0,1] \setminus \Omega$ [су]ществует Г-предел $\lim\limits_n \langle x^*, \sigma(t_n)\rangle = \langle x^*, \sigma(t_0)\rangle$, $x^* \in \Gamma$. Из тотальности множества Γ и из компактности последовательности $\{\sigma(t_n)\}$ следует непрерывность [σ](t) для всех $t \in [0,1] \setminus \Omega$. Теорема доказана.

Пусть $f(t) : [0,1] \to R_1$ — непрерывная числовая функция и $\sigma(t) : [0,1] \to X$ — [аб]страктная функция ограниченной вариации. В работе [1] показано, что если [ба]нахово пространство X слабо полно, то слабый интеграл Римана—Стилтьеса $[R—S]$ принадлежит самому пространству. Оказывается, что имеет место более [об]щий результат.

Теорема 5. *Любая непрерывная функция $f(t)$ $R—S$ интегрируема по абстрактной функции $\sigma(t)$ ограниченной вариации в исходной топологии пространства X. В частности, интеграл Римана—Стилтьеса принадлежит самому пространству.*

Доказательство. Разобьем отрезок $[0,1]$ на части точками $\{t_i\}_1^n$ ($t_1 = 0$, $t_n = 1$). Рассмотрим интегральные суммы Римана—Стилтьеса

$$=S_n \sum^{n-1} f(\xi_i)\,[\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i)],\quad t_i \leqslant \xi_i \leqslant t_{i+1}.$$

Из конечности числа слагаемых следует, что $S_n \in X$. Покажем, что последовательность $\{S_n\}$ фундаментальна, когда $\delta_n \to 0$, где

$$\delta_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |t_{i+1} - t_i|.$$

Так как функция $\sigma(t)$ имеет слабо ограниченную вариацию, то множество $\sum \pm [\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i)]$ слабо ограничено, где t_i — произвольные числа ($t_i < t_{i+1}$). Но в X слабо ограниченные множества сильно ограничены и поэтому

$$\sup p_\alpha \left(\sum \pm [\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i)]\right) \leqslant C_\alpha < \infty,$$

где supremum берется по всем разбиениям отрезка $[0,1]$ точками $\{t_i\}$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Так как функция $f(t)$ равномерно непрерывна, то существует $\mu(\varepsilon, \alpha) > 0$ такое, что

$$|f(t) - f(s)| < \varepsilon C_\alpha^{-1}, \text{ как только } |t - s| < \mu.$$

Пусть S_n, S_m — интегральные суммы с точками разбиения $\{t_i^n\}_1^n$ и $\{t_i^m\}_1^m$ отрезка $[0,1]$ на части соответственно. Обозначим через $\{s_i\}$ все точки первого и второго разбиения, т. е. $\{s_i\} = \{t_i^n\} \cup \{t_i^m\}$. Преобразуем разность

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)\,[\sigma(t_{i+1}^n) - \sigma(t_i^n)] - \sum_{i=1}^{m-1} f(\zeta_i)\,[\sigma(t_{i+1}^m) - \sigma(t_i^m)] =$$

$$= \sum_i f(\theta_i)\,[\sigma(s_{i+1}) - \sigma(s_i)] - \sum_i f(\eta_i)\,[\sigma(s_{i+1}) - \sigma(s_i)] =$$

$$= \sum_i [f(\theta_i) - f(\eta_i)]\,[\sigma(s_{i+1}) - \sigma(s_i)],$$

где $t_i^n \leqslant \xi_i \leqslant t_{i+1}^n$, $t_i^m \leqslant \zeta_i \leqslant t_{i+1}^m$;

$$\theta_i = \xi_k, \text{ если } t_k^n \leqslant s_i < s_{i+1} \leqslant t_{k+1}^n;$$

$$\eta_i = \zeta_k, \text{ если } t_k^m \leqslant s_i < s_{i+1} \leqslant t_{k+1}^m.$$

Выбирая $\max(\delta_n, \delta_m) < 2^{-1}\mu$, имеем

$$p_\alpha(S_n - S_m) \leqslant \sup |f(\theta_i) - f(\eta_i)| \cdot C_\alpha < \varepsilon.$$

Таким образом, последовательность $\{S_n\}$ фундаментальна. Из секвенциальной полноты пространства X вытекает, что

$$\lim_{\delta_n \to 0} S_n = \int_0^1 f(t)\, d\sigma(t) \in X.$$

Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть $f(t): (-\infty, \infty) \to R_1$ — ограниченная непрерывная функция, $\sigma(t): (-\infty, \infty) \to X$ — абстрактная функция ограниченной вариации. Если ЛВП $X \overline{\ni} c_0$, то $f(t)$ $R-S$ интегрируема в исходной топологии пространства X. В частности, интеграл Римана—Стилтьеса принадлежит самому пространству.*

Доказательство. Обозначим через

$$x_n = \int_{b_n}^{a_n} f(t)\, d\sigma(t),$$

где $a_n > 0$, $b_n < 0$, произвольные монотонные последовательности, стремящиеся к ∞ и $-\infty$ соответственно. Согласно теореме 5 функция $f(t)$ $R-S$ интегрируема на отрезке $[b_n, a_n]$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что последовательность x_n сходится в топологии пространства X. Рассмотрим ряд

$$x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n). \tag{9}$$

Из неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \left\langle \int_{b_{n+1}}^{a_{n+1}} f(t)\, d\sigma(t) - \int_{b_n}^{a_n} f(t)\, d\sigma(t),\ x^* \right\rangle \right| \leqslant \sup_{-\infty < t < \infty} |f(t)| \sum_{n=1}^{\infty} [\operatorname*{var}_{a_n \leqslant t \leqslant a_{n+1}} \langle x^*, \sigma(t)\rangle +$$
$$+ \operatorname*{var}_{b_n \leqslant t \leqslant b_{n+1}} \langle x^*, \sigma(t)\rangle] \leqslant \sup_{-\infty < t < \infty} |f(t)| \operatorname*{var}_{-\infty < t < \infty} \langle x^*, \sigma(t)\rangle < \infty,\ x^* \in X^*$$

следует слабая абсолютная сходимость ряда (9). Согласно теореме 1 он сходится. Следовательно, существует предел

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, d\sigma(t) \in X.$$

Теорема доказана.

Следующие примеры показывают, что в теоремах 4,6 выделен максимально широкий класс пространств, для которых справедливы утверждения теорем.

Пример 1. Обозначим через $\{r_n\}_1^\infty$ все рациональные числа отрезка $[0,1]$. Рассмотрим абстрактную функцию $\sigma(t)$ в c_0

$$\sigma(t) = \begin{cases} e_n, & \text{если } t = r_n \\ 0, & \text{если } t \text{ — иррационально.} \end{cases}$$

Функция $\sigma(t)$ имеет ограниченную вариацию, однако она не имеет пределов слева и справа в каждой точке отрезка $[0,1]$.

Пример 2. Рассмотрим в c_0 абстрактную функцию

$$\sigma(t) = \sum_1^\infty u_n(t)\, e_n, \text{ где } u_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > (2n-1)\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{при } t \leqslant (2n-1)\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

Из неравенства

$$\sum_{1}^{n-1} |\langle x^*, \sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i)\rangle| \leqslant \sum_{1}^{\infty} |\xi_i| = \|x^*\|, \; x^* \in l_1$$

видно, что функция $\sigma(t)$ имеет ограниченную вариацию. Функция $f(t) = \sin t$ равномерно непрерывна, ограничена и слабо $R—S$ интегрируема по каждой из функций

$$\int_0^\infty \sin t d\langle x^*, \sigma(t)\rangle = \sum_{1}^{\infty} \xi_n \sin(2n-1)\frac{\pi}{2},$$

где $x^* \in l_1$ $(x^* = \{\xi_n\}_1^\infty)$.

Но слабый $R—S$ интеграл $\int_0^\infty \sin t d\sigma(t) = (1, -1, 1, -1, \ldots)$ не принадлежит c_0.

Автор выражает глубокую благодарность М. И. Кадецу за постановку задач и руководство в процессе их решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Гельфанд. Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren. «Матем. сб.», 4 (46), 1938.

2. М. И. Кадец, А. Пелчиньский. Базисные последовательности, биортогональные системы и нормирующие множества в пространствах Банаха и Фреше. Studia Mathematica, (1965) XXV.

3. A. Pelczynski. On B-spaces containing subspaces isomorphic to the space c_0. Bull. Acad. Polon. Sci. 5:8 (1957).

4. Ю. Б. Тумаркин. О локально выпуклых пространствах с базисом. ДАН СССР, т. 195, № 6, 1970.

5. Р. Эдвардс. Функциональный анализ. Изд-во «Мир», 1969.

6. A. Pelczynski. Projections in certain Banach spaces. Studia Mathematica. (1960) XIX.

Поступила 13 апреля 1971 г.