О ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЯХ С НУЛЯМИ НА ПОЛУПРЯМОЙ. I.

В. Н. Логвиненко

Настоящая работа посвящена решению одной задачи, поставленной Б. Я. Левиным[1]. Задача формулируется следующим образом. Известное утверждение, являющееся частным случаем одной теоремы теории целых функций вполне регулярного роста [1, стр. 125], гласит:

А. *Пусть $f(z)$ — целая функция нецелого порядка, все корни которой суть положительные числа, и пусть для функции $n(t)$, считающей корни $f(z)$, выполняется*

$$n(t) = \Delta t^{\rho} + o(t^{\rho}), \quad t \to \infty. \tag{1}$$

Тогда порядок целой функции равен ρ и имеет место соотношение

$$\ln f(re^{i\theta}) = \frac{\pi\Delta}{\sin\rho\pi} e^{i\rho(\theta-\pi)} + \chi(re^{i\theta}), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \tag{2}$$

где $\chi(re^{i\theta}) = o(r^{\rho})$ при $r \to \infty$ вне некоторого исключительного C^0-множества[2] *равномерно по $\theta \in [0, 2\pi]$.*

Если, сохраняя все прочие условия утверждения А, условие (1) заменить более точным условием

$$n(t) = \Delta t^{\rho} + \Delta_1 t^{\rho_1} + \varphi(t),$$

где ρ — нецелое положительное число, $\rho > \rho_1 > [\rho]$, $\Delta > 0$, а остаточный член $\varphi(t)$ растет при $t \to \infty$ в некотором смысле медленнее, чем t^{ρ_1}, то можно ли гарантировать соответствующее уточнение соотношения (2), т. е. наличие двучленной асимптотики вида

$$\ln f(re^{i\theta}) = \frac{\pi\Delta}{\sin\rho\pi} e^{i\rho(\theta-\pi)} r^{\rho} + \frac{\pi\Delta_1}{\sin\rho_1\pi} e^{i\rho_1(\theta-\pi)} r^{\rho_1} + \psi(re^{i\theta}), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

где $\psi(re^{i\theta}) = o(r^{\rho_1})$ при $r \to \infty$ вне некоторого узкого исключительного множества E (аналога C^0-множества)?

Ответом на этот вопрос служит следующая теорема.

---

[1] Автор выражает глубокую признательность Б. Я. Левину за постановку задачи и внимательное руководство работой и В. Э. Кацнельсону за постоянный интерес к работе и ценные советы.

[2] C^0-множество — это конечное или счетное объединение кружков, таких что сумма радиусов всех кружков, пересекающихся с кругом $\{z : |z| \leqslant R\}$, есть $O(R)$ при $R \to \infty$.

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ — целая функция нецелого порядка, все корни которой положительны, и пусть для функции $n(t)$, считающей ее корни, выполняются условия*

$$n(t) = \Delta t^{\rho} + \Delta_1 t^{\rho_1} + \varphi(t), \tag{3}$$

где ρ — нецелое число, $\rho > \rho_1 > [\rho]$, $\Delta > o$, а для функции $\varphi(t)$ при некотором конечном $q \geqslant 1$ выполняется асимптотическая оценка

$$\int_{T}^{2T} |\varphi(t)|^q \, dt = o(T^{\rho_1 q + 1}), \ T \to \infty. \tag{4}$$

Тогда порядок целой функции $f(z)$ равен ρ, а для функции $\ln f(re^{i\theta})$ при $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ имеет место соотношение

$$\ln f(re^{i\theta}) = \frac{\pi\Delta}{\sin\rho\pi} e^{i\rho(\theta-\pi)} r^{\rho} + \frac{\pi\Delta_1}{\sin\rho_1\pi} e^{i\rho_1(\theta-\pi)} r^{\rho_1} + \psi(re^{i\theta}), \tag{5}$$

причем остаточный член $\psi(re^{i\theta}) = o(r^{\rho_1})$ при $r \to \infty$ вне исключительного множества $E = E_f$ равномерно по $\theta \in [0, 2\pi]$. Это исключительное множество состоит из счетного объединения прямоугольников вида

$$x_n' < \operatorname{Re} z < x_n'', \ |\operatorname{Im} z| < y_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

удовлетворяющих условиям

$$x_n' > 0 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\sum_{x_n' \leqslant R} (x_n'' - x_n') = o(R), \ R \to \infty,$$

$$\sup_{x_n' \leqslant R} y_n = o(R), \ R \to \infty.$$

Если число q, фигурирующее в условии (4), строго больше единицы, то величина $T^{-(\rho_1 q+1)} \int_{T}^{2T} |\psi(re^{i\theta})|^q \, dr$ стремится к нулю при $T \to \infty$ равномерно по $\theta \in [0, 2\pi]$.

Утверждением, обратным в некотором смысле утверждению А, является следующая теорема Титчмарша [1, стр. 601].

Б. *Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ $(0 < \rho < 1)$, все корни которой положительны, и пусть выполняется условие*

$$\ln |f(-r)| = \frac{\pi\Delta}{\sin\rho\pi} r^{\rho} + o(r^{\rho}), \ r \to \infty.$$

Тогда для функции $n(t)$ имеет место асимптотическое соотношение (1).

Естественно предположить, что справедливо такое уточнение теоремы Титчмарша:

В. *Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ $(0 < \rho < 1)$, все корни которой положительны, и пусть выполняется условие*

$$\ln |f(-r)| = \frac{\pi\Delta}{\sin\rho\pi} r^{\rho} + \frac{\pi\Delta_1}{\sin\rho_1\pi} r^{\rho_1} + o(r^{\rho_1}), \ r \to \infty, \tag{6}$$

где $\rho > \rho_1 > 0$. Тогда для функции $n(t)$ имеет место асимптотическое соотношение

$$n(t) = \Delta t^{\rho} + \Delta_1 t^{\rho_1} + o(t^{\rho_1}), \ t \to \infty.$$

Однако, как было показано в работе М. М. Тян [2], это предположение неверно, а именно, при выполнении условий предположения В для функции $n(t)$ является точной асимптотическая оценка

$$n(t) = \Delta t^{\rho} + 0\left(\frac{t^{\rho}}{\ln t}\right), \quad t \to \infty. \tag{7}$$

Оценки, аналогичные оценке М. М. Тян, но полученные при более общих предположениях о порядке целой функции $f(z)$ и о расположении ее корней, составляют содержание ряда работ М. А. Субханкулова и Б. Толбаева [3—5].

Эти авторы исследуют также случай экспоненциального убывания остаточного члена асимптотического соотношения (6) и получают в этом случае точные асимптотические оценки для функции $n(t)$. Основным методом получения оценок в работах [2—5] является метод тауберовых теорем с остаточным членом для преобразования Стильтьеса. Иным способом точность оценки (7) установлена Андерсоном [6].

Если остаточный член в асимптотическом соотношении (6) оценивать в среднем, то вместо этого соотношения, учитывающего поведение функции $\ln|f(z)|$ лишь на отрицательном луче вещественной оси, можно рассмотреть асимптотическую формулу (5) при $\theta = 0, \pi$, т. е. учитывать поведение функции $\ln|f(z)|$ на всей вещественной оси. Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 2. *Пусть $f(z)$ — целая функция, все корни которой положительны, а порядок — нецелое число, заключенное между целыми числами p и $p+1$, и пусть для функции $\ln|f(re^{i\theta})|$ при $\theta = 0, \pi$ имеет место асимптотическое соотношение*

$$\ln|f(re^{i\theta})| = \frac{\pi\Delta\cos\rho(\theta-\pi)}{\sin\rho\pi} r^{\rho} + \frac{\pi\Delta_1\cos\rho_1(\theta-\pi)}{\sin\rho_1\pi} r^{\rho_1} + \psi_1(re^{i\theta}),$$

где $p+1 > \rho > \rho_1 > p$, а функция $\psi_1(x)$ при вещественных x удовлетворяет условию

$$\int\limits_{T<|x|<2T} |\psi_1(x)|^q\,dx = o(T^{\rho_1 q+1}), \quad T \to \infty \tag{8}$$

при некотором $q \geqslant 1$. Тогда функция $n(t)$ имеет вид (3), *причем $\varphi(t) = o(t^{\rho_1})$ при $t \to \infty$ вне исключительного множества нулевой относительной меры*[1]. *Если $q > 1$, то для функции $\varphi(t)$ выполняется условие* (4).

Теорема 3. *Если число α удовлетворяет неравенству $\rho_1 > \alpha > p$, выполняются все условия теоремы 2, кроме условия (8), а это условие заменяется более сильным*

$$\int\limits_{T<|x|<2T} |\psi_1(x)|^q\,dx = o(T^{\alpha q+1}), \quad T \to \infty,$$

где $q \geqslant \max\{1, (\rho-\rho_1)/(\rho_1-\alpha)\}$, то функция $n(t)$ имеет двучленную асимптотику

$$n(t) = \Delta t^{\rho} + \Delta_1 t^{\rho_1} + o(t^{\rho_1}), \quad t \to \infty.$$

Каково поведение функции $\ln f(re^{i\theta})$ на исключительном множестве E, описанном в теореме 1? Ответ на этот вопрос дается следующими двумя теоремами.

Теорема 4. *Пусть $f(z)$ — целая функция, удовлетворяющая условиям теоремы 1. Тогда при любом $y \neq 0$ для остаточного члена $\psi(z)$ соотношения (5) выполняется асимптотическая оценка*

---

[1] Говорят, что измеримое множество A, лежащее на положительном луче вещественной оси, имеет относительную меру α $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$, если $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1} \operatorname{mes}\{A \cap [0, t]\} = \alpha$.

$$\psi(x+iy)=o\left(x^{(\rho_1 q+\rho)/(q+1)}\ln\frac{x^{(\rho_1 q+\rho)/(q+1)-\rho+1}}{|y|}\right),\quad x\to\infty. \tag{9}$$

Асимптотическая оценка (9) точна в следующем смысле: как бы медленно ни стремилась к нулю монотонно убывающая функция $g(x)$, найдется целая функция $f(z)$, удовлетворяющая условиям теоремы 1 и такая, что для остаточного члена соотношения (5) при некотором $y\neq 0$ выполняется

$$\limsup_{x\to\infty}\left\{|\psi(x+iy)|\cdot\left(g(x)\,x^{(\rho_1 q+\rho)/(q+1)}\ln\frac{x^{(\rho_1 q+\rho)/(q+1)-\rho+1}}{|y|}\right)^{-1}\right\}=\infty.$$

Если в соотношении (2) взять вещественные части от обеих частей равенства, то получим соотношение

$$\ln|f(re^{i\theta})|=\frac{\pi\Delta\cos\rho(\theta-\pi)}{\sin\rho\pi}r^{\rho}+\chi_1(re^{i\theta}), \tag{10}$$

где $\chi_1(re^{i\theta})=o(r^{\rho})$ при $r\to\infty$ вне некоторого исключительного C^0-множества. В общей теории функций вполне регулярного роста доказывается, что исключительное C^0-множество соотношения (10) состоит из точек «понижения» [1, стр. 150].

Соотношение, аналогичное соотношению (10), можно получить, переходя к вещественным частям в равенстве (5):

$$\ln|f(re^{i\theta})|=\frac{\pi\Delta\cos\rho(\theta-\pi)}{\sin\rho\pi}r^{\rho}+\frac{\pi\Delta_1\cos\rho_1(\theta-\pi)}{\sin\rho_1\pi}r^{\rho_1}+\psi_1(re^{i\theta}),$$

где $\psi_1(re^{i\theta})=o(r^{\rho_1})$ при $r\to\infty$ вне некоторого исключительного множества E_1, подобного тому, которое описано в формулировке теоремы 1. Однако в этом случае исключительное множество уже не обязательно состоит из точек «понижения». Это замечание и соответствующая теорема, приведенная ниже, принадлежат Б. Я. Левину, с любезного разрешения которого они здесь излагаются.

Теорема 5. *Для любой функции $L(r)$, растущей при $r\to\infty$ медленнее, чем $\ln r$, найдется каноническое произведение $f(z)$, все корни которого положительны, а для считающей корни функции $n(t)$ выполняется асимптотическое соотношение*

$$n(t)=\Delta t^{\rho}+\Delta_1 t^{\rho_1}+o(t^{\rho_1}),\ t\to\infty,$$

такое, что выполняется

$$\limsup_{r\to\infty}\{(\ln|f(r)|-\pi\Delta\operatorname{ctg}\rho\pi\cdot r^{\rho}-\pi\Delta_1\operatorname{ctg}\rho_1\pi\cdot r^{\rho_1})(r^{\rho_1}L(r)^{-1}\}=\infty.$$

Основным инструментом, используемым нами при доказательстве теорем, сформулированных выше, служат две теоремы об интегралах типа Коши по прямой, в известной степени аналогичные следующей теореме Харди — Литтлвуда, которую эти авторы выводят из своей теоремы о максимуме [7].

Теорема 6. *Пусть функция $f(t)\in L^p(-\infty,\infty)$ $(1<p\leqslant\infty)$ и пусть функция $v_f(x+iy)$ определяется равенством*

$$v_f(x+iy)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)\,dt}{(t-x)^2+y^2}\ (y>0).$$

Через $\hat v_f(x)$ обозначим $\sup_{y\geqslant 0}|v_f(x+iy)|$, где под $v_f(x)$ понимаются угловые предельные значения интеграла Пуассона.

Для любого $p\in(1,\infty]$ существует постоянная $C_p<\infty$, такая что

$$\|\hat v_f\|_p\leqslant C_p\|f\|_p.$$

Мы доказываем аналогичные теоремы для интегралов вида

$$f^*(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)\,dt}{t-z}, \tag{11}$$

где функция $f(t)\in L^p(-\infty,\ \infty)$ $(1\leqslant p<\infty)$. Случай, когда $p=\infty$, мы не рассматриваем, так как в пространстве $L^\infty(-\infty,\ \infty)$ существуют функции, для которых интеграл (11) расходится при всех комплексных z (например, $f(t)=\operatorname{sign} t$). На наш взгляд, теоремы эти имеют и самостоятельный интерес.

Сформулируем вначале непосредственный аналог теоремы Харди—Литтлвуда для интегралов типа Коши.

Теорема 7. *Пусть* $f(t)\in L^p(-\infty,\ \infty)$ $(1<p<\infty)$. *Через* $\hat f(x)$ *обозначим величину* $\sup\limits_{y\geqslant 0}|f^*(x+iy)|$, *где под* $f^*(x)$ *понимаются угловые предельные значения интеграла типа Коши. Существует величина* $C_p<\infty$, *зависящая лишь от* p *и такая, что*

$$\|\hat f\|_p\leqslant C_p\|f\|_p.$$

Из теоремы 7 непосредственно вытекает

Следствие 1. *Для* $p\in(1,\ \infty)$ *существует величина* $C_p<\infty$, *зависящая лишь от* p *и такая, что для любой функции* $f\in L^p(-\infty,\ \infty)$ *и для любого числа* $h>0$ *выполняется неравенство*

$$\operatorname{mes}\{x:\hat f(x)>h\}\leqslant C_p\left(\frac{\|f\|_p}{h}\right)^p.$$

Утверждение теоремы 7 и утверждение теоремы Харди—Литтлвуда не выполняются при $p=1$, что легко проверяется в том частном случае, когда функция $f(t)$ есть характеристическая функция любого конечного интервала. Однако более слабое утверждение следствия 1 справедливо и для пространства $L^1(-\infty,\ \infty)$ в следующей форме.

Теорема 8. *Существует постоянная* $C<\infty$, *такая что для любых* $f\in L^1(-\infty,\ \infty)$ *и* $h>0$ *выполняется неравенство*

$$\operatorname{mes}\{x:\hat f(x)>h\}\leqslant C\frac{\|f\|_1}{h}.$$

Под $f^*(x)$ мы, как и раньше, понимаем угловые предельные значения интеграла типа Коши, которые существуют п. в. и в этом случае [8, стр. 304].

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. Гостехиздат, М., 1956.

2. М. М. Тян. Об одном приложении тауберовой теоремы Карлемана—Субханкулова. «Изв. АН УзССР, серия физ.-матем.», № 3, 1963.

3. Б. Толбаев. Об одном применении тауберовых теорем в теории целых функций. ДАН Тадж. ССР, № 10, 1964.

4. М. А. Субханкулов, Е. Толбаев. Распределение нулей некоторых классов целых функций. ДАН Тадж. ССР, № 11, 1964.

5. Б. Толбаев. Уточнение и обобщение одной теоремы Титчмарша о нулях целых функций. «Изв. АН Тадж. ССР, отд. физ.-техн.», № 1 (17), 1965.

6. I. M. Anderson. Integral functions and Tauberian theorems. Duke Math. J., 32, № 4, 1965, 597—606.

7. C. H. Hardy, I. E. Littelewood. A maximal theorem with function—theoretic applications. Acta. Math, 54: 3—4, 1930, 81—116.

8. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, т. II. Изд-во «Мир», 1965.

Поступила 7 апреля 1971 г.