О НЕОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПО ЛЕВИТАНУ ФУНКЦИИ

М. Г. Любарский

Ниже обобщаются для класса почти периодических по Левитану (L п. п.) кций две известные из теории почти периодических (п. п.) функций Г. Бора ремы о неопределенном интеграле и производной п. п. функции. С помощью х результатов решается как в классе п. п., так и в классе L п. п. функций ача Фавара о сопряженной по Коши—Риману функции.

1. Г. Бор, распространяя на класс п. п. функций результаты П. Г. Боля, азал, что неопределенный интеграл п. п. функции является также п. п. кцией в том и только в том случае, если он ограничен на всей оси [1, стр. 29]. мулировку теоремы Боля — Бора можно несколько изменить, а именно, треть ограниченности неопределенного интеграла не на всей оси, а только на тором относительно плотном множестве. Напомним, что множество называ- относительно плотным, если можно указать такое положительное число l, любой интервал длины l содержит по крайней мере одну точку из этого жества.

Новая формулировка теоремы Боля — Бора, тривиально вытекающая из ста-, интересна тем, что она дословно переносится на класс L. п. п. функций.

Теорема 1. *Для того чтобы неопределенный интеграл L. п. п. функции также L п. п. функцией, необходимо и достаточно, чтобы он был огран на некотором относительно плотном множестве.*

Эту теорему, как и все теоремы § 1, достаточно доказать только для действльных функций. Применяя эти теоремы отдельно к мнимой и действительной и, легко установить их справедливость в случае комплекснозначной функции. Кроме того, мы будем рассматривать лишь непериодические функции. В этом ае боровская компактификация оси Ω, отвечающая числовому модулю M

функции $f(t)$ (или просто функции $f(t)$), представляет собою предкомпактную метрическую группу, изоморфную аддитивной группе вещественных чисел[1]. Отображение $x \to p_x$, осуществляющее изоморфизм, непрерывно.

Наши рассуждения будут существенно опираться на следующий факт. Класс L п. п. (п. п.) функций с модулем, принадлежащим модулю M, совпадает с классом непрерывных (равномерно непрерывных) в топологии группы Ω_M функций. Нетривиальная часть этого утверждения (о L п. п. функциях) установлена Б. Я. Левиным [2]. В дальнейшем мы ссылаемся на этот результат как на теорему Б. Я. Левина.

Предварительно докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $f(t)$ — L п. п. функция с модулем, принадлежащим модулю M, и Ω_M — отвечающая этому модулю боровская компактификация оси. Для того чтобы неопределенный интеграл*

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

был L. п. п. функцией с модулем, принадлежащим M, необходимо и достаточно выполнение следующего условия: в группе Ω_M существует окрестность G, в которой неопределенный интеграл ограничен, т. е.

$$\sup_{p_x \in G} |F(x)| < +\infty.$$

Доказательство. Если неопределенный интеграл является L. п. п. функцией с модулем, принадлежащим M, то по теореме Б. Я. Левина функция $F(p_x)$ непрерывна, например, в нуле группы Ω_M, и, следовательно, ограничена в некоторой достаточно малой окрестности нуля.

Таким образом, необходимость условия теоремы 2 доказана. Перейдем к доказательству его достаточности.

Пусть последовательность вещественных чисел $\{\tau_k\}_{k=1, 2, \ldots}$ такова, что $\lim\limits_{k\to\infty} p_{\tau_k} = 0$. Это означает [2, стр. 53], что для любого $N > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{|t|<N} |f(t+\tau_k) - f(t)| = 0. \tag{1}$$

Пусть $g = \inf\limits_{p_x \in G} F(x)$. Из условия теоремы вытекает, что $g > -\infty$. Зададимся некоторым $\varepsilon > 0$. Существует точка $p_z \in G$, такая что

$$F(p_z) < g + \varepsilon. \tag{2}$$

Для значений индекса k, таких что $p_z + p_{\tau_k} \in G$, т. е. начиная с некоторого k_z, рассмотрим разность

$$F(x+\tau_k) - F(x) = F(z+\tau_k) - F(z) +$$

$$+ \int_x^{x+\tau_k} f(t)\,dt - \int_z^{z+\tau_k} f(t)\,dt = F(z+\tau_k) - F(z) + \int_{z+\tau_k}^{x+\tau_k} f(t)\,dt -$$

$$- \int_z^x f(t)\,dt = F(z+\tau_k) - F(z) + \int_z^x [f(t+\tau_k) - f(t)]\,dt.$$

---

[1] Связь между L п. п. функцией, ее числовым модулем и отвечающей этому модулю боровской компактификацией оси подробно выясняется в работе [2].

Так как $p_{z+\tau_k} = p_z + p_{\tau_k} = \in G$, то $F(z+\tau_k) \geqslant g$. Следовательно, при

$$F(z+\tau_k) - F(z) \geqslant g - g - \varepsilon = -\varepsilon.$$

Таким образом, имеем неравенство

$$F(x+\tau_k) - F(x) \geqslant -\varepsilon + \int_z^x [f(t+\tau_k) - f(t)]\, dt. \qquad (3)$$

Выбрав $N = \max\{|x|, |z|\}$, в силу (1) получим

$$\lim_{k\to\infty} [F(x+\tau_k) - F(x)] \geqslant -\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно, то

$$\lim_{k\to\infty} [F(x+\tau_k) - F(x)] \geqslant 0.$$

Аналогично можно показать, что

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} [F(x+\tau_k) - F(x)] \leqslant 0.$$

Из последних двух неравенств делаем вывод

$$\lim_{k\to\infty} [F(x+\tau_k) - F(x)] = 0.$$

Это означает, что функция $F(x)$ непрерывна в каждой точке группы Ω_M и, следовательно, является L. п. п. функцией с модулем, принадлежащим модулю M. Теорема доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 1.

Пусть $f(t)$ — L п. п. функция и Ω_f — отвечающая ей боровская компактификация оси. Для доказательства почти периодичности по Левитану неопределенного интеграла $F(x)$ достаточно в силу теоремы 2 обнаружить его ограниченность в некоторой окрестности $G \subset \Omega_f$.

Пусть D — относительно плотное множество, на котором по условию теоремы ограничен неопределенный интеграл:

$$\sup_{z\in D} |F(z)| = N < +\infty.$$

Буквой l обозначим такое положительное число, что любой интеграл длины l обязательно содержит по крайней мере одну точку из множества D.

Рассмотрим отрезок $\{x : |x| \leqslant l/2\}$. Образ этого отрезка при непрерывном отображении $x \to p_x$ оси в группу Ω_f есть компактное множество. Обозначим его E. Каждой точке этого множества сопоставим окрестность нуля $G_x \subset \Omega_f$ такую, что колебание функции $f(x)$ в этой окрестности не превосходит единицы. Это можно сделать, так как по теореме Б. Я. Левина функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке группы Ω_f. В силу компактности множества E из бесконечного покрытия $\{G_x\}_{|x|\leqslant l/2}$ можно выбрать конечное. Обозначим буквой G окрестность нуля, являющуюся пересечением всех окрестностей, составляющих это конечное покрытие. Очевидно, функция $f(x)$ ограничена на множество $G+E$:

$$\sup_{p_t\in G+E} |f(t)| \leqslant N + 1.$$

Покажем теперь, что неопределенный интеграл $F(x)$ ограничен в окрестности G. Пусть $p_x \in G$. Выберем точку $z \in D$, находящуюся от точки x на расстоянии, не большем, чем $l/2$. Легко видеть, что образ отрезка $[x, z]$ при отображении $x \to p_x$ принадлежит множеству $G \dotplus E$. Поэтому

$$| F(x) | \leqslant | F(z) | \dotplus | F(x) - F(z) | =$$
$$= | F(z) | + \left| \int_x^z f(t)\, dt \right| \leqslant N + l/2 (N \dotplus 1).$$

Достаточность условий теоремы 1 доказана. Необходимость этих условий вытекает из теоремы 2 и того факта, что множество точек вещественной оси, открытое в топологии некоторой боровской компактификации оси, является относительно плотным.

Из доказательства теоремы 1 вытекает, что если неопределенный интеграл $F(x)$ является L п. п. функцией, то он ограничен в некоторой окрестности $G \subset \Omega_f$. Из теоремы 2 следует, что в таком случае модуль неопределенного интеграла принадлежит модулю подынтегральной функции $M_F \subset M_f$.

Мы доказали следующую теорему:

Теорема 3. *Пусть функция $f(t)$ и ее неопределенный интеграл $F(x)$ являются почти периодическими по Левитану. Тогда модуль функции $f(t)$ содержит модуль неопределенного интеграла $M_f \supset M_F$.*

Теорема 4. *Пусть $F(t)$ — L п. п. функция с модулем, принадлежащим модулю M,— имеет конечную производную $f(t)$ в каждой точке оси. Для того чтобы функция $f(t)$ была также почти периодической по Левитану с модулем, принадлежащим M, необходимо и достаточно следующее: каждой паре чисел $\varepsilon > 0$ и $x\ (-\infty < x < +\infty)$ отвечает окрестность нуля $U \subset \Omega_M$* и *число $\delta > 0$, такие что*

$$\sup_{p_t \in p_x + U} | f(t \dotplus \Delta t) - f(t) | < \varepsilon,$$

как только $|\Delta t| < \delta$.

Доказательство. Введем обозначение для разностного отношения

$$R(t, \Delta t) = \frac{F(t \dotplus \Delta t) - F(t)}{\Delta t}.$$

По теореме Лагранжа существует число $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, зависящее от t и Δt, такое что

$$R(t, \Delta t) = f(t \dotplus \theta \cdot \Delta t).$$

Таким образом выполняется равенство

$$R(t, \Delta t) - f(t) = f(t \dotplus \theta \cdot \Delta t) - f(t).$$

Поэтому, если $|\Delta t| < \delta$, то из условий теоремы вытекает, что для некоторой окрестности нуля $U \subset \Omega_M$ выполнено неравенство

$$\sup_{p_t \in p_x + U} | R(t, \Delta t) - f(t) | < \varepsilon.$$

Функция $R(t, \Delta t)$ при любом Δt непрерывна в каждой точке группы Ω_M. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ функция $f(t)$ также является непрерывной. В противном случае для достаточно малых ε последнее неравенство не выполнялось бы ни для какой окрестности нуля U.

По теореме Б. Я. Левина функция $f(t)$ является почти периодической по Левитану. Отвечающий ей числовой модуль принадлежит модулю M.

Мы установили достаточность условия теоремы. Его необходимость прямо следует из теоремы Б. Я. Левина.

Теорема 5. *Если условия теоремы 3 выполнены, то и модуль функции* $f(t)$ *совпадает с модулем неопределенного интеграла:*

$$M_f = M_F.$$

Доказательство. Мы уже показали в теореме 3, что $M_f \supset M_F$. По теореме Б. Я. Левина, функции $f(t)$ и $F(t)$ непрерывны в каждой точке группы Ω_f. Мы рассмотрим так называемые «нижние допределения» этих функций на пополнение группы Ω_f, которое будем обозначать T_f:

$$\underline{f}(p) = \underline{\lim}_{p_t \to p} f(t);\quad \underline{F}(p) = \underline{\lim}_{p_{\bar{t}} \to p} F(t),$$

$$(p \in T_f)$$

Известно [2], что

$$T_F = \frac{T_f}{H_F},$$

где H_F — замкнутая подгруппа периодов нижнего доопределения $\underline{F}(p)$. Поэтому, если мы докажем, что $H_F = \{0\}$, то $T_f = T_F$ и, значит, $\Omega_f = \Omega_{\overline{F}}$. Отсюда, конечно, следует, что модули функций $f(t)$ и $F(t)$ совпадают. Отметим также, что из равенства $T_f = \dfrac{T_f}{H_f}$ вытекает, что $H_f = \{0\}$.

Пусть $h \in T_f$ — период функции $\underline{F}(p)$ и, значит, функции $\underline{R}(p, \Delta t)$. Напомним, что $R(t, \Delta t)$ — *обозначение, введенное при доказательстве теоремы 4 для разностного отношения* $\dfrac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t}$. Там же мы показали, что каждому $\varepsilon > 0$ и произвольной точке $p_x \subset \Omega_f$ отвечают окрестность нуля $U \subset \Omega_f$ и число $\delta > 0$, такие что при $|\Delta t| < \delta$ выполнено неравенство

$$\sup_{p_t \in p_x + U} |R(t, \Delta t) - f(t)| < \varepsilon.$$

Обозначим через $\overset{\circ}{\overline{U}}$ внутренность замыкания окрестности U в группе T_f.

Очевидно, при $|\Delta t| < \delta$ выполнено неравенство

$$\sup_{p \in p_x + \overset{\circ}{\overline{U}}} |\underline{R}(p, \Delta t) - \underline{f}(p)| < \varepsilon.$$

Пусть $p_z \in \Omega_f$ — такая точка, что $p_z \in \overset{\circ}{\overline{U}} + p_x + h$. Легко видеть, что

$$|f(z) - \underline{f}(p_z - h)| \leqslant |f(z) - R(z, \Delta t)| +$$
$$+ |\underline{R}(p_z - h, \Delta t) - \underline{f}(p_z - h)| \leqslant |f(z) - R(z, \Delta t)| + \varepsilon.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем

$$|f(z) - \underline{f}(p_z - h)| \leqslant \varepsilon.$$

Как нетрудно показать, функция $\underline{f}(p)$ непрерывна в точке p_x. Поэтому в силу произвольности $\varepsilon > 0$

$$\lim_{p_z \to p_x + h} f(z) = \underline{f}(p_x).$$

Это означает, что

$$\underline{f}(p_x + h) = \underline{f}(p_x).$$

Легко проверить, что для нижнего доопределения любой L п. п. функции с модулем, принадлежащим модулю M, выполнено

$$\lim_{s \to p} \underline{f}(s) = \underline{f}(p) \quad (s,\ p \in T_f).$$

Из последних двух равенств вытекает, что

$$\underline{f}(p+h) \leqslant \underline{f}(p).$$

Применив предыдущие рассуждения для $-h$, получим

$$\underline{f}(p+h) \geqslant \underline{f}(p).$$

Таким образом, h есть период нижнего доопределения функции $f(t)$ и, значит, равняется нулю.

Теорема доказана.

Теперь мы можем уточнить теоремы 1 и 4 в том смысле, что при выполнении условий этих теорем модуль неопределенного интеграла в первом случае и производной во втором совпадает с модулем исходной функции.

§ 2. Результаты § 1 позволят нам решить следующую интересную задачу, поставленную Фаваром [3].

Пусть $u(z)$ — гармоническая п. п. функция [1, стр. 373] в некоторой полосе $\{z : a < \operatorname{Im} z < b\}$. Как известно, существует единственная с точностью до константы гармоническая функция $v(z)$, сопряженная к функции $u(z)$ в этой полосе, определяемая уравнениями Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Возникает вопрос, будет ли функция $v(z)$ также почти периодической в этой полосе, и если будет, то как отвечающий ей числовой модуль связан с модулем функции $u(z)$.

Фавар установил достаточные условия, при которых гармонической п. п. функции в верхней полуплоскости в качестве сопряженной по Коши — Риману отвечает п. п. в верхней полуплоскости функция. Мы не будем останавливаться на этом условии, отметим только, что оно не является необходимым.

Кроме того, Фавар установил необходимые условия, справедливые для любой полосы. Это условие состоит в том [1, стр. 382], что существует число $y_0 \in (a, b)$, для которого выполнено

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial u}{\partial y}(iy_0 + x)\, dx = 0.$$

Оказывается, что немного более сильное требование, а именно,

$$\sup_{-\infty < T < +\infty} \left| \int_0^T \frac{\partial u}{\partial y}(iy_0 + x)\, dx \right| < +\infty$$

является не только необходимым, но и достаточным.

Задачу Фавара можно ставить и в классе L п. п. функций. Прежде чем начать решать ее, дадим определение гармонических п. п. и L п. п. функций.

Определение 1. *Гармоническую в полосе $\{z : a < \operatorname{Im} z < b\}$ функцию $u(z)$ будем называть п. п. (L п. п.) функцией в этой полосе с модулем, принадлежащим некоторому модулю M, если для любого $\delta > 0$ семейство функций*

$$\{u_y(x) = u(iy + x)\}_{a+\delta \leqslant y \leqslant b-\delta} \tag{1}$$

равностепенно равномерно непрерывно (равностепенно непрерывно) в топологии боровской компактификации оси — Ω_M, отвечающей модулю M.

Определение 2. *Наименьший модуль M, такой что при любом $\delta > 0$ семейство (1) равностепенно равномерно непрерывно (равностепенно непрерывно) в топологии группы Ω_M, будем называть модулем функции $u(z)$ в полосе $\{z: a < \operatorname{Im} z < b\}$ и обозначать символом M_u.*

Из теоремы Б. Я. Левина следует, что каждая функция из семейства (1) является почти периодической (почти периодической по Левитану) и отвечающий ей модуль M_y, принадлежит модулю M_u.

Теорема 6. *Пусть $u(z)$ — гармоническая п. п. (L. п. п.) функция в полосе $\{z: a < \operatorname{Im} z < b\}$ с модулем M_u. Для того чтобы сопряженная по Коши—Риману функция $v(z)$ была также почти периодической (почти периодической по Левитану), необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $y_0 \in (a, b)$, что неопределенный интеграл*

$$\int_0^x \frac{\partial u}{\partial y}(iy_0 + t)\, dt$$

ограничен на некотором относительно плотном множестве. При этом модуль функции $v(z)$ совпадает с модулем функции $u(z)$: $M_v = M_u$.

Доказательству теоремы предпошлем лемму.

Лемма 1. *Если $u(z)$ — гармоническая п. п. (L п. п.) функция в полосе $\{z: a < \operatorname{Im} z < b\}$, то частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ суть также гармонические почти периодические (почти периодические по Левитану) функции в этой полосе. Их модули принадлежат модулю функции $u(z)$*

Доказательство. Для п. п. функций это утверждение доказано Фаваром [1, стр. 376]. Остается доказать его для L п. п. функций.

Введем в рассмотрение множество в комплексной плоскости

$$A_{G,\,\delta,\,x} = \{z: p_{\operatorname{Re} z} \in p_x + G;\ a + \delta < \operatorname{Im} z < b - \delta\},$$

где G — некоторая окрестность нуля группы Ω_u, $\delta > 0$ и $x\ (-\infty < x < +\infty)$ — постоянные числа.

Из почти периодичности функции $u(z)$ по Левитану следует, что, каковы бы ни были числа $\delta > 0$ и x, существует такая окрестность нуля G, что функция $u(z)$ ограничена на множестве $A_{G,\,\delta,\,x}$. Частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, которые как известно, являются гармоническими функциями, ограничены на любом множестве, компактно вложенном в $A_{G,\,\delta,\,x}$. Это легко проверить, дифференцируя интеграл Пуассона функции $u(z)$ Напомним, еще, что по определению множество A называется компактно вложенным в множество B, если $A \subset B$ и расстояние между A и границей B отлично от нуля.

Если окрестность нуля G_0 компактно вложена в G и $\delta_0 > \delta$, то в силу равномерной непрерывности отображения $x \to p_x$ вещественной оси в группу Ω_u множество $A_{G_0,\,\delta_0,\,x}$ компактно вложено в множество $A_{G,\,\delta,\,x}$. Таким образом, частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ ограничены на множестве $A_{G_0,\,\delta_0,\,x}$. Очевидно, последнее утверждение справедливо для частных производных всех порядков. Отсюда мы можем заключить, что производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ равномерно непрерывны по совокупности переменных в каждой точке множества $A_{G_0,\,\delta_0,\,x}$. По определению производной

$$\frac{\partial u}{\partial y}(iy + t) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(t,\ y + \Delta y) - u(t,\ y)}{\Delta y}.$$

Будем рассматривать обе части равенства как функции, определенные на группе Ω_u. Получим

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_y (t) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u_{y+\Delta y}(t) - u_y(t)}{\Delta y}.$$

Если мы покажем, что предел достигается равномерно при $p_t \in p_x + G_0$ и $y \in (a+\delta,\ b-\delta)$, то мы тем самым докажем, что семейство функций $\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_y (t)\right\}_{a+\delta \leqslant y \leqslant b-\delta}$ равностепенно непрерывно в топологии Ω_u. Так как $\delta > 0$ было выбрано произвольно, то по определению 1 функция $\frac{\partial u}{\partial y}(z)$ является *почти периодической по Левитану с модулем, принадлежащим модулю* M_u.

По теореме Лагранжа существует число $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, такое что

$$\frac{u(t,\ y+\Delta y) - u(t,\ y)}{\Delta y} = \frac{\partial u}{\partial y}(t,\ y + \theta \cdot \Delta y).$$

Поэтому необходимая нам равномерность следует из равенства

$$\frac{u(t,\ y+\Delta y) - u(t,\ y)}{\Delta y} - \frac{\partial u}{\partial y}(t,\ y) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial y}(t,\ y + \theta \cdot \Delta y) - \frac{\partial u}{\partial y}(t,\ y)$$

и равномерной непрерывности функции $\frac{\partial u}{\partial y}(z)$ на множестве $A_{G_0,\ \delta_0,\ x}$.

Аналогично можно показать, что частная производная $\frac{\partial u}{\partial x}$ *также является* L п. п. функцией в полосе $\{z : a < \operatorname{Im} z < b\}$ с модулем, принадлежащим модулю M_u. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 6. Из уравнения Коши—Римана

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

вытекает, что

$$v_y(x) - v_y(0) = -\int_0^x \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_y (t)\, dt. \qquad (2)$$

$$y \in (a,\ b)$$

Мы представили функцию $v_y(x)$ в виде неопределенного интеграла п. п. (L. п. п.) функции. Поэтому необходимость условий теоремы 6 сразу вытекает в случае п. п. функции из теоремы Боля—Бора, а в случае L п. п. функции — из теоремы 1. Отметим еще, что числовой модуль функции $v_y(x)$ при $y \in (a,\ b)$ совпадает с числовым модулем функции $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_y (t)$ (теорема 5) и, следовательно принадлежит модулю M_u. Это означает (см. определение 2), что $M_v \subset M_u$. Таким образом, из предположения почти периодичности (почти периодичности по Левитану) двух сопряженных функций $u(z)$ и $v(z)$ вытекает, что $M_v \subset M_u$. Поскольку функции $v(z)$ в качестве сопряженной по Коши—Риману отвечает функция — $u(z)$, то $M_{-u} \subset M_v$. Очевидно, числовые модули функций $u(z)$ и $-u(z)$ совпадают. Поэтому $M_v = M_u$.

Перейдем к доказательству достаточности условия теоремы 1 для класса п. п. функций. Предположим, что неопределенный интеграл $\int\limits_0^x \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y_0}(t)\,dt$ ограничен на некотором относительно плотном множестве. Из леммы этого параграфа следует, что функция $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y_0}(t)$ является почти периодической и, следовательно, ограниченной. Из ограниченности этого неопределенного интеграла на относительно плотном множестве вытекает его ограниченность на всей оси. По теореме Боля—Бора функция $v_{y_0}(x)$, определяемая равенством (2) при $y = y_0$, также есть почти периодическая.

Зададимся произвольным $\delta > 0$ и покажем, что в полосе $\{z : a + \delta \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b - \delta\}$ функция $v(z)$ ограничена. Очевидно, что

$$v(iy + x) = v(iy_0 + x) + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial v}{\partial y}(is + x)\,ds = v(iy_0\, x) + + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(is + x)\,ds.$$

Переходя к нашим обозначениям, получаем

$$v_y(x) = v_{y_0}(x) + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(is + x)\,ds. \tag{3}$$

Частная производная $\frac{\partial u}{\partial x}(z)$, как мы уже установили, является гармонической п. п. функцией в полосе $\{z : a < \operatorname{Im} z < b\}$ и, следовательно, ограничена в каждой компактно вложенной полосе $\{z : a + \delta \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b - \delta;\ \delta > 0\}$. Таким образом, второе слагаемое в правой части равенства (3) ограничено. Ограниченность первого слагаемого мы доказали, установив его почти периодичность.

Итак, мы выяснили, что функция $v(z)$ ограничена в полосе $\{z : a + \delta \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b - \delta\}$ при любом $\delta > 0$. Из теоремы Боля—Бора следует, что каждая функция семейства $\{v_y(x)\}_{a<y<b}$ является почти периодической. Отвечающий ей числовой модуль принадлежит модулю M_u. Это означает, что каждая функция этого семейства непрерывна в топологии боровской компактификации оси Ω_u. Остается доказать (см. определение 1) равностепенную непрерывность семейства функций $\{v_y(x)\}_{a+\delta\leqslant y\leqslant b-\delta}$ в топологии группы Ω_u при любом $\delta > 0$.

Легко проверить, что теорема Фрагмена—Линделефа [1, стр. 374] для полосы справедлива в классе гармонических функций. Даже более: если $v(z)$ — гармоническая в полосе $\{z : a' < \operatorname{Im} z < b'\}$ и непрерывная в замкнутой полосе $\{z : a' \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b'\}$ функция и на прямых $\{z : \operatorname{Im} z = a'\}$ и $\{z : \operatorname{Im} z = b'\}$ выполнено неравенство

$$m_1 \leqslant v(z) \leqslant m_2,$$

то это же неравенство выполнено во всей полосе.

Применив эту теорему к функции $v(z + \tau) - v(z)$ в полосе $\{z : a + \delta \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b - \delta\}$, мы получим, что любое ε-смещение функций $v_{a+\delta}(x)$ и $v_{b-\delta}(x)$ является ε-смещением каждой функции из семейства $\{v_y(x)\}_{a+\delta\leqslant y\leqslant b-\delta}$. Таким образом, семейство $\{v_y(x)\}_{a+\delta\leqslant y\leqslant b-\delta}$ является равностепенно равномерно непрерывным в топологии группы Ω_u.

Теорема 1 доказана для класса п. п. функций.

Доказательство достаточности условий теоремы 1 для L п. п. функций проводится по той же схеме, что и для п. п. функций. Предположим, что условие теоремы выполнено, т. е. неопределенный интеграл $\int\limits_0^x \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y_0}(t)\,dt$ ограничен на некотором относительно плотном множестве. По теореме 1 § 1 функция $v_{y_0}(x)$, удовлетворяющая равенству (2) при $y = y_0$, является почти периодической по Левитану как неопределенный интеграл от L п. п. функции $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y_0}(t)$. Из теоремы 5 § 1 следует, что числовой модуль, отвечающий неопределенному интегралу, совпадает с модулем подынтегральной функции. Значит, модуль функции $v_{y_0}(x)$ принадлежит модулю M_u. В этом случае, как это следует из теоремы Б. Я. Левина, функция $v_{y_0}(t)$ непрерывна в каждой точке p_x группы Ω_u и, следовательно, ограничена в некоторой достаточно малой окрестности этой точки. Более подробно: какова бы ни была точка $p_x \in \Omega_u$, существует окрестность нуля $G_x \in \Omega_u$, такая что

$$\sup_{p_t \in p_x + G_x} |v_{y_0}(t)| < +\infty.$$

Мы покажем сейчас, что этим свойством равностепенно по $a + \delta \leqslant y \leqslant b - \delta$, где $\delta > 0$ произвольное число, обладают все функции семейства $\{v_y(t)\}_{a+\delta \leqslant y \leqslant b-\delta}$.

Из леммы этого параграфа следует, что функция $\frac{\partial u}{\partial x}(z)$ является почти периодической по Левитану с модулем, принадлежащим модулю M_u. Отсюда можем заключить, что каждому числу $\delta > 0$ и любой точке $p_x \in \Omega_u$ отвечает окрестность нуля $G^0_{x,\delta}$, такая что

$$\sup_{a+\delta \leqslant y \leqslant b-\delta} \ \sup_{p_t \in p_x + G^0_{x,\delta}} \left|\frac{\partial u}{\partial x}(iy + t)\right| < +\infty.$$

Поэтому, исходя из равенства (3), можно сделать вывод: при любом $\delta > 0$ выполнено неравенство

$$\sup_{a+\delta \leqslant y \leqslant b-\delta} \ \sup_{p_t \in p_x + G_x \cap G^0_{x,\delta}} |v_y(t)| < +\infty. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь аналитическую в нашей полосе функцию $f(z) = u(z) + iv(z)$. Ее реальная часть по условию является почти периодической по Левитану функцией с модулем M_u. Поэтому каждому $\delta > 0$ и любой точке $p_x \in \Omega_u$ отвечает окрестность нуля $G^{\perp}_{x,\delta}$, такая что

$$\sup_{a+\delta \leqslant y \leqslant b-\delta} \ \sup_{p_t \in p_x + G^{\perp}_{x,\delta}} |u_y(t)| < +\infty.$$

Объединяя это неравенство с неравенством (4), получаем

$$\sup_{a+\delta \leqslant y \leqslant b-\delta} \ \sup_{p_t \in p_x + G \cap G^{\circ} \cap G^{\perp}} |u_y(t) + iv_y(t)| < +\infty.$$

Если воспользоваться обозначением, введенным при доказательстве леммы, то

$$\sup_{z \in A_{G \cap G^0 \cap G^1,\, \delta,\, x}} |f(z)| = N < +\infty.$$

Из непрерывности отображения $t \to p_t$, осуществляющего изоморфизм между вещественной осью и группой Ω_u, следует, что существует число $\alpha > 0$, такое что образ отрезка $[-\alpha, \alpha]$ при этом отображении принадлежит окрестности для $G \cap G^0 \cap G^1$.

Значит, прямоугольник

$$I_{\alpha,\, b-\delta} = \{z : \operatorname{Re} z \in [x-\alpha,\ x+\alpha];\ \operatorname{Im} z \in [y_0,\ b-\delta]\}$$

принадлежит множеству $A_{G \cap G^0 \cap G^1,\ \delta,\ x}$ и, следовательно,

$$\sup_{z \in I_{\alpha,\, b-\delta}} |f(z)| \leqslant N.$$

Так как операция сложения *непрерывна в топологии группы* Ω_u, *существует* такая окрестность нуля D этой группы, что образы отрезков $[-\alpha+\tau,\ \alpha+\tau]$ также принадлежат $G \cap G^0 \cap G^1$, если $p_\tau \in D$. Поэтому при $p_\tau \in D$

$$\sup_{z \in I_{\alpha,\, b-\delta}} |f(z+\tau)| \leqslant N. \tag{5}$$

Построим гармоническую меру $\omega(z)$ отрезка $\{z : \operatorname{Re} z \in [x-\alpha,\ x+\alpha];\ \operatorname{Im} z = y_0\}$ относительно этого прямоугольника. По теореме «о двух константах» [4, стр. 343] выполнено неравенство

$$\ln|f(z+\tau) - f(z)| \leqslant \omega(z) \sup_{t \in [x-\alpha,\ x+\alpha]} \ln|f_{y_0}(t+\tau) - f_{y_0}(t)| +$$
$$+ [1-\omega(z)] \cdot \sup_{z \in I_{\alpha,\, b-\delta}} \ln|f(z+\tau) - f(z)|\ (z \in I_{\alpha,\, b-\delta}).$$

Предположим, что последовательность чисел $\{\tau_k\}_{k=1,\,2,\,\ldots}$ такова, что $p_{\tau_k} \to 0$ в топологии группы Ω_u. Начиная с некоторого значения индекса k, все точки p_{τ_k} принадлежат окрестности нуля D. Для этих точек справедливо неравенство (5). Получим

$$\ln|f(z+\tau_k) - f(z)| \leqslant \omega(z) \cdot \sup_{t \in [x-\alpha,\ x+\alpha]} \ln|f_{y_0}(t+\tau_k) - f_{y_0}(t)| + \ln 2N.$$

Пусть ω — нижняя грань значений гармонической меры $\omega(z)$ на множестве

$$J_{b-2\delta} = \{z : \operatorname{Re} z = x;\ \operatorname{Im} z \in [y_0,\ b-2\delta]\}.$$

Из принципа максимума для гармонических функций вытекает, что $\omega > 0$.

Вещественная и мнимая части функции $f_{y_0}(t) = u_{y_0}(t) + i \cdot v_{y_0}(t)$ являются, как мы выяснили, почти периодическими по Левитану функциями. Их модули принадлежат модулю M_u. В силу теоремы Б. Я. Левина функции $u_{y_0}(t)$ и $v_{y_0}(t)$ непрерывны в топологии боровской компактификации оси Ω_u. Поэтому при всех вещественных t разность $f_{y_0}(t+\tau_k) - f_{y_0}(t)$ стремится к нулю. Нетрудно показать, что этот предел достигается равномерно на любом компакте.

Для тех значений индекса k, для которых

$$\sup_{t \in [x-\alpha,\ x+\alpha]} \ln|f_{y_0}(t+\tau_k) - f_{y_0}(t)| < 0,$$

выполнено неравенство

$$\sup_{z \in I_{b-2\delta}} \ln|f(z+\tau_k) - f(z)| \leqslant \omega \sup_{t \in [x-\alpha,\ x+\alpha]} \ln|f_{y_0}(t+\tau_k) - f_{y_0}(t)| + \ln 2N.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{y \in [y_0,\ b-2\delta]} |f_y(x+\tau_k) - f_y(x)| = 0.$$

Отделяя мнимую часть, получаем

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{y\in[y_0,\ b-2\delta]} | v_y(x+\tau_k) - v_y(x) | = 0.$$

Аналогично можно показать, рассматривая прямоугольник $I_{a,\ a+\delta}$, что

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{y\in[a+2\delta,\ y_0]} | v_y(x+\tau_k) - v_y(x) | = 0.$$

Так как $\delta > 0$ и x были выбраны произвольно, мы можем заключить, что семейство функций $\{v_y(t)\}_{a+\delta\leqslant y\leqslant b-\delta}$ при любом $\delta > 0$ равностепенно непрерывно в каждой точке группы Ω_u. Следовательно функция $v(z)$ является почти периодической по Левитану. Теорема полностью доказана.

Автор выражает благодарность Б. Я. Левину и М. И. Кадецу за постоянный интерес к работе и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Левитан. Почти периодические функции. ГИТТЛ, 1953.
2. Б. Я. Левин. О почти периодических функциях Левитана. «Укр. матем. журн.» 1949, № 1.
3. Favard J. Leçons sur les fonctions presque pèriodiques. Paris (1933).
4. М. А. Евграфов. Аналитические функции. Изд-во «Наука», 1968.

Поступила 4 апреля 1971 г.