О СТРУКТУРЕ БИСИММЕТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В. И. Годич, И. Е. Луценко

Инволюцией или оператором комплексного сопряжения называется отображение J гильбертова пространства H на себя, удовлетворяющее условиям $(Jf,\ Jg) = \overline{(f,\ g)} = (g,\ f)$, $J^2 = I$ (I — единичный оператор) [1]. Линейный оператор T называется J-вещественным, если $JTJ = T$ [1], и J-мнимым, если $JTJ = -T$ [2]. Если оператор T одновременно является J_1-вещественным и J_2-мнимым, он называется $(J_1,\ J_2)$-бисимметричным [2].

Пример. *Оператор одностороннего сдвига* $Ve_n = e_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots, e_n$ — о. н. б.) *бисимметричен*: если $J_1 e_k = e_k$, $J_2 e_k = (-1)^k e_k$, то $J_1 V J_1 = V$, $J_2 V J_2 = -V$. Заметим, что оператор V неприводим (не распадается в ортогональную сумму), а унитарный оператор $U = J_1 \cdot J_2$ имеет спектр, состоящий только из двух точек.

Теорема 1. *Если T — ограниченный линейный $(J_1,\ J_2)$-бисимметричный оператор, а спектр оператора $U = J_1 J_2$ состоит более чем из двух точек, то $T = T_1 \oplus T_2$, где T_1 и T_2 — также $(J_1,\ J_2)$-бисимметричные операторы.* Здесь не исключается случай тривиального разложения, когда один из операторов T_1 или T_2 есть нулевой оператор в ненулевом пространстве.

Для доказательства заметим, что унитарный оператор U^2 коммутирует с оператором T и имеет спектр, состоящий более чем из одной точки, поэтому если $E(\varphi)$ — спектральная функция U^2, то существует такое φ, что $0 < E(\varphi) < I$. Но $E(\varphi)$ коммутирует с T, откуда $H_1 = E(\varphi) H$ — нетривиальное подпространство, приводящее T. Кроме того, $J_k U^2 J_k = (U^2)^*$ $(k = 1, 2)$, так что $J_k E(\varphi) J_k = E(\varphi)$ [3], т. е. H_1 приводит и операторы J_1, J_2, что и доказывает теорему.

Если оператор T $(J_1,\ J_2)$ — бисимметричен, то унитарный оператор $U = J_1 J_2$ связан с T условием $UT = -TU$. Докажем утверждение.

Лемма. *Если $E(\varphi)$ — спектральная функция (разложение единицы) унитарного оператора U, а $UT = -TU$, то*

$$TE(\varphi) = [E(\pi + \varphi) - E(\varphi)]\, T. \tag{1}$$

Для доказательства леммы заметим, что $E(\varphi) = \lim_{n\to\infty} p_n(U)$, где $p_n(e^{it}) = \sum_k c_{nk} e^{ikt} \to S(\varphi)$ — сходящаяся к характеристической функции отрезка $[0,\ \varphi]$ последовательность тригонометрических полиномов. Тогда $S(\pi + \varphi) = \hat{S}(\varphi)$ — характеристическая функция отрезка $[\pi,\ \pi + \varphi]$ — является пределом последовательности

$$\hat{p}_n(e^{ikt}) = p_n(e^{ik(t+\pi)}) = \sum_k c_{nk} (-1)^k e^{ikt},$$

а последовательность операторов $\hat{p}_n(U)$ сходится к $E(\pi + \varphi) - E(\pi)$. С другой стороны, $TU^n = (-U)^n T$, поэтому $Tp_n(U) = \hat{p}_n(U)\, T$, откуда, переходя к пределу, получим (1).

Теорема 2. *Для того чтобы ограниченный линейный оператор T был бисимметричен, необходимо и достаточно, чтобы:*

1) *T был J-вещественным оператором;*
2) *$H = H_1 \oplus H_2$, где $JH_1 = H_1$, $JH_2 = H_2$,*
3) *$TH_1 \subset H_2$, $TH_2 \subset H_1$.*

Докажем достаточность. Зададим инволюцию J_3 условиями $J_3 \mid H_1 = J \mid H_1$, $J_3 \mid H_2 = -J \mid H_2$. Тогда $J_3 T J_3 = -T$ (J и J_3 перестановочны: $JJ_3 = J_3 J$).

Переходя к доказательству необходимости теоремы, положим: $E(\varphi)$ — спектральная функция $U = J_1 J_2$, $P_1 = E(\pi)$, $P_2 = I - P_1$. Тогда в силу леммы получим $TP_1 = P_2T$, $TP_2 = P_1T$, откуда легко следует выполнение условия 3. Для доказательства условия 2 заметим, что $J_1UJ_1 = U^*$. Это эквивалентно условию $J_1E(\varphi)J_1 = E(\varphi)$ [3]. Отсюда следует, что J_1 коммутирует с P_1 и с P_2, так что $J_1H_1 = H_1$, $J_1H_2 = H_2$.

Легко перевести теорему 2 на матричный язык:

Теорема 3. *Для того чтобы оператор T был бисимметричным, необходимо и достаточно, чтобы существовал ортонормированный базис, в котором он является вещественной матрицей вида* $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$.

Если оператор T (J_1, J_2)-бисимметричен, то инволюции J_1 и J_2, вообще говоря, не коммутируют. Однако J_1 вместе с T удовлетворяет условиям теоремы 2 (необходимость), а тогда по достаточности T будет (J_1, J_3)-бисимметричен, где J_1 и J_3 коммутируют. Отсюда следует

Теорема 4. *Для любого бисимметричного оператора существует пара коммутирующих инволюций, относительно которых он также бисимметричен.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Изд-во «Наука», 1966.
2. В. И. Годич. Об инвариантных подпространствах вполне непрерывных бисимметричных операторов. УМЖ, т. 18, № 3, 1966.
3. В. И. Годич и И. Е. Луценко. О представлении унитарного оператора в виде произведения двух инволюций. УМН, т. XX, вып. 6 (126), 1965.

Поступила 25 марта 1971 г.