О РЕГУЛЯРНОСТИ РОСТА ФУНКЦИОНАЛОВ НА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЯХ

В. С. Азарин

§ 1. Введение

При изучении роста целой функции $f(z)$ и распределения ее нулей часто пользуются следующими величинами:

$$M_f(r) = \max_{0 < \varphi \leqslant 2\pi} \ln |f(re^{i\varphi})|, \tag{1.1}$$

$$T_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| \, d\varphi. \tag{1.2}$$

Обозначим n_f — распределение нулей функции $f(z)$, т. е. целочисленное распределение масс такое, что массы сосредоточены в нулях z_j функции $f(z)$, а масса точки z_j равна кратности соответствующего нуля. Тогда величина

$$n_f(r) = \int\limits_{K_r} dn_f; \quad K_r = \{z: |z| \leqslant r\} \tag{1.3}$$

— это число нулей в круге K_r радиуса r с центром в начале координат.

Пусть F_ρ — класс целых функций порядка ρ и нормального типа и $f(z) \in F_\rho$. Обозначим

$$\overline{M}_f = \overline{\lim_{r\to\infty}} M_f(r) r^{-\rho}; \quad \underline{M}_f = \underline{\lim_{r\to\infty}} M_f(r) r^{-\rho}; \tag{1.4}$$

$$\overline{T}_f = \overline{\lim_{r\to\infty}} T_f(r) r^{-\rho}; \quad \underline{T}_f = \underline{\lim_{r\to\infty}} T_f(r) r^{-\rho};$$

$$\overline{\Delta}_f = \overline{\lim_{r\to\infty}} n_f(r) r^{-\rho} \quad \underline{\Delta}_f = \underline{\lim_{r\to\infty}} n_f(r) r^{-\rho}. \tag{1.5}$$

Все эти величины для $f \in F_\rho$ существуют и конечны. Обозначим R_1, R_2, R_3 следующие свойства функций $f \in F_\rho$:

$$R_1 : \overline{M}_f = \underline{M}_f;$$
$$R_2 : \overline{T}_f = \underline{T}_f; \tag{1.6}$$
$$R_3 : \overline{\Delta}_f = \underline{\Delta}_f.$$

Эти свойства характеризуют в какой-то степени регулярность роста целой функции и ее распределения нулей.

Независимость свойств R_1 и R_3 в классе F_ρ показана в [1,16]. А. А. Гольдберг [2], доказав независимость свойств R_1 и R_2, ответил тем самым на один из вопросов списка актуальных задач [3]. В дальнейшем всюду мы будем предполагать, что $\rho > 1$ и ρ — нецелое. Остальные случаи мы обсудим в заключении работы.

В этой работе будет доказана следующая

Теорема 1. *В классе F_ρ для нецелого $\rho > 1$ свойства R_1, R_2, R_3 независимы в совокупности.*

Пусть $\overline{R}_i$ — невыполнение свойства R_i. Тогда для любого разбиения множества индексов $\{1, 2, 3\}$ на два подмножества A и B можно найти такую целую функцию $f \in F_\rho$, что будут выполняться свойства R_α для $\alpha \in A$ и свойства $\overline{R}_\beta$ для $\beta \in B$.

Основная идея доказательства состоит в том, чтобы свести проверку выполнения свойств R_1, R_2, R_3 целых функций к некоторым свойствам ρ-тригонометрически выпуклых функций (ρ — т. в. ф.), которые являются более простым объектом для исследования, чем целые функции. Напомним, что индикатор целой функции из F_ρ является ρ-т. в. ф. — см. [5, стр. 75]. Пусть $T[1;\ h]$, $T[2;\ h]$, $T[3;\ h]$ — функционалы на ρ-т. в. ф. $h(\varphi)$, определенные равенствами:

$$T[1,\ h] = \max_{0<\varphi\leqslant 2\pi} h(\varphi), \tag{1.7}$$

$$T[2;\ h] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h^+(\varphi)\, d\varphi^*, \tag{1.8}$$

$$T[3;\ h] = \rho^2 \int_0^{2\pi} h(\varphi)\, d\varphi. \tag{1.9}$$

Обозначим через $\overline{T}_\alpha$ и T_α ($\alpha = 1,\ 2,\ 3$) следующие свойства пары h_1, h_2 ρ-т. в. ф. относительно этих функционалов:

$$\mathrm{T}_\alpha : T[\alpha;\ ah_1 + (1-a)h_2] \text{ не зависит от } a;\ 0 \leqslant a \leqslant 1$$

$$\overline{\mathrm{T}}_\alpha :\ T[\alpha;\ h_1] \neq T[\alpha,\ h_2].$$

Отметим, что свойство $\overline{\mathrm{T}}_\alpha$ исключает свойство T_α.

---

* $a^+ = \max(0;\ a)$.

Мы будем говорить, что свойства T_1, T_2, T_3 сильно независимы, если любого разбиения множества индексов $\{1, 2, 3\}$ на два подмножества A и B но найти такую пару h_1, h_2, что она удовлетворяет свойствам T_α для $\alpha \in A$ ойствам $\overline{T}_\beta$ для $\beta \in B$.

Теорема 2. *Из сильной независимости свойств T_1, T_2, T_3 в классе пар* в. ф. *следует независимость свойств R_1, R_2, R_3 в классе F_ρ целых функций.*

Теорема 2 является частным случаем более общей основной теоремы § 7, торую мы сейчас не будем формулировать из-за громоздкости соответствующей терминологии. Эта теорема осуществляет связь между свойствами целых нкций и специальными свойствами ρ-т, в. ф.

Теорема 3. *Свойства T_1, T_2, T_3 пар* ρ-т. в. ф. *сильно независимы.*

Из теорем 2 и 3 очевидно следует теорема I.

§ 2. Обзор метода

Доказательство теоремы 3 не зависит от теоремы 2 и изложено в § 12.

При доказательстве теоремы 2 мы используем субгармоническую технику. Напомним предварительно, что если $f(z)$ — целая функция, то функция

$$u(z) = \ln |f(z)|$$

яется субгармонической в плоскости, а n_f, определенное в § 1 — распределение масс, соответствующее $u(z)$ по Ф. Риссу (см. напр. [6, стр. 163 § 9]).

Пусть $u(z)$ — любая субгармоническая функция в плоскости, а μ_u — ее распределение масс.

Все характеристики целой функции $f(z)$, зависящие от $\ln |f(z)|$, можно обобть на субгармонические функции $u(z)$, заменив в определениях $\ln |f(z)|$ на), а характеристики, зависящие от n_f — заменив n_f на μ_u.

В обозначениях мы будем отмечать переход к субгармоническим функциям меной индекса f на u и заменой n на μ.

Например — ср. (1.1), (1.3), (1.5):

$$M_u(r) = \max_{0<\varphi\leqslant 2\pi} u(re^{i\varphi}); \quad \overline{M}_u = \overline{\lim_{r\to\infty}} M_u(r) r^{-\rho}.$$

$$\mu_u(r) = \int_{K_r} d\mu_u; \quad \overline{\Delta}_u = \overline{\lim_{r\to\infty}} \mu_u(r) r^{-\rho}. \tag{2.1}$$

е результаты, необходимые нам для целых функций, мы получаем для субрмонических функций, а затем переходим к целым функциям с помощью аппроксимационных теорем § 9.

Рассмотрим класс U_ρ субгармонических функций $u(z)$ нецелого порядка ρ нормального типа. Это обозначает, что для $u(z)$ выполняется условие

$$\overline{M}_u < \infty. \tag{2.2}$$

Функция $u \in U_\rho$, не имеющая масс в начале координат, представима в виде ([9] или [8, стр. 130]):

$$u(z) = \int_{R^2} H\left(\frac{z}{\zeta}, p\right) d\mu_u + G_q(z), \tag{2.3}$$

$$p = [\rho]^*$$

где $H(u, p)$ — логарифм модуля первичного множителя Вейерштрасса рода p:

* [a] — целая часть a.

$$H(u,\ p) = \ln|1-u| + \operatorname{Re}\left\{\sum_{k=1}^{p}\frac{u^k}{k}\right\}, \tag{2.4}$$

G_q — гармонический полином степени $q < \rho$, а μ_u — распределение масс $u(z)$ в плоскости R^2, удовлетворяющее условию

$$\overline{\Delta}_u < \infty. \tag{2.5}$$

В вопросах асимптотического поведения $u(z)$ при $z \to \infty$ функция $G_q(z)$ не играет роли, так что достаточно рассматривать канонический интеграл

$$u(z,\ \mu) = \int_{R^2} H\left(\frac{z}{\zeta},\ p\right) d\mu, \tag{2.6}$$

и считать, что $u(z,\ \mu)$ однозначно определяется распределением масс μ (индекс u при μ мы будем опускать, если это не вызывает недоразумений).

Существо применяемого метода состоит в том, что вместо изучения асимптотического поведения функции $u(z,\ \mu)$ при $z \to \infty$ мы изучаем предельное поведение семейства субгармонических функций $u(z,\ \mu_t)$ при z — ограниченных и $t \to \infty$, где $\{\mu_t\}$ $(0 < t < \infty)$ — однопараметрическое семейство мер, связанных с мерой μ соотношением $u(zt,\ \mu)\,t^{-\rho} = u(z,\ \mu_t)$. Грубо говоря, предельный переход по z заменяется предельным переходом по μ.

В § 3, 4 мы вводим специальные характеристики роста, имитирующие известные характеристики $M_u(r)$, $T_u(r)$, $\mu_u(r)$ и др. Имитации удобны, так как в отличие от стандартных характеристик они являются непрерывными функционалами по μ в соответствующей топологии и поэтому приспособлены для указанных выше предельных переходов.

Именно эти свойства имитаций позволяют легко доказать основную лемму с помощью конструкции § 5 и основную теорему из § 7.

В § 8 выясняются соотношения между имитациями и стандартными характеристиками, определенными несколько более общим способом в § 6. В частности, показано, что в важных для нас случаях имитации и стандартные характеристики в определенном смысле совпадают (теорема 5, § 8).

В § 9 рассматривается связь предыдущих «субгармонических» построений с целыми функциями. Важную роль здесь играет теорема из [7] о возможности асимптотической аппроксимации субгармонических функций целыми.

Теорема 2, доказательство которой приведено в § 11, следует из основной теоремы, теоремы 5 и § 9. Вероятно, можно было бы доказать теорему 1, используя конструкцию § 5 непосредственно для целых функций. Однако на каждом этапе этот путь был бы связан с довольно трудоемкими оценками целых функций.

В нашем изложении мы старались максимально отделить «оценочную» часть, целиком содержащуюся в теоремах § 10 и § 9, от «конструктивной», выраженной основной леммой и основной теоремой.

§ 3. Топология и непрерывные функционалы

Обозначим через $W_{p_1,\,p_2}$ функцию

$$W_{p_1,\,p_2}(t) = \begin{cases} t^{-p_1} & \text{для } t \in (0;\ 1] \\ t^{-p_2} & \text{для } t \in [1,\ \infty). \end{cases} \tag{3.1}$$

Рассмотрим линейное пространство вещественных непрерывных функций $f(z)$, определенных в $R^2\setminus 0$-плоскости с выколотым началом координат и финитных в $R^2\setminus 0$, т. е. обращающихся в нуль в окрестности нуля и бесконечности.

Замкнем это пространство по норме

$$\| f \| = \sup_{z \in R^2 \setminus 0} \frac{|f(z)|}{W_{p_1, p_2}(|z|)}. \tag{3.2}$$

Результатом такого замыкания является пространство непрерывных функций, убывающих на бесконечности быстрее $|z|^{-p_2}$ и растущих около нуля медленнее $|z|^{-p_1}$.

Обозначим это пространство $C(p_1, p_2)$.

Рассмотрим примеры.

Пусть $H(u, p)$ — логарифм первичного множителя Вейерштрасса — см. соотношение (2.4). Обозначим $H_\varepsilon(z, \zeta, p)$ усреднение $H\left(\frac{z'}{\zeta}, p\right)$ по кружку:

$$H_\varepsilon(z, \zeta, p) = \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int\limits_{|z-z'|<\varepsilon} H\left(\frac{z'}{\zeta}, p\right) d\sigma_{z'} \tag{3.3}$$

($d\sigma_{z'}$ — элемент площади).

Так как функция $H\left(\frac{z}{\zeta}, p\right)$ субгармоническая по z в R^2 и гармоническая для всех $z \neq \zeta$, то

$$H_\varepsilon(z, \zeta, p) \geqslant H\left(\frac{z}{\zeta}, p\right)$$

$$\text{для всех } (z, \zeta)\ z \in R^2,\ \zeta \in R^2 \setminus 0 \text{ и} \tag{3.4}$$

$$H_\varepsilon(z, \zeta, p) = H\left(\frac{z}{\zeta}, p\right)$$

для точек (z, ζ), удовлетворяющих условию $|z - \zeta| > \varepsilon$.

Можно видеть, что функция $H_\varepsilon(z, \zeta, p)$ непрерывна по ζ в $R^2 \setminus 0$, растет около нуля, как $|\zeta|^{-p}$ и убывает на бесконечности, как $|\zeta|^{-p-1}$ при $z \neq 0, \infty$, т. е.

$$H_\varepsilon(z, \zeta, p) \in C(p_1, p_2), \tag{3.5}$$

если p_1 и p_2 удовлетворяет неравенствам

$$p < p_1 < p_2 < p + 1.$$

Пример. Пусть $\chi[\theta, z]$ — характеристическая функция сектора:

$$K_\theta = \{z:\ 0 \leqslant z \leqslant 1,\ \ \arg z \in \theta\}, \tag{3.6}$$

где θ — множество на интервале $(0, 2\pi]$.

Обозначим K_θ^ε ε-окрестность сектора K_θ:

$$K_\theta^\varepsilon = \{z : \exists\, \zeta \in K_\theta : |z - \zeta| < \varepsilon |\zeta|\}$$

и обозначим $\chi_\varepsilon[\theta, z]$ непрерывную функцию, обладающую следующими свойствами:

$$\chi_\varepsilon[\theta, z] = \chi[\theta, z] \quad \forall z \in K_\theta, \tag{3.7}$$

$$\chi_\varepsilon[\theta, z] = \chi[\theta, z] \quad \forall z \overline{\in} K_\theta^\varepsilon,$$

$$0 \leqslant \chi_\varepsilon[\theta, z] \leqslant 1 \quad \forall z \in R^2.$$

Видно, что для любых $p_1, p_2 > 0$ функции $\chi_\varepsilon[\theta, z]$; $\ln|z| \cdot \chi_\varepsilon[\theta, z]$ принадлежат $C(p_1, p_2)$.

Можно выбрать семейство χ_ε так, чтобы, кроме того, выполнялось условие

$$\chi_\varepsilon \downarrow \chi \quad (\varepsilon \downarrow 0). \tag{3.8}$$

Аналогично для характеристической функции $\chi[\theta, \gamma, z]$ кольцевого сектора

$$K_{\theta, \gamma} = \{z : 1 - \gamma \leqslant z \leqslant 1, \ \arg z \in \theta\} \tag{3.9}$$

определяется семейство функций $\chi_\varepsilon[\theta, \gamma, z] \in C(p_1, p_2)$, удовлетворяющих условиям вида (3.7) и (3.8).

Пусть μ — мера (не обязательно неотрицательная) в $R^2 \setminus 0$. По теореме Жордана — см. напр., [10, стр. 121], она представима в виде $\mu = \mu^+ - \mu^-$, где μ^+ и μ^- неотрицательные меры, т. е. распределения масс.

Мы будем обозначать $|\mu|$ вариацию μ: $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$.

Обозначим через M^{p_1, p_2} множество мер таких, что

$$\|\mu\|^{p_1, p_2} = \int\limits_{R^2 \setminus 0} W_{p_1, p_2}(|z|)\, d|\mu|. \tag{3.11}$$

Оно образует линейное векторное пространство.

Введем в этом пространстве топологию с помощью системы полунорм

$$\prod\nolimits_f (\mu) = \left| \int\limits_{R^2 \setminus 0} f\, d\mu \right|, \ f \in C(p_1, p_2),$$

т. е. окрестность нуля $V[f_1, \ldots f_n, \varepsilon]$ определим соотношением

$$V[f_1, \ldots f_n, \varepsilon] = \left\{\mu : \prod\nolimits_{f_l} (\mu) < \varepsilon, \ f_l \in C(p_1, p_2) \right\}.$$

Иначе говоря, последовательность мер μ_n сходится к μ, если для любой функции $f \in C(p_1, p_2)$

$$\int\limits_{R^2 \setminus 0} f\, d\mu_n \to \int\limits_{R^2 \setminus 0} f\, d\mu.$$

Лемма 3.1. *Множество мер, удовлетворяющих условию*

$$\|\mu\|^{p_1, p_2} \leqslant \Delta < \infty, \tag{3.12}$$

компактно в описанной топологии.

Это следует из теоремы Хелли.

Лемма 3.2. *Пусть мера μ удовлетворяет условию*

$$|\mu|(K_r) < Cr^\rho \quad \forall r \in (0, \infty), \tag{3.13}$$

где K_r — круг радиуса r с центром в нуле, C — постоянная, а ρ *удовлетворяет неравенствам $p_1 < \rho < p_2$. Тогда*

$$\|\mu\|^{p_1, p_2} < CD(p_1, p_2, \rho), \tag{3.14}$$

где D — постоянная, не зависящая от μ.

Доказательство проводится интегрированием по частям интеграла в соотношении (3.11).

Пусть μ — неотрицательное распределение масс. При изучении асимптотического поведения нулей целой функции соответственно масс субгармонической функции рассматривается число нулей (масса) в секторе, кольце или круге.

Например для сектора — см. (3.6):

$$\int\limits_{K_\theta} d\mu = \int\limits_{R^2} \chi[\theta, z]\, d\mu. \tag{3.15}$$

…ционал (3.15) не непрерывен в описанной топологии, так как функция имеет разрыв на сторонах сектора и на единичной окружности, но функ-

$$\int_{R^2} \chi_\varepsilon [\theta,\ z]\, d\mu \tag{3.16}$$

…непрерывен, т. к. $\chi_\varepsilon [\theta,\ z] \in C(p_1,\ p_2)$.

Функционал

$$-\int_{K_1} \ln |z|\, d\mu = -\int_{R^2} \chi [z] \ln |z|\, d\mu = \int_0^1 \frac{\mu(t)}{t}\, dt, \tag{3.17}$$

… $z]$ характеристическая функция единичного круга K_1, непрерывен по μ, … функция

$$\ln |z|\, \chi [z] \in C(p_1,\ p_2).$$

…ично показывается, что, например, функционалы

$$\int_{R^2} \chi_\varepsilon [\theta,\ \gamma,\ z]\, d\mu, \tag{3.18}$$

…ующие массу кольца $K_{\theta,\gamma}$, также непрерывны по μ. Обозначим $M_\Delta^{p_1,\ p_2}$ …ство мер $\mu \in M^{p_1,\ p_2}$ удовлетворяющих условию (3.12).

…фиксируем Δ и рассмотрим примеры функционалов, непрерывных на $M_\Delta^{p_1,\ p_2}$.

Рассмотрим канонический интеграл — см. (2.6):

$$u(z,\ \mu) = \int_{R^2} H\left(\frac{z}{\zeta},\ p\right) d\mu, \tag{3.19}$$

… удовлетворяет условию (3.13) для некоторого C.

…берем p_1, p_2 так, чтобы выполнялись условия

$$p < p_1 < \rho < p_2 < p + 1, \tag{3.20}$$

… функционал $u(z,\ \mu)$ при фиксированном z не является непрерывным по μ …писанной выше топологии, т. к. $H\left(\frac{z}{\zeta},\ p\right)$ имеет особенность в точке $z = \zeta$, …функционал

$$u_\varepsilon(z,\ \mu) = \int_{R^2} H_\varepsilon(z,\ \zeta,\ p)\, d\mu = \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int_{|z-z'|<\varepsilon} u(z',\ \mu)\, d\sigma_{z'} \tag{3.21}$$

…$_{z'}$ — элемент площади, H_ε — см. соотношение (3.3)) уже непрерывен по μ, …к. $H_\varepsilon(z,\ \zeta,\ p) \in C(p_1,\ p_2)$, а $\mu \in M_\Delta^{p_1,\ p_2}$ для некоторого Δ по лемме 3.2.

Можно показать, что функционалы

$$T_\varepsilon [1,\ \mu] = \max_{0 < \varphi \leqslant 2\pi} u_\varepsilon (e^{i\varphi},\ \mu) \tag{3.22}$$

$$T_\varepsilon [\varphi,\ \mu] = (u_\varepsilon)^+ (e^{i\varphi},\ \mu) = \max [u_\varepsilon (e^{i\varphi},\ \mu),\ 0] \tag{3.23}$$

$$T_\varepsilon [2,\ \mu] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_\varepsilon^+ (e^{i\varphi},\ \mu)\, d\varphi \tag{3.24}$$

…прерывны на $M_\Delta^{p_1,\ p_2}$ для любого Δ.

Отметим, что эти функционалы уже не линейны в отличие от $u_\varepsilon(z,\ \mu)$.

§ 4. Асимптотические характеристики

Пусть $\mu \in M^{p_1, p_2}$. Обозначим для данного ρ $(p_1 < \rho < p_2)$ семейство преобразований

$$S_t : M^{p_1, p_2} \to M^{p_1, p_2},$$

определенное формулой

$$(S_t\mu)(G) = \frac{\mu(tG)}{t^\rho}. \tag{4.1}$$

В дальнейшем $S_t\mu$ мы будем обозначать μ_t. Отметим, что

$$(\mu_{t_1})_{t_2} = (\mu_{t_2})_{t_1} = \mu_{t_1 t_2}, \tag{4.2}$$

т. е. операция S_t групповая.

Пусть $T[\mu]$ — непрерывный функционал.

Обозначим

$$\bar{\tau}[\mu] = \limsup_{t\to\infty} T[\mu_t] \tag{4.3}$$

$$\underline{\tau}[\mu] = \liminf_{t\to\infty} T[\mu_t] \tag{4.4}$$

и рассмотрим примеры.

Пример. Пусть $u(z, \mu)$ канонический интеграл, определенный равенством (3.19), а $u_\varepsilon(z, \mu)$ (соотношение (3.21)) — его имитация, непрерывная по μ. Если в качестве T взять функционал

$$T_\varepsilon[\varphi, \mu] = u_\varepsilon[e^{i\varphi}, \mu], \tag{4.5}$$

тогда

$$T_\varepsilon[\varphi, \mu_t] = u_\varepsilon(te^{i\varphi}, \mu)\, t^{-\rho},$$

а $\bar{\tau}_\varepsilon[\varphi, \mu]$, $\underline{\tau}_\varepsilon[\varphi, \mu]$ — соответственно индикатор и нижний индикатор функции $u_\varepsilon[z, \mu]$ по лучу $\{\arg z = \varphi\}$; функционал $\bar{\tau}_\varepsilon[\varphi, \mu]$ имитирует индикатор функции $u(z, \mu)$ по лучу и, действительно, как будет показано в § 8:

$$\bar{\tau}_0 \overset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \bar{\tau}_\varepsilon[\varphi, \mu] = h_u(\varphi), \tag{4.6}$$

где $h_u(\varphi)$ — индикатор $u(z, \mu)$, а

$$\underline{\tau}_0 \overset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \underline{\tau}_\varepsilon[\varphi, \mu] \geqslant \underline{h}'_u(\varphi),$$

здесь $\underline{h}'_u(\varphi)$ — нижний индикатор * — см. [11, стр. 89], т. е. существует и ограничен всегда, когда ограничен $h'_u(\varphi)$. Если в качестве $T[\mu]$ брать функционалы $T_\varepsilon[1, \mu]$; $T_\varepsilon[2, \mu]$, определенные соотношениями (3.22), (3.24), то получим

$$T_\varepsilon[1, \mu_t] = M_{u_\varepsilon}(t)\, t^{-\rho}, \quad T_\varepsilon[2, \mu_t] = T_{u_\varepsilon}(t)\, t^{-\rho}, \tag{4.7}$$

где

$$M_u(t) = \max_{0<\varphi\leqslant 2\pi} u(te^{i\varphi}, u), \tag{4.8}$$

$$T_u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^+(te^{i\varphi})\, d\varphi. \tag{4.9}$$

Тогда $\bar{\tau}_\varepsilon$, $\underline{\tau}_\varepsilon$ — соответствующие верхние или нижние пределы отношений (4.7),

---

* См. сноску на стр. 128 § 8.

т. е. $\overline{M}_{u_\varepsilon}$; $\underline{M}_{u_\varepsilon}$; $\overline{T}_{u_\varepsilon}$; $\underline{T}_{u_\varepsilon}$. Как будет показано в § 8, пределы при $\varepsilon \downarrow 0$ функционалов $\bar{\tau}_\varepsilon$, $\underline{\tau}_\varepsilon$ совпадают со стандартными характеристиками $\overline{M}_u$; $\underline{M}_u$; $\overline{T}_u$; $\underline{T}_u$.

Рассмотрим еще примеры функционалов, характеризующих асимптотическое поведение масс. Если в качестве $T[\mu]$ взять — см. (3.17):

$$T[\mu] = -\int\limits_{K_1} \ln|z|\, d\mu, \tag{4.10}$$

и

$$T[\mu_t] = t^{-\rho} \int\limits_0^t \frac{\mu(x)}{x}\, d\overset{*}{x} = \frac{N_u(t)}{t^\rho}. \tag{4.11}$$

Если — см. (3.16)

$$T_\varepsilon[\theta, \mu] = \int\limits_{R^2} \chi_\varepsilon[\theta, z]\, d\mu. \tag{4.12}$$

тогда величины $\bar{\tau}_\varepsilon$, $\underline{\tau}_\varepsilon$ имитируют верхнюю и нижнюю плотности внутри угла $\{\arg z \in \theta\}$. Соотношение между имитациями и истинными плотностями выясняется в § 8, *причем для полной плотности при* $\theta = (0,2\pi)$

$$\overline{\Delta} = \lim_{\varepsilon\to 0} \bar{\tau}_\varepsilon; \quad \underline{\Delta} = \lim_{\varepsilon\to 0} \underline{\tau}_\varepsilon. \tag{4.13}$$

Аналогичные характеристики, построенные для колец и функций $\chi[\gamma, \theta, z]$ — см. (3.18), приводят к максимальной и минимальной плотности.

§ 5. Конструкция и основная лемма

Сформулируем и докажем теорему, содержащую конструктивную часть теоремы 2. Обозначим $M_{\rho,\Delta}$ множество мер, удовлетворяющих условию

$$\|\mu\|_\rho \overset{\text{def}}{=} \sup_{t\in(0,\infty)} |\mu|_t(K_1) \leqslant \Delta < \infty, \tag{5.1}$$

где $|\mu|$ — вариация μ, μ_t, определено соотношением (4.1), а K_1 — единичный круг.

Иначе говоря, $M_{\rho,\Delta}$ — это совокупность мер, для которых выполняется условие

$$|\mu|(K_t) \leqslant \Delta \cdot t^\rho, \tag{5.2}$$

где K_t — круг радиуса t с центром в нуле.

Основная лемма. *Пусть μ^α $\alpha \in A$ — счетное множество мер из $M_{\rho,\Delta}$. Существует такая мера μ, что для любого непрерывного функционала T имеют место неравенства*

$$\varlimsup_{\alpha\to\infty} T[\mu^\alpha] \leqslant \bar{\tau}[\mu] \leqslant \varlimsup_{\alpha\to\infty} \sup_{t,\,t',\,a} T[\mu_t^\alpha a \,\dotplus\, (1-a)\,\mu_{t'}^\alpha] \tag{5.3}$$

$$\varliminf_{\alpha\to\infty} T[\mu^\alpha] \geqslant \underline{\tau}[\mu] \geqslant \varliminf_{\alpha\to\infty} \inf_{t,\,t',\,a} T[\mu_t^\alpha a \,\dotplus\, (1-a)\,\mu_{t'}^\alpha] \tag{5.4}$$

$t' \in (0, \infty)$, $a \in [0;\ 1]$. *Если какая-нибудь подпоследовательность μ^{α_j} сходится к мере μ', то найдется последовательность $t_j \to \infty$ такая, что $\mu_{t_j} \to$*

Если μ^α — неотрицательные меры, то μ — также неотрицательная мера.

Прежде чем переходить к доказательству леммы, отметим один важный час[тный] случай, которым мы собственно и будем пользоваться в дальнейшем.

Теорема 4. *Пусть меры* μ^1 *и* $\mu^2 \in M_{\rho, \Delta}$ *инвариантны относительно п[рео]бразования (4.1), т. е.*

$$\mu_t^1 = \mu^1; \; \mu_t^2 = \mu^2.$$

Тогда существует мера μ *такая, что для любого непрерывного функци[онала]* T *выполняются неравенства:*

$$\max_{\alpha=1,2} T[\mu^\alpha] \leqslant \bar{\tau}[\mu] \leqslant \sup_{0 \leqslant a \leqslant 1} T[a\mu^1 + (1-a)\mu^2],$$

$$\min_{\alpha=1,2} T[\mu^\alpha] \geqslant \underline{\tau}[\mu] \geqslant \inf_{0 \leqslant a \leqslant 1} T[a\mu^1 + (1-a)\mu^2].$$

Доказательство. Пусть в основной лемме последовательность μ^α имеет вид

$$\mu^1, \mu^2, \mu^1, \mu^2 \ldots$$

Из соотношений (5.3) и (5.4), используя (5.5), получаем утверждение теоремы.

Переходим к доказательству основной леммы. По заданным μ^α мы фактически построим меру μ, фигурирующую в утверждении леммы, а затем проверим, что она удовлетворяет условиям (5.3) и (5.4).

Пусть $(x_i, x_i'] \subset (-\infty, \infty)$ — последовательность интервалов на вещественной оси такая, что

$$x_i < x_i' < x_{i+1} \; (i \geqslant 0);$$
$$x_i \to \infty; \; x_i' - x_i \to \infty; \; \underset{(i\to\infty)}{x_{i+1} - x_i'} \to \infty \tag{5.8}$$

Определим функцию $\lambda(x)$ соотношениями

$$\lambda(x) = \begin{cases} 0 \text{ для } x \in (x_i, x_i') \; i = 2k \; k = 0, 1, \ldots \\ 1 \text{ для } x \in (x_i, x_i') \; i = 2k+1 \; k = 0, 1, \ldots \end{cases} \tag{5.9}$$

линейно продолжена для остальных значений x. Обозначим

$$\eta(r) = \lambda(\ln r). \tag{5.10}$$

Отметим сначала некоторые свойства функции $\lambda(x)$ и вытекающие из них свойства $\eta(r)$.

Лемма 5.1. *Функция* $\lambda(x)$ *удовлетворяет условию*

$$|\lambda(x+a) - \lambda(x-a)| \to 0 \; (x \to \infty)$$

равномерно по a *из любого конечного интервала.*

Доказательство очевидно.

Лемма 5.2. Функция $\eta(r)$ удовлетворяет условиям

а) $0 \leqslant \eta(r) \leqslant 1$

б) $\eta(r) = 0$ при $\ln r \in (x_i, x_i')$, $i = 2k$, $k = 0, 1 \ldots$ (5.11)
$\eta(r) = 1$ при $\ln r \in (x_i, x_i')$, $i = 2k+1$, $k = 0; 1 \ldots$

в) $|\eta(r\delta^{-1}) - \eta(r\delta)| \to 0 \; (r \to \infty)$ равномерно по $\delta \in [d; 1]$, где $0 < d < 1$.

Утверждения этой леммы следуют непосредственно из свойств $\lambda(x)$, указанных выше, и определения $\eta(r)$.

Рассмотрим следующую конструкцию. Пусть $\mu^\alpha \in M_{\rho, \Delta}$ — счетное множество мер. Определим меру соотношением

$$d\mu = [1 - \eta(r)]\, d\mu^\alpha + \eta(r)\, d\mu^{\alpha+1}, \; \alpha = 2k,$$
$$d\mu = \eta(r)\, d\mu^\alpha + [1 - \eta(r)]\, d\mu^{\alpha+1}, \; \alpha = 2k+1 \tag{5.12}$$

на множестве

$$K_\alpha = \{z : \ln|z| \in (x_\alpha; x'_{\alpha+1})\}. \tag{5.13}$$

в пересечении множеств $K_{\alpha-1} \cap K_\alpha$ и $K_\alpha \cap K_{\alpha+1}$ формулы (5.12) согласованы, причем

$$d\mu = d\mu^\alpha \quad \text{для } z \in K_{\alpha-1} \cap K_\alpha;$$
$$d\mu = d\mu^{\alpha+1} \quad \text{для } z \in K_\alpha \cap K_{\alpha+1}$$

Если μ^α — неотрицательные меры, то μ — неотрицательная мера.

Рассмотрим семейство мер ν^t, зависящее от параметра t и определенное равенством

$$\nu^t = \begin{cases} |\mu_t - [1-\eta(t)]\,\mu_t^\alpha - \eta(t)\,\mu_t^{\alpha+1}| \text{ при } \alpha = 2k \\ |\mu_t - \eta(t)\,\mu_t^\alpha - (1-\eta(t))\,\mu_t^{\alpha+1}| \text{ при } \alpha = 2k+1, \end{cases} \tag{5.14}$$

для t, удовлетворяющих условию

$$\ln t \in (x_\alpha;\ x'_\alpha). \tag{5.14'}$$

На пересечении интервалов (5.14′) при смежных α формулы согласованы, причем

$$\nu^t = \begin{cases} |\mu_t - \mu_t^\alpha| \quad \text{для } t \in (x_\alpha,\ x'_\alpha) \\ |\mu_t - \mu_t^{\alpha+1}| \text{ для } t \in (x_{\alpha+1},\ x'_{\alpha+1}). \end{cases}$$

Лемма 5.3. *Последовательность ν^t сходится к нулю, когда $t \to \infty$.*

Доказательство. Достаточно показать сходимость на каждой финитной в $R^2 \setminus 0$ функции $f(z)$. Пусть K — кольцо, вне которого $f(z) \equiv 0$. Тогда

$$\left| \int\limits_{R^2\setminus 0} f(z)\, d\nu^t \right| \leqslant \max_{z\in K} |f(z)| \int\limits_K d\nu^t. \tag{5.15}$$

Покажем, что правая часть бесконечно мала при $t \to \infty$. Имеем для достаточно больших t, таких, что

$$\ln t \in \left(\frac{x_\alpha + x'_\alpha}{2},\ \frac{x_{\alpha+1} + x'_{\alpha+1}}{2} \right) \tag{5.15'}$$

соотношение

$$\int\limits_K d\nu^t \leqslant \int\limits_K |\eta(rt) - \eta(t)|\, d\,|\mu_t^\alpha| + \int\limits_K |\eta(rt) - \eta(t)|\, d\,|\mu_t^{\alpha+1}|. \tag{5.15''}$$

Отметим, что для μ_t можно воспользоваться равенством (5.12) для одного и того же α, т. к. при бо́льших t точка $zt \in K_\alpha$, если $z \in K$, а t удовлетворяет соотношению (5.15′). Используя соотношение

$$|\mu_t| = |\mu|_t,$$

получим

$$\int\limits_K d\nu^t \leqslant \max_{z\in K} |\eta(rt) - \eta(t)| \cdot \max\{|\mu^\alpha|_t(K);\ |\mu^{\alpha+1}|_t(K)\} \tag{5.16}$$

Из условия $\mu^\alpha \in M_{\rho,\Delta}$ следует, что

$$|\mu^\alpha|_t(K) \leqslant \Delta\, D(K)\ \alpha = 1, 2, \ldots,$$

где $D(K)$ не зависит от t и α. Из леммы 5.2 следует, что первый множитель в (5.16) стремится к нулю при $t \to \infty$. Поэтому

$$\int\limits_K d\nu^t \to 0\ (t \to \infty).$$

Тогда из (5.15) следует утверждение леммы 5.3.

Доказательство основной леммы. Пусть μ^{α}—заданная последовательность. Возьмем последовательность $t_{\alpha} = e^{\frac{x_{\alpha}+x'_{\alpha}}{2}}$ и рассмотрим последовательность $\tilde{\mu}^{\alpha} = (\mu^{\alpha})_{1/t_{\alpha}}$. Каждый член этой последовательности принадлежит $M_{\rho, \Delta}$, так как из (5.1) видно, что $\|\mu\|_{\rho}$ инвариантна относительно преобразования $(\cdot)_t$. По мерам $\tilde{\mu}_{\alpha}$ построим меру μ, определенную соотношением (5.12). Покажем, что эта мера удовлетворяет условиям (5.3) и (5.4).

Пусть T — непрерывный функционал. Тогда обозначив

$$\lambda^t = \begin{cases} [1-\eta(t)]\,\tilde{\mu}_t^{\alpha} + \eta(t)\,\tilde{\mu}_t^{\alpha+1} & \text{при } \alpha = 2k \\ \eta(t)\,\tilde{\mu}_t^{\alpha} + [1-\eta(t)]\,\tilde{\mu}_t^{\alpha+1} & \text{при } \alpha = 2k+1 \end{cases}$$

для

$$\ln t \in \left(\frac{x_{\alpha}+x'_{\alpha}}{2};\ \frac{x_{\alpha+1}+x'_{\alpha+1}}{2}\right)$$

получим $T[\mu_t] = T[\lambda^t + \tilde{\nu}^t]$, где $\tilde{\nu}^t = \mu_t - \lambda^t$. Так как из леммы 5.3 вытекает, что $\tilde{\nu}^t \to 0$, то вследствие непрерывности имеем

$$T[\mu_t] - T[\lambda^t] = 0(1)\ t \to \infty$$

Подставляя теперь выражения для $\tilde{\mu}^{\alpha}$, получим

$$\bar{\tau}[\mu] = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, T[\mu_t] \leqslant \overline{\lim_{t\to\infty}} \sup_{0\leqslant a\leqslant 1} T[(1-a)\,\mu^{\alpha}_{t/t_{\alpha}} + a\mu^{\alpha+1}_{t/t_{\alpha}}] \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{\alpha\to\infty}} \sup_{t',\,t,\,a} T[1-a)\,\mu_t^{\alpha} + a\mu_{t'}^{\alpha+1}].$$

С другой стороны, на последовательности $t_{\alpha} \to \infty$ функция $\eta(r)$ равна 0 или 1. Поэтому

$$\bar{\tau}[\mu] \geqslant \overline{\lim_{t_{\alpha}\to\infty}}\, T[\mu_{t_{\alpha}}] = \overline{\lim_{\alpha\to\infty}}\, T[\mu^{\alpha}].$$

Тем самым получено соотношение (5.3).

Соотношение (5.4) получается аналогично.

Остальные утверждения леммы также выполняются.

§ 6. Полунепрерывные функционалы

Определение*. *Если функционал T' является пределом монотонно убывающего семейства T_{ε} ($\varepsilon \downarrow 0$) непрерывных функционалов, то он называется полунепрерывным сверху.*

Примеры. Канонический интеграл при фиксированном z

$$u(z, \mu) = \int_{R^2} H\left(\frac{z}{\zeta}, p\right) d\mu$$

является полунепрерывным сверху функционалом по μ, так как представляет собой предел монотонно убывающей последовательности непрерывных функционалов

$$u_{\varepsilon}(z, \mu) = \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int_{|z-z'|<\varepsilon} u(z')\, d\sigma_{z'},$$

определенных в (3.21).

* Для нашего пространства это определение эквивалентно общепринятому ([14], стр. 190 и 192, теорема 4).

Действительно, можно показать, что для любой полунепрерывной сверху функции $f(z)$ операция

$$(\cdot)_\varepsilon = \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int\limits_{|z-z'|<\varepsilon}$$

обладает свойством

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(z) \leqslant f(z).$$

В связи с тем, что

$$u(z, \mu) \leqslant u_\varepsilon(z, \mu)$$

и $u(z, \mu)$ полунепрерывна по z,

$$u(z, \mu) = \lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(z, \mu). \tag{6.1}$$

Можно показать — см. § 8, что фунционалы

$$T'[1, \mu] = \max_{0<\varphi\leqslant 2\pi} u(e^{i\varphi}, \mu), \tag{6.2}$$

$$T'[2, \mu] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u^+(e^{i\varphi}, \mu)\, d\varphi \tag{6.3}$$

также являются монотонными пределами соответствующих непрерывных имитаций, определенных соотношениями (3.22) и (3.24).

Рассмотрим функционалы, характеризующие поведение масс.

Масса кругового сектора — см. (3.15)

$$\mu(K_0) = \int\limits_{R^2} \chi[0, z]\, d\mu, \tag{6.4}$$

масса кольцевого сектора

$$\mu(K_{\gamma, \sigma}) = \int\limits_{R^2} \chi[\gamma, \theta, z]\, d\mu$$

и др. Они также являются монотонными пределами непрерывных имитаций — см. (3.16), (3.18)

$$\int\limits_{R^2} \chi_\varepsilon[\theta, z]\, d\mu; \quad \int\limits_{R^2} \chi_\varepsilon[\gamma, \theta, z]\, d\mu, \tag{6.5}$$

как это следует из соотношений (3.8).

Для полунепрерывного функционала введем характеристики

$$\begin{aligned} \bar{\tau}'[\mu] &= \overline{\lim_{t\to\infty}}\, T'[\mu_t], \\ \underline{\tau}[\mu] &= \underline{\lim}_{t\to\infty}\, T'[\mu_t]. \end{aligned} \tag{6.6}$$

В частности, имеем для функционала

$$T'[1, \mu] = \max_{0<\varphi\leqslant 2\pi} u(e^{i\varphi}, \mu) \tag{6.7}$$

соотношение

$$\bar{\tau}'[1, \mu] = \overline{\lim_{r\to\infty}}\, M_u(r)\, r^{-\rho}, \tag{6.8}$$

$$\underline{\tau}'[1, \mu] = \underline{\lim}_{r\to\infty}\, M_u(r)\, r^{-\rho}, \tag{6.9}$$

где

$$M_u(r) = \max_{0 < \varphi \leqslant 2\pi} u(re^{i\varphi}, \mu). \tag{6.10}$$

Для функционала

$$T'[2, \mu] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^+(re^{i\varphi}, \mu)\, d\varphi \tag{6.11}$$

имеем

$$\bar{\tau}[2, \mu] = \overline{\lim_{r\to\infty}}\, T_u(r)\, r^{-\rho}; \quad \underline{\tau}'[\mu] = \lim_{r\to\infty} T_u(r)\, r^{-\rho}, \tag{6.12}$$

где

$$T_u(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^+(re^{i\varphi}, \mu)\, d\varphi \tag{6.13}$$

есть неванлинновская функция.

Для функционала

$$T'[3, \mu] = \int_{K_1} d\mu; \quad K_1 = \{z : |z| \leqslant 1\} \tag{6.14}$$

имеем

$$\bar{\tau}'[3, \mu] = \overline{\lim_{r\to\infty}}\, \mu(r)\, r^{-\rho}; \quad \underline{\tau}'[3, \mu] = \underline{\lim_{r\to\infty}}\, \mu(r)\, r^{-\rho}, \tag{6.15}$$

где $\mu(r)$ — масса круга радиуса r.

Тем же способом из других функционалов получаем индикатор, угловую плотность (верхнюю и нижнюю) и другие асимптотические характеристики роста и распределения масс.

§ 7. Основная теорема

Сформулируем и докажем основную теорему, частным случаем которой является теорема 2.

Пусть $T_\varepsilon \downarrow T$. Обозначим

$$\bar{\tau}_0 = \lim_{\varepsilon\to 0} \bar{\tau}_\varepsilon; \quad \underline{\tau}_0 = \lim_{\varepsilon\to 0} \underline{\tau}_\varepsilon. \tag{7.1}$$

Рассмотрим класс $M_{\rho,\,\mathrm{reg}}$ мер вида

$$d\mu = \rho t^{\rho-1}\, dt \otimes \Delta(\theta), \tag{7.2}$$

где $\Delta(\theta)$ — мера на единичной окружности. Иначе говоря, мера $\mu \in M_{\rho,\,\mathrm{reg}}$ соответствует разности субгармонических функций вида

$$u(z, \mu) = h(\varphi)\, |z|^{\rho},$$

где $h(\varphi)$ — ρ-тригонометрически выпуклая функция.

Меры из $M_{\rho,\,\mathrm{reg}}$ инвариантны относительно преобразования (4,1), т.е.

$$\mu_t = \mu \tag{7.3}$$

и, следовательно, $\bar{\tau}_0 = \underline{\tau}_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \tau_0$ для любого функционала T_ε.

Основная теорема. *Пусть $T'[\alpha, \mu]\ \alpha \in A$, $T'[\beta, \mu]\ \beta \in B$ два семейства полунепрерывных функционалов, удовлетворяющих условиям:*

1. *Найдется пара мер $\mu^1, \mu^2 \in M_{\rho, \mathrm{reg}}$ такая, что*

а) $T'[\alpha, a\mu^1 \dotplus (1-a)\mu^2] \equiv L_\alpha$ *для* $a \in [0;\ 1]$ $\alpha \in A$, *т. е. функционалы* $T'[\alpha, \mu]$ *постоянны на отрезке* $\{a\mu^1 \dotplus (1-a)\mu^2\}$;

б) $T'[\beta, \mu^1] \neq T'[\beta, \mu^2]$ для $\beta \in B$.

2. $T_\varepsilon[\alpha, \mu]$ *выпуклы по* μ *для всех* μ. *Тогда существует такая мера* $\mu \in M_{\rho, \Delta}$ $(\Delta < \infty)$, *что*

$$\bar{\tau}_0[\alpha, \mu] = \underline{\tau}_0[\alpha, \mu] = L_\alpha \quad \alpha \in A, \tag{7.4}$$

$$\bar{\tau}_0[\beta, \mu] \neq \underline{\tau}_0[\beta, \mu] \quad \beta \in B. \tag{7.5}$$

Если μ^1, μ^2 — неотрицательные меры, то μ — неотрицательная мера.

Доказательство. По теореме 4, § 5 найдется мера μ такая, что для любого непрерывного функционала $T_\varepsilon[\beta, \mu]$ выполняются неравенства

$$\bar{\tau}_\varepsilon[\beta, \mu] \geqslant \max_{i=1,\, 2} T_\varepsilon[\beta, \mu^i],$$

$$\underline{\tau}_\varepsilon[\beta, \mu] \leqslant \min_{i=1,\, 2} T_\varepsilon[\beta, \mu^i].$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$\underline{\tau}_0[\beta, \mu] \leqslant \min_{i=1,\, 2} T'[\beta, \mu^i] < \max_{i=1,\, 2} T'[\beta, \mu^i] \leqslant \bar{\tau}_0[\beta, \mu],$$

т. е. выполняется утверждение (7.5) теоремы.

Для этой же меры μ и любого функционала $T_\varepsilon[\alpha, \mu]$ выполняются неравенства

$$\bar{\tau}_\varepsilon[\alpha, \mu] \leqslant \sup_{0 \leqslant a \leqslant 1} T_\varepsilon[\alpha, a\mu^1 \dotplus (1-a)\mu^2],$$

$$\underline{\tau}_\varepsilon[\alpha, \mu] \geqslant \inf_{0 \leqslant a \leqslant 1} T_\varepsilon[\alpha, a\mu^1 \dotplus (1-a)\mu^2].$$

Используя выпуклость $T_\varepsilon[\alpha, \mu]$, получаем

$$\bar{\tau}_\varepsilon[\alpha, \mu] \leqslant \sup_{0 \leqslant a \leqslant 1} \{aT_\varepsilon[\alpha, \mu^1] + (1-a)T_\varepsilon[\alpha, \mu^2]\} \leqslant \max_{i=1,\, 2} T_\varepsilon[\alpha, \mu^i]. \tag{7.6}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, имеем

$$\bar{\tau}_0[\alpha, \mu] \leqslant L_\alpha.$$

Используя неравенство $T_\varepsilon \geqslant T$ и условие 1) теоремы, получаем

$$\underline{\tau}_\varepsilon[\alpha, \mu] \geqslant \inf_{0 \leqslant a \leqslant 1} T'[\alpha, a\mu^1 \dotplus (1-a)\mu^2] = L_\alpha. \tag{7.7}$$

При $\varepsilon \to 0$ находим

$$\underline{\tau}_0[\alpha, \mu] \geqslant L_\alpha. \tag{7.8}$$

Из (7.6) и (7.8) следует соотношение (7.4). Используя соотношение (5.6) для функционала $\underline{\tau}_\varepsilon[3, \mu]$ — (см. 6.14), получаем

$$\bar{\tau}[3, \mu] \leqslant \bar{\Delta}[(0, 2\pi]],$$

откуда следует, что $\mu \in M_{\rho, \Delta}$ для некоторого Δ.

§ 8. Связь с классическими характеристиками

Рассмотрим связь между асимптотическими характеристиками полунепрерывных функционалов $\bar{\tau}'$, $\underline{\tau}'$ и пределами их непрерывных имитаций

$$\bar{\tau}_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \bar{\tau}_\varepsilon;\ \underline{\tau}_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \underline{\tau}_\varepsilon. \tag{8.1}$$

Непосредственно для доказательства теоремы 2 нам понадобится следующий факт.

Теорема 5. *Пусть $T'[\mu]$ определен одной из формул*

$$T'[1, \mu] = \max_{\varphi \in (0, 2\pi]} u(e^{i\varphi}, \mu); \tag{8.2}$$

$$T'[2, \mu] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^+(e^{i\varphi}, \mu)\, d\varphi; \tag{8.3}$$

$$T'[3, \mu] = \int_{R^2} \chi[z]\, d\mu, \tag{8.4}$$

а $T_\varepsilon[\mu]$ — соответствующая непрерывная имитация. Тогда для любого из этих функционалов имеем

$$\bar{\tau}_0 = \bar{\tau}'; \quad \underline{\tau}_0 = \underline{\tau}', \tag{8.5}$$

т. е. функционалы $\bar{\tau}_0$ $\underline{\tau}_0$ совпадают соответственно с величинами $\bar{M}_u$, $\underline{M}_u$, $\bar{T}_u$, $\underline{T}_u$, $\bar{\Delta}_u$ $\underline{\Delta}_u$, фигурирующими в формулировке свойств R_1, R_2, R_3 введения.

Теорема является следствием лемм 8.1; 8.5 и 8.6, доказанных в этом параграфе.

Мы рассмотрим отдельно функционалы, в которые μ входит через субгармоническую функцию $u(z, \mu)$ и функционалы, характеризующие распределение масс и монотонные по μ. Примерами функционалов первого рода служат

$$u(e^{i\varphi}, \mu); \quad u^+(e^{i\varphi}, \mu); \max_{0<\varphi\leqslant 2\pi} u(e^{i\varphi}, \mu); \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^+(e^{i\varphi}, \mu)\, d\varphi,$$

примерами функционалов второго рода —

$$\mu(K_\theta) = \int_{R^2} \chi[\theta, z]\, d\mu; \tag{8.6}$$

$$\mu(K_{\gamma, \theta}) = \int_{R^2} \chi[\gamma, \theta, z]\, d\mu; \tag{8.7}$$

$$N(\theta) = -\int_{R^2} \ln|z|\, \chi[\theta, z]\, d\mu, \tag{8.8}$$

где $\chi[\theta, z]$ и $\chi[\gamma, \theta, z]$ определены в § 3 (3.6), (3.9)

Займемся сначала функционалами второго рода.

Лемма 8.1. *Пусть функционал T' имеет вид*

$$T'[\mu] = \int_{R^2\setminus 0} \varphi(z)\, \chi[z]\, d\mu, \tag{8.9}$$

где $\chi[z]$ — характеристическая функция единичного круга, $\varphi(z) > 0$, $\varphi \in C(p_1, p_2)$ и, кроме того, не возрастает на каждом луче $\{z : \arg z = \varphi\}$. Тогда

$$\bar{\tau}'[\mu] = \bar{\tau}_0[\mu]; \quad \underline{\tau}'[\mu] = \underline{\tau}_0[\mu]. \tag{8.10}$$

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\int_{R^2\setminus 0} \varphi(z)\, \chi[z]\, d\mu \leqslant \int_{R^2\setminus 0} \varphi_\varepsilon(z)\, d\mu \leqslant \int_{R^2\setminus 0} \varphi\left(\frac{z}{1+\varepsilon}\right) \chi\left(\frac{z}{1+\varepsilon}\right) d\mu, \tag{8.11}$$

где $\varphi_\varepsilon(z) = \varphi(z)\chi_\varepsilon[z]$ — см. § 3 (3.7), (3.8). Из (8.11) получаем

$$\int\limits_{R^2\setminus 0} \varphi(z)\chi[z]\,d\mu_t \leqslant \int\limits_{R^2\setminus 0} \varphi_\varepsilon(z)\,d\mu_t \leqslant \int\limits_{R^2\setminus 0} \varphi(z)\chi(z)\,d\mu_{t(1+\varepsilon)}\cdot(1+\varepsilon)^\rho. \tag{8.12}$$

Откуда при $t\to\infty$ имеем

$$\bar{\tau}'[\mu] \leqslant \bar{\tau}_\varepsilon[\mu] \leqslant \bar{\tau}'[\mu](1+\varepsilon)^\rho. \tag{8.13}$$

При $\varepsilon\to 0$ получаем утверждение леммы для $\bar{\tau}'$. Аналогично для $\underline{\tau}'$.

Из этой леммы, в частности, следует соотношение (8.5) между плотностью и ее имитацией. Следующая лемма дает возможность установить соотношение (8.5) в несколько иных терминах.

Лемма 8.2. Пусть

$$T'[\theta,\mu] = \int\limits_{R^2\setminus 0} \psi(z)\chi[\theta, z]\,d\mu, \tag{8.14}$$

где $\psi(z)$ *удовлетворяет условиям предыдущей леммы, а* $\chi[\theta, z]$ *определено в* § 3 — см. (3.6). *Пусть* $\theta_\varepsilon = [0, \varphi]$. *Тогда при каждом фиксированном* μ *множество тех* φ, *где не выполняется условие* (8.5) *для функционалов* $T'[\theta_\varphi, \mu]$ *не более, чем счетно.*

Доказательство. Пусть μ фиксировано. Пусть

$$f(\varphi) \overset{\text{def}}{=} \bar{\tau}'[\theta_\varphi, \mu], \tag{8.15}$$

так как $f(\varphi)$ не убывает по φ, то она имеет не более чем счетное множество скачков.

Пусть φ — точка непрерывности $f(\varphi)$. Тогда

$$f(\varphi) = \bar{\tau}'[\theta_\varphi, \mu] \leqslant \bar{\tau}_\varepsilon[\theta_\varphi, \mu] \leqslant \bar{\tau}'[\theta_{\varphi+2\varepsilon}, \mu] = f(\varphi+2\varepsilon). \tag{8.16}$$

Из непрерывности $f(\varphi)$ следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\bar{\tau}_\varepsilon[\theta_\varphi, \mu] = \bar{\tau}'[\theta_\varphi, \mu]. \tag{8.17}$$

Аналогично для $\underline{\tau}[\theta_\varphi, \mu]$.

Рассмотрим теперь функционалы первого рода, т. е. такие, в который μ входит через субгармоническую функцию.

Пусть V — выпуклая монотонная однородная операция на измеримых функциях, т. е.

1) $V[\alpha u_1 + \beta u_2] \leqslant \alpha V u_1 + \beta V u_2$ $\alpha, \beta \geqslant 0$, (8.18)

2) $Vu_1 \leqslant Vu_2$, если $u_1 \leqslant u_2$ для всех $z\in R^2\setminus 0$.

Например, операции

$$(\cdot)^+ : u^+(z) = \max\{u(z), 0\}; \tag{8.19}$$

$$\sup(\cdot) : M_u(z) = \sup_{0<\varphi\leqslant 2\pi} u(ze^{i\varphi}); \tag{8.20}$$

$$S(\cdot) : S_u(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(ze^{i\varphi})\,d\varphi, \tag{8.21}$$

$$(\cdot)_\varepsilon : u_\varepsilon(z) = \frac{1}{\pi\varepsilon^2}\int\limits_{|\zeta|<\varepsilon} u(z+\zeta)\,d\sigma_\zeta \tag{8.22}$$

являются операциями такого рода. Операция V, примененная к субгармонической функции $u(z)$, дает функцию $Vu(z)$, удовлетворяющую основному неравенству для субгармонических функций

$$(Vu)(z) \leqslant \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int\limits_{|\zeta|=\varepsilon} (Vu)(z+\zeta)\, dl_\zeta, \tag{8.23}$$

но, возможно, не полунепрерывную сверху. Отметим, что суперпозиция V операций дает V-операцию. Основным аппаратом в выяснении связи между функционалами τ' и τ^ε будет

Лемма 8.3. Пусть $u(z)$ — субгармоническая функция и $(Vu)(z)$ полунепрерывна сверху в точке z_0. Тогда

$$(Vu_\varepsilon)(z_0) \downarrow (Vu)(z_0)\ (\varepsilon \downarrow 0). \tag{8.24}$$

Доказательство. Из свойств V имеем

$$Vu \leqslant Vu_\varepsilon \leqslant (Vu)_\varepsilon. \tag{8.25}$$

Vu полунепрерывна сверху в точке z_0, поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0} (Vu)_\varepsilon(z_0) \leqslant (Vu)(z_0). \tag{8.26}$$

Из (8.25) и (8.26) следует утверждение леммы.

Лемма 8.4. *Пусть $u(z)$ — субгармоническая функция в $R^2\backslash 0$. Тогда функции*

$$u_\varphi(z) = u(ze^{i\varphi}), \tag{8.27}$$

$$M_u(z) = \max_{0<\varphi\leqslant 2\pi} u(ze^{i\varphi}), \tag{8.28}$$

$$u^+(z) = \max\{u(z),\ 0\}, \tag{8.29}$$

$$T_u(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u^+(ze^{i\varphi})\, d\varphi \tag{8.30}$$

являются субгармоническими.

Доказательство. Для $u_\varphi(z)$ это непосредственно следует из того, что любое конформное отображение плоскости переводит субгармоническую функцию в субгармоническую. Остальные функции являются результатом V-операций, примененных к субгармоническим функциям. Поэтому достаточно проверить лишь их полунепрерывность.

Полунепрерывность $u^+(z)$ следует из того, что максимум конечного числа полунепрерывных функций есть полунепрерывная функция.

Проверим полунепрерывность $M_u(z)$.

Пусть $z_k \to z_0$. Обозначим через φ_k точку, где достигается $\max\limits_\varphi u(z_k e^{i\varphi})$. Тогда

$$M_u(z_k) = u(z_k e^{i\varphi_k}). \tag{8.31}$$

Выберем любую сходящуюся подпоследовательность из последовательности $z_k e^{i\varphi_k}$. Имеем тогда, используя полунепрерывность $u(z)$:

$$\lim_{k\to\infty} M_u(z_k) = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, u(z_k e^{i\varphi_k}) \leqslant u(z_0 e^{i\varphi_0}) \leqslant M_u(z_0),$$

что и доказывает полунепрерывность $M_u(z)$.

Пусть $u_\varepsilon(z) \downarrow u(z)$. Тогда $(u^+)_\varepsilon \downarrow u^+$ — следует из полунепрерывности u^+ и леммы 8.3. По теореме о монотонной сходимости имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u^+)_\varepsilon(ze^{i\varphi})\,d\varphi \downarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u^+(ze^{i\varphi})\,d\varphi \quad (\varepsilon \downarrow 0),$$

т. е. $T_u(z)$ — полунепрерывная сверху, а следовательно, субгармоническая функция.

Теперь рассмотрим асимптотические характеристики.

Пусть $u(z, \mu)$ — субгармоническая функция. Обозначим

$$h_u(z) = \limsup_{t\to\infty} u(z, \mu_t). \tag{8.32}$$

Лемма 8.5. Операция (8.32) является V-операцией над u и дает субгармоническую функцию.

Доказательство. То, что (8.32) является V-операцией, следует из определения.

Можно показать

$$h_u(z) = h_u(\varphi)\,|z|^\rho, \tag{8.33}$$

где $h_u(\varphi)$ — ρ — тригонометрически выпуклая функция, т. е. $h_u(z)$ непрерывна по z.

Следствие 1. Имеем

$$h_{u_\varepsilon}(z_0) \downarrow h_u(z_0) \quad (\varepsilon \downarrow 0). \tag{8.34}$$

Это следует из леммы 8.3, так как $h_u(z)$ полунепрерывна.

Следствие 2. Для функционалов (8.2) и (8.3) имеет место соотношение $\tau' = \overline{\tau}_0$. Оно получается применением следствия 1 к субгармоническим функциям — см. (8.28), (8.30)

$$u_1(z) = M_u(z);\ u_2(z) = T_u(z)$$

при $z_0 = 1$.

Рассмотрим теперь нижние пределы.

Пусть

$$\underline{h}_u(\varphi) = \liminf_{t\to\infty} u(e^{i\varphi}, \mu_t), \tag{8.35}$$

φ зафиксировано и $t_j(\varphi)$ — последовательность, на которой этот нижний предел достигается. Обозначим

$$\underline{h}_u(z) = \limsup_{t_j(\varphi)\to\infty} u(z, \mu_{t_j(\varphi)}). \tag{8.36}$$

Это V-операция над субгармонической функцией $u(z, \mu)$, совпадающая с $\underline{h}_u(\varphi)$ для $z = e^{i\varphi}$. Покажем, что для некоторых случаев, интересующих нас, можно установить полунепрерывность функции $\underline{h}_u(z)$ в точке $z = e^{i\varphi}$, для того чтобы затем использовать лемму 8.3.

Известно [13, стр. 85], что полунепрерывная сверху регуляризация верхнего предела последовательности субгармонических функций

$$\overline{\lim_{z'\to z}}\ \underline{h}_u(z') = \underline{\tilde{h}}_u(z) \tag{8.37}$$

отличается от $\underline{h}_u(z)$ не более чем на множество нулевой емкости и является субгармонической функцией, следовательно, полунепрерывна сверху везде, т. е. для $\underline{\tilde{h}}_u(z)$ имеем по лемме 8.3

$$\tilde{h}_{u_\varepsilon}(z_0) \downarrow \underline{\tilde{h}}_u(z_0) \quad (\varepsilon \downarrow 0). \tag{8.38}$$

Лемма 8.6. Пусть $u(z)$ — субгармоническая функция, принимающая постоянное значение на каждой окружности

$$\{z : |z| = t\}\ t \in (0, \infty),$$

т. е. $u(z) = u(|z|)$. *Тогда*

$$\underline{h}_{u_\varepsilon}(\varphi) \downarrow \underline{h}_u(\varphi)\ (\varepsilon \downarrow 0).$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon_j \downarrow 0$. Каждая из функций $\underline{\tilde{h}}_{u_{\varepsilon_j}}, \underline{\tilde{h}}_u$ принимает постоянное значение на единичной окружности. Так как окружность имеет положительную емкость и счетное объединение множеств нулевой емкости имеет нулевую емкость [12, стр. 172], то найдется такое $z_0 = e^{i\varphi_0}$, что для него

$$\underline{\tilde{h}}_{u_{\varepsilon_j}}(e^{i\varphi_0}) = \underline{h}_{u_{\varepsilon_j}}(e^{i\varphi_0});\ \underline{\tilde{h}}_u(^{i\varphi_0}) = \underline{h}_u(e^{i\varphi_0}).$$

Тогда из соотношения (8.38) следует утверждение леммы.

Следствие. Для функционалов, определенных соотношениями (8.2) и (8.3), и их непрерывных имитаций имеют место соотношения

$$\underline{\tau}' = \underline{\tau}_0, \tag{8.39}$$

так как функции $T_u(z)$ и $M_u(z)$ зависят лишь от $|z|$.

Как будет показано в § 9, имитации $\underline{\tau}_\varepsilon$, $\overline{\tau}_\varepsilon$ не зависят от изменения субгармонической функции на C_0-множестве (см. § 9). Поэтому

$$h_{u_\varepsilon}(\varphi) = \liminf_{t\to\infty} u_\varepsilon(te^{i\varphi}, \mu)\, t^{-\rho} =$$

$$= \liminf_{\substack{t\to\infty \\ te^{i\varphi}\overline{\in} C_0}} u_\varepsilon(te^{i\varphi})\, t^{-\rho} \geqslant \liminf_{\substack{t\to\infty \\ te^{i\varphi}\overline{\in} C_0}} u(te^{i\varphi}, \mu)\, t^{-\rho},$$

sup по C_0-множествам выражений, стоящих справа, дает по определению нижний индикатор* $h_u'(\varphi)$, поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \underline{h}_{u_\varepsilon}(\varphi) \geqslant h_u'(\varphi). \tag{8.40}$$

§ 9. Связь с целыми функциями

Напомним [5, стр. 120], что множество $C \subset R^2$ называется C_0 множеством, если оно может быть покрыто системой кружков $K_j = \{z : |z - z_j| < r_j\}$ такой, что

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R} \sum_{|z_j|<R} r_j = 0.$$

В работе [7] была доказана следующая

Теорема А. *Для любой субгармонической функции $u(z) \in \boldsymbol{M}_{\rho,\Delta}$ найдется целая функция $\varphi(z)$ порядка ρ такая, что $u(z) - \ln|\varphi(z)| = o(|z|^\rho)$ для $z \to \infty$ так, что z не принадлежит некоторому C_0-множеству.*

Ниже мы докажем теорему, которая показывает, что изменение субгармонической функции на C_0-множестве не влияет на асимптотическое поведение функционалов на ее мере, т. е. в сочетании с теоремой А дает возможность заме-

* Для субгармонических функций вида $\ln|f(z)|$, где $f(z)$ — целая функция, такое определение фигурирует в [11, стр. 89], в [15, стр. 3] или в [16, стр. 10].

...ли любое распределение масс целочисленным, соответствующим логарифму ...ой функции.

Теорема 6. *Пусть $u(z, \mu^1)$ и $u(z, \mu^2)$ — две субгармонические функции с ме... μ^1 и $\mu^2 \in M_{\rho, \Delta}$.*

Пусть

$$u(z, \mu^1) - u(z, \mu^2) = o(|z|^\rho) \tag{9.1}$$

... некоторого C_0-множества. Тогда для любого непрерывного функционала ...[μ] имеет место соотношение

$$T[\mu_t^1] - T[\mu_t^2] = o(1)\ (t \to \infty). \tag{9.2}$$

Доказательству теоремы мы предпошлем ряд лемм.

Лемма 9.1. Пусть u_1 и u_2 — субгармонические функции, удовлетворяющие ...овию (9.1). Обозначим $\tilde{u}_1$ и $\tilde{u}_2$ функции, полученные выметанием масс u_1 ...u_2 из C_0-множества. Тогда

$$\tilde{u}_1(z) - \tilde{u}_2(z) = o(|z|^\rho) \tag{9.3}$$

...де при $z \to \infty$.

Доказательство. Функции $\tilde{u}_1$ и $\tilde{u}_2$ гармонические на C_0-множестве, ...на границе любого кружка $\in C_0$ выполняется условие (9.3). Так как кружки ...еют относительно малые радиусы, то это условие сохраняется и внутри по ...инципу максимума, минимума.

Лемма 9.2. Если

$$u_1(z) - u_2(z) = o(|z|^\rho),\ \text{при } z \to \infty, \tag{9.4}$$

$$\frac{1}{t^2}\int\limits_{R^2} \left| f\left(\frac{z}{t}\right)(u_1 - u_2) \right| d\sigma_z = o(t^\rho) \tag{9.5}$$

...я любой непрерывной финитной в $R^2/0$ функции $f(z)$.

Доказательство. Очевидно следует из финитности $f(z)$ и соотношения ...4).

Лемма 9.3. Пусть $f(z)$ — финитная непрерывная функция в $R^2/0$.

Тогда

$$\frac{1}{t^2}\int\limits_{C_0} \left| f\left(\frac{z}{t}\right) u(z, \mu) \right| d\sigma_z = o(t^\rho) \tag{9.6}$$

...$_0$ означает C_0-множество).

Доказательство этой леммы требует некоторых оценок, поэтому мы его от...жим до § 10.

Доказательство теоремы. Допустим, что по некоторой последова...льности $t_j \to \infty$ соотношение (9.2) не выполняется. Тогда ввиду компактности ...$_{\rho, \Delta}$ можно найти подпоследовательность $t_j' \to \infty$ такую, что

$$\mu^1_{t_j'} \to \mu^1_\infty;\ \mu^2_{t_j'} \to \mu^2_\infty, \tag{9.7}$$

...ричем μ^1_∞ и μ^2_∞ различны, иначе это противоречило бы непрерывности функ...ионала T.

Покажем, что этого не может быть.

Допустим, μ^1_∞ и μ^2_∞ различны. Найдем функцию $f \in C(p_1, p_2)$, для которой

$$\int\limits_{R^2 \setminus 0} f\, d\mu^1_\infty \neq \int\limits_{R^2 \setminus 0} f\, d\mu^2_\infty. \tag{9.8}$$

Можно считать, что это функция финитная и дважды непрерывно дифференцируемая.

Используя формулу Грина, получим

$$\int_{R^2} f\,d\mu = \int_{R^2} u\Delta f\,d\sigma, \tag{9.9}$$

где Δ — оператор Лапласа, а Δf — непрерывная финитная **функция.**

Для каждой из функций u_1 и u_2 получим тогда

$$\begin{aligned} \int_{R^2} f\,d\mu_t^1 &= \frac{1}{t^\rho}\int_{R^2} \Delta f(z)\,u(zt,\mu^1)\,d\sigma; \\ \int_{R^2} f\,d\mu_t^2 &= \frac{1}{t^\rho}\int_{R^2} \Delta f(z)\,u(zt,\mu^2)\,d\sigma. \end{aligned} \tag{9.10}$$

Сделаем в каждом интеграле замену $zt = z'$. Затем заменим в каждом интеграле функции $u(z,\mu^1)$ и $u(z,\mu^2)$ на их выметания — см. лемму 9.1, и рассмотрим разность между соответствующими интегралами. Например, для функции $u(z,\mu^1)$ имеем

$$\begin{aligned} |I_1(t)| &\overset{\mathrm{df}}{=} \left|\frac{1}{t^2}\int_{R^2} \Delta f\left(\frac{z'}{t}\right)\{u(z',\mu^1)-\tilde u(z',\mu^1)\}\,d\sigma_{z'}\right| = \\ &= \frac{1}{t^2}\left|\int_{C_0} \Delta f\left(\frac{z'}{t}\right)\{u(z',\mu^1)-\tilde u(z',\tilde\mu^1)\}\,d\sigma_{z'}\right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{t^2}\int_{C_0}\left|\Delta f\left(\frac{z'}{t}\right)\right|\,|u(z',\mu^1)|\,d\sigma_{z'} + \frac{1}{t^2}\int_{C_0}\left|\Delta f\left(\frac{z'}{t}\right)\right|\left|\tilde u(z',\tilde\mu^1)\right|d\sigma_{z'}. \end{aligned} \tag{9.11}$$

По лемме 9.3 оба интеграла справа есть $o(t^\rho)$. Обозначим через $I_2(t)$ соответствующий интеграл для $u(z,\mu^2)$ и рассмотрим разность

$$\int_{R^2} f\,d\mu_t^1 - \int_{R^2} f\,d\mu_t^2 = \frac{1}{t^\rho}\left\{I_1(t) + I_2(t) + \frac{1}{t^2}\int_{R^2} \Delta f\left(\frac{z}{t}\right)\{\tilde u(z,\tilde\mu^1)-\tilde u(z,\tilde\mu^2)\}\,d\sigma_z.\right.$$

Как было отмечено, I_1 и I_2 есть $o(t^\rho)$, а третий интеграл есть $o(t^\rho)$ по лемме 9.2. Поэтому при $t_l \to \infty$ получаем

$$\int_{R^2} f\,d\mu_\infty^1 = \int_{R^2} f\,d\mu_\infty^2,$$

что противоречит (9.8). Теорема доказана.

§ 10. Доказательство леммы 9.3.

В этом параграфе мы докажем лемму 9.3.

Лемма 10.1. *Пусть K — кольцо, вне которого финитная непрерывная функция $f(z)$ равна нулю. Тогда*

$$\int_{C_0}\left|f\left(\frac{z}{t}\right)u(z,\mu)\right|d\sigma \leqslant \max_{\zeta\in K}|f(\zeta)|\int_{C_0\cap tK}(2u^+ - u)\,d\sigma,$$

где

$$tK = \left\{z : \frac{z}{t} \in K\right\}.$$

Доказательство очевидно следует из

$$|u| = 2u^{+} - u.$$

Лемма 10.2. *Имеет место соотношение*

$$\frac{1}{t^2} \int\limits_{C_0 \bigcap tK} u^{+}\, d\sigma = o(t^{\rho}).$$

Доказательство. Имеем

$$\max_{z \in tK} u^{+}(z) = O(t^{\rho}).$$

Площадь $C_0 \bigcap tK$ есть $o(t^2)$, откуда и следует утверждение леммы.

Целью дальнейших построений является оценка снизу интеграла $\int\limits_{C_0 \bigcap tK} u\, d\sigma$, результат которой сформулирован в лемме 10.5.

Лемма 10.3. Пусть K_j — кружок вида

$$K_j = \{\zeta : |\zeta - z_j| < \delta_j\} \quad \delta_j < \frac{1}{2},\ z_j \in K. \tag{10.1}$$

Тогда

$$-\int\limits_{K_j} \ln|z - \zeta|\, d\sigma_\zeta \leqslant -D\delta_j^2 \ln \delta_j,\ z \in K, \tag{10.2}$$

где D — постоянная, не зависящая от j.

Доказательство. Для z, лежащих вне кружка,

$$K_j' = \{\zeta : |\zeta - z_j| < 2\delta_j\}.$$

Функция $\ln|z - \zeta|$ ограничена снизу величиной $D_1 \ln \delta_j$, поэтому выполняется (10.2).

Для $z \in K_j'$ имеем

$$-\int\limits_{K_j} \ln|z - \zeta|\, d\sigma_\zeta \leqslant -\int\limits_{K_j'} \ln|z - \zeta|\, d\sigma_\zeta \leqslant$$

$$\leqslant -\int\limits_{K_j'} \ln||z| - |\zeta||\, d\sigma = -2\pi \int\limits_0^{2\delta_j} \ln|x - t|\, x\,dx \leqslant -D_2\delta_j^2 \ln \delta_j,$$

откуда и получаем неравенство (10.2) для всех $z \in K$.

Лемма 10.4. *Пусть $G_1(z, \zeta)$ — функция Грина для кольца K'. Пусть C — множество, состоящее из кружков K_j вида* (10.1), *целиком лежащее внутри кольца $K \sqsubset K'$. Тогда*

$$\int\limits_C G_1(z, \zeta)\, d\sigma_\zeta \leqslant -D \sum \delta_j^2 \ln \delta_j, \tag{10.3}$$

где D не зависит от множества C.

Доказательство. Функция Грина имеет вид

$$G(z, \zeta) = -\ln|z-\zeta| + H(z, \zeta),$$

где $H(z, \zeta)$ — гармоническая функция по z и ζ, принимающая на границе кольца K' значения $\ln|z-\zeta|$. Если $\zeta \in C$, то $H(z, \zeta)$ ограничена по $z \in K$ сверху и снизу. Следовательно, по лемме 10.3 получим

$$\int_C G_1(z, \zeta)\, d\sigma_\zeta < -D_1 \sum \int_{K_j} G_1(z, \zeta)\, d\sigma_\zeta < -D \sum \delta_j^2 \ln \delta_j \qquad (10.4)$$

Лемма 10.5. Имеет место соотношение

$$\frac{1}{t^2} \int_{C_0 \cap tK} u(z)\, d\sigma_z \geqslant o(t^\rho). \qquad (10.5)$$

Доказательство. Пусть $K'' \supset K' \supset K$ — кольца, содержащие K. Рассмотрим функцию $\tilde{u}(z)$ — выметание u из множества $tK'' \setminus tK$. Она субгармонична в tK' и гармоническая в $tK'' \setminus tK$.

На границе $tK'' \setminus tK$ она ограничена сверху величиной вида $D_2 t^\rho$, где D_2 постоянная, так как совпадает там с $u(z)$. Поэтому на границе tK' она ограничена и сверху и снизу величинами вида $D_1 t^\rho$, $D_2 t^\rho$.

Представим $\tilde{u}$ в tK' в виде

$$\tilde{u}(z) = H_{\tilde{u}}(z) - \int_{tK'} G_t(z, \zeta)\, d\mu, \qquad (10.6)$$

$G_t(z, \zeta)$ — функция Грина для tK'.

Функция $H_{\tilde{u}}$ совпадает с $\tilde{u}$ на границе tK' и гармонична в tK'. Поэтому

$$D_1 t^\rho < H_{\tilde{u}}(z) < D_2 t^\rho. \qquad (10.7)$$

Оценим теперь интеграл в (10.6). Имеем

$$\int_{C_0 \cap tK} d\sigma_\zeta \int_{tK'} G_t(\zeta, z)\, d\mu_z = \int_{tK'} d\mu_z \int_{C_0 \cap tK} G_t(z, \zeta)\, d\sigma_\zeta.$$

Сделаем замену $\frac{\zeta}{t} = \zeta'$ и обозначим $\frac{z}{t} = z'$. Имеем

$$G_t(\zeta, z) = G_1(\zeta', z'),$$

где $G_1(z, \zeta)$ — функция Грина кольца K'. Кроме того,

$$\int_{C_0 \cap tK} G_t(z, \zeta)\, d\sigma_\zeta = t^2 \int_{C \cap K} G_1(z', \zeta')\, d\sigma_{\zeta'},$$

где

$$C = \{\zeta' : t\zeta' \in C_0\}.$$

Используем теперь лемму 10.4, заметив предварительно, что

$$-\sum \delta_j^2 \ln \delta_j \leqslant D_3 \sum \delta_j,$$

если $\delta_j < \frac{1}{2}$.

Получим

$$\int\limits_{tK'} d\mu_z \int\limits_{C_0 \bigcap tK} G_t(z, \zeta)\, d\sigma_\zeta \leqslant \mu(tK')\, D \sum \frac{r_j}{t}, \tag{10.8}$$

где r_j — радиусы кружков, из которых состоит $C_0 \bigcap tK$. Так как

$$\mu(tK') = O(t^\rho), \tag{10.9}$$

а

$$\sum \frac{r_j}{t} = o(1) \quad (t \to \infty), \tag{10.10}$$

то интеграл в (10.8) есть $o(t^\rho)$.

Из (10.8) и (10.7) получаем тогда утверждение леммы.

Из леммы 10.1, леммы 10.2 и леммы 10.5 непосредственно следует лемма 9.3.

§ 11

Доказательство теоремы 2. Обозначим

$$T'[1, \mu] = \max_{0 < \varphi \leqslant 2\pi} u(e^{i\varphi}, \mu); \tag{11.1}$$

$$T'[2, \mu] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u^+(e^{i\varphi}, \mu)\, d\varphi; \tag{11.2}$$

$$T'[3, \mu] = \int\limits_{K_1} d\mu \tag{11.3}$$

(K_1 — единичный круг).

Заметим прежде всего, что распределению масс вида

$$d\mu = \rho t^{\rho-1}\, dt \otimes \Delta(\Theta), \tag{11.4}$$

где $\Delta(\Theta)$ — неотрицательная мера на окружности, соответствуют субгармонические функции вида

$$u(z, \mu) = h(\varphi)\, |z|^\rho, \tag{11.5}$$

здесь $h(\varphi)$ — ρ-т. в. функция.

На таких мерах функционалы (11.1), (11.2) и (11.3) принимают вид (1.7), (1.8), (1.9).

Для первых двух функционалов это очевидно, а для третьего следует из известного [5, стр. 199, (3.26)] равенства

$$\int\limits_\alpha^\varphi d\,\Delta(\Theta) = \{h'(\varphi) - h'(\alpha) + \rho^2 \int\limits_\alpha^\varphi h(\psi)\, d\psi\} \frac{1}{2\pi\rho}.$$

Действительно, выбрав α так, чтобы $h'(\varphi)$ была непрерывна в точке α, получим

$$T'[3, \mu] = \int\limits_\alpha^{2\pi+\alpha} d\Delta(\theta) = \rho^2 \int\limits_\alpha^{2\pi+\alpha} h(\psi)\, d\psi = \rho^2 \int\limits_0^{2\pi} h(\psi)\, d\psi.$$

По теореме 5 для функционалов (11.1), (11.2), (11.3) имеем

$$\underline{\tau}_0[i, \mu] = \underline{\tau}'[i, \mu]; \quad \overline{\tau}_0[i, \mu] = \overline{\tau}'[i, \mu] \quad i = 1, 2, 3. \tag{11.6}$$

Из соотношений (11.6) и соотношений (6.8)—(6.15) следует, что в теореме 2 можно доказывать независимость свойств R_i^0: $\underline{\tau}_0[i, \mu] = \bar{\tau}_0[i, \mu]$ $i = 1, 2, 3$.

Пусть A — произвольное подмножество индексов из $\{1, 2, 3\}$, а B — его дополнение. Из сильной независимости свойств T_1, T_2, T_3 следует, что найдется такая пара мер μ^1, μ^2 вида (11.4), что для семейств функционалов $T'[\alpha, \mu]$, $\alpha \in A$; $T'[\beta, \mu]$, $\beta \in B$ выполняются условия основной теоремы § 7.

Тогда по этой теореме найдется такая мера μ, что

$$\underline{\tau}_0[\alpha, \mu] = \bar{\tau}_0[\alpha, \mu] \quad \alpha \in A,$$

$$\underline{\tau}_0[\beta, \mu] \neq \bar{\tau}_0[\beta, \mu] \quad \beta \in B.$$

Так как это выполняется для любого подмножества A из $\{1, 2, 3\}$, то свойства R_i^0, а следовательно, и свойства R_i независимы.

То, что теорема 2 верна для целых функций, следует непосредственно из теорем А и 6, § 9.

§ 12. Доказательство теоремы 3

Предварительно приведем несколько вспомогательных утверждений. При их доказательстве используются следующие свойства ρ-тригонометрически выпуклых функций (ρ-т. в. ф).

1. Функция $\max\{h_1(\varphi), h_2(\varphi)\} = h(\varphi)$, где h_1, h_2 — ρ-т. в. ф., также является ρ-т. в. ф.

2. Линейная комбинация ρ-т. в. ф. с положительными коэффициентами является ρ-т. в. ф.

3. Функция $h(\varphi - \varphi_0)$ — есть ρ-т. в. ф., если $h(\varphi)$ — ρ-т. в. ф.

Обозначим

$$y(\varphi) = \begin{cases} \cos\rho\varphi & \text{для } |\varphi| < \dfrac{\pi}{2\rho} \\ 0 & \text{для } |\varphi| > \dfrac{\pi}{2\rho} \quad \varphi \in [-\pi; \pi]; \end{cases} \tag{12.1}$$

а) $y(\varphi)$ — ρ-т. в. ф., для которой

$$T'[3, y] = \frac{1}{\pi}; \quad T'[2, y] = \frac{1}{\pi\rho}; \quad T'[1, y] = 1;$$

б) функция

$$y_1(\varphi) = \frac{1}{2}[y(\varphi - \lambda) + y(\varphi + \lambda)] \tag{12.2}$$

является ρ-т. в. ф. по свойствам 2 и 3; для нее

$$T'[3, y_1] = \frac{1}{\pi}; \quad T'[2, y_1] = \frac{1}{\pi\rho}; \quad T'(1, y_1] = \max\{{}^1/_2, \cos\rho\lambda\};$$

в) функция

$$y_2(\varphi) = \begin{cases} -\cos\rho\varphi & \text{для } |\varphi| < \dfrac{\pi}{\rho} \\ 1 & \text{для } |\varphi| > \dfrac{\pi}{\rho} \quad \varphi \in [-\pi, \pi] \end{cases} \tag{12.3}$$

является ρ-т. в. ф. и для нее

$$T'[3, y_2] = \rho - 1; \quad T'[2, y_2] = 1 - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\pi\rho}; \quad T'[1, y_2] = 1;$$

д) функция

$$y_3(\varphi) = y(\varphi - \lambda) + y_2(\varphi) \qquad (12.4)$$

является ρ-т. в. ф. и для нее

$$T'[3, y_3] = \rho - 1 + \frac{1}{\pi};$$

$$T'[2, y_3] = 1 - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\pi\rho} - \frac{1}{\pi}\sin\frac{\lambda\rho}{2}\sin\frac{\lambda}{2}(\rho - 1);$$

$$T'[1, y_3] = \max\left[1, 2\sin\frac{\lambda\rho}{2}\right].$$

Доказательство теоремы 3. Для того чтобы доказать теорему 3, следует построить 8 пар ρ-т. в. функций h_1, h_2 согласно следующему списку, в котором знак $+$ на i-м месте обозначает выполнение свойства T_i, знак $-$ — выполнение свойства $\overline{T}_i$:

1 пара — $(+ + +)$ 2) $(- + +)$ 3) $(+ - +)$ 4) $(+ + -)$
5) $(- - +)$ 6) $(+ - -)$ 7) $(- + -)$ 8) $(- - -)$.

Например, для пятой пары должны выполняться свойства $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$, T_3.

Пример 1. Полагаем $h_1(\varphi) = \max[y(\varphi), y(\varphi - \delta), 1 - \gamma_1]$, где δ и γ_1 связаны условием $\frac{2}{\rho}\arccos(1 - \gamma_1) < \delta < \pi$.

Полагаем $h_2(\varphi) = \max[y(\varphi), 1 - \gamma_2]$, причем γ_2 подобрано так, чтобы $T'[2, h_1] = T'[2, h_2]$.

Тогда

$$T'[3, h_1] = T'[3, h_2]$$

и, кроме того,

$$T'[1, h_1] = T'[1, h_2] = 1.$$

Первые два функционала линейны на отрезке $\{ah_1 + (1 - a)h_2\}$ по свойству интеграла, а третий потому, что максимум достигается в одной и той же точке.

Таким образом, условия T_1, T_2, T_3 выполнены, но функции h_1 и h_2 не совпадают, поэтому соответствующая этой паре по теореме 2 целая функция не является, как можно было бы показать, функцией вполне регулярного роста.

Пример 2. Полагаем

$$h_1(\varphi) = \frac{1}{2}[y(\varphi - \delta) + y(\varphi + \delta)] \quad \delta < \frac{\pi}{2\rho}.$$

$$h_2(\varphi) = y(\varphi).$$

Имеем тогда

$$T'[3, h_1] = T'[3, h_2],$$

$$T'[2, h_1] = T'[2, h_2],$$

$$T'[1, h_1] = 1 \quad T'[1, h_2] = \cos\rho\delta.$$

Первые два функционала линейны на отрезке $\{ah_1 + (1 - a)h_2\}$ $a \in [0, 1]$, поэтому для пары h_1, h_2 выполняются условия $\overline{T}_1$, T_2, T_3.

Пример 3. Полагаем

$$h_1(\varphi) = y_3(\varphi, \lambda_1); \; h_2(\varphi) = y_3(\varphi, \lambda_2) \; 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \frac{\pi}{3\rho},$$

где y_3 определено соотношением (12.4). Имеем тогда

$$T'[3, ah_1 + (1 - a)h_2] \text{ постоянна для } a \in [0, 1],$$

$$T'[1, ah_1 + (1 - a)h_2] \text{ постоянная для } a \in [0, 1],$$

$$T'[2, h_1] \neq T'[2, h_2].$$

Пример 4. Полагаем

$$h_1(\varphi) = y_2(\varphi);\ h_2(\varphi) = y_3(\varphi),$$

где y_2, y_3 определены соотношениями (12.3) и (12.4). Имеем

$$T'[2,\ ah_1 + (1-a)h_2] \text{ постоянная для } a \in [0,\ 1]$$
$$T'[1,\ ah_1 + (1-a)h_2] \equiv 1 \quad \text{для } a \in [0,\ 1]$$
$$T'[3,\ h_1] \neq T'[3,\ h_2].$$

Аналогично, но проще строятся остальные примеры.

Пример 5. Полагаем

$$h_1 = y_2(\varphi);\ h_2 = y_3(\varphi,\ 0)\cdot k_1,$$

где постоянная k_1 подобрана так, чтобы

$$T'[3,\ h_1] = T'[3,\ h_2].$$

Пример 6. Полагаем, например,

$$h_1 = y(\varphi);\quad h_2 = k_2 y_3(\varphi,\ 0)$$

где k_2 выбрана так, чтобы

$$T'[2,\ h_1] = T'[2,\ h_2].$$

Пример 7. Полагаем

$$h_1(\varphi) = y(\varphi);\ h_2(\varphi) = k_\delta \frac{y(\varphi+\delta) + y(\varphi-\delta)}{2} \qquad \delta < \frac{\pi}{3\rho},$$

где k_δ выбрано так, чтобы

$$T'[1,\ h_1] = T'[1,\ h_2].$$

Пример 8. Следует, например, немного изменить коэффициент в любом из примеров 5, 6, 7.

Доказательство теоремы 3 закончено.

Заключение

Обсудим теперь, насколько существенно ограничение $\rho > 1$ и ρ — нецелое.

Пусть ρ — нецелое и $\rho < 1$. Примеры 1 и 2 годятся и для этих ρ также.

Рассмотрим подробнее пример 3. Если $0{,}5 < \rho < 1$, то можно построить соответствующий пример, заменив в определении $y_3(\varphi,\ \lambda)$ — см. (12.4) функцию $y_2(\varphi)$ на функцию

$$\tilde{y}_2(\varphi) = \cos|\varphi - \pi|, \tag{1.13}$$

а функцию $y(\varphi)$ на $\varepsilon y(\varphi)$, где ε достаточно мало. Если $\rho \leqslant \frac{1}{2}$, то всякая ρ-т. в. ф. $h(\varphi)$ для таких ρ положительна при всех φ, так что

$$h^+(\varphi) = h(\varphi).$$

Поэтому нашим методом нельзя построить целую функцию, для которой выполняется свойство $R_2 \wedge \overline{R}_3$ или $R_3 \wedge \overline{R}_2$. Возможно, что для $\rho \leqslant \frac{1}{2}$ свойства R_2 и R_3 связаны.

Для построения примера 4 при $\frac{1}{2} < \rho < 1$ следует взять вместо $y_2(\varphi)$ функцию $\tilde{y}_2(\varphi)$ из соотношения (1.13), а вместо $y_3(\varphi,\ 0)$ — функцию

$$(\tilde{y}_2)^+(\varphi) = \max\{\tilde{y}_2(\varphi),\ 0\}.$$

Все соображения, связанные со случаем $0 \leqslant \rho < \frac{1}{2}$, относятся также к этому примеру и к примерам 5, 6.

Примеры 5, 6 для $\frac{1}{2} < \rho < 1$, а пример 7 для $0 < \rho < 1$ строятся с помощью замены $y_2(\varphi)$ на $\tilde{y}_2(\varphi)$ и $y_3(\varphi, 0)$ на $\tilde{y}_2^{+}(\varphi)$.

Для построения примеров с целым ρ используем следующий прием *.

Пусть $\rho > 0$ целое. Рассмотрим целую функцию порядка

$$\rho_1 = \frac{\rho}{2\rho - 1}.$$

Целая функция $f(z^{2\rho-1})$ имеет порядок ρ и обладает или нет свойствами R_1, R_2, R_3 вместе с $f(z)$. Поэтому все примеры, кроме 3, 4, 5, 6 могут быть построены для всех целых $\rho \geqslant 1$, а примеры 3, 4, 5, 6 — для целых $\rho \geqslant 2$.

Случай $\rho = 1$ для примеров 3, 4, 5, 6 остается пока открытым, хотя и он, наверное, не составляет исключения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shach S. M. On integral functions of perfectly regular growht. J. London Math. Soc. 14 1939, 293—302.
2. А. А. Гольдберг. Три приклади цілих функцій. ДАН УССР, № 4, 1963, 443—446.
3. Исследовательские проблемы. Сб. переводов «Математика», 7, № 5, 1963, 133—136.
4. А. А. Гольдберг. Экстремальный индикатор для целой функции с положительными нулями. «Сиб. матем. ж.», 3, 1962, 170—177.
5. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. ГИТТЛ, М., 1956.
6. И. И. Привалов. Субгармонические функции. ОНТИ, 1937.
7. В. С. Азарин. О лучах вполне регулярного роста целой функции. «Матем. сб.», т. 79, вып. 4, 1969, 463—475.
8. В. С. Азарин. О субгармонических во всем пространстве функциях вполне регулярного роста. Зап. мех.-матем. ф-та Харьковск. ун-та и ХМО, XXVIII, сер. 4, 1961, 124—148.
9. Brelot M. Etude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point singulier. Ann. de l'institut Fourier, 1950, I.
10. Халмош. Теория меры. ИЛ, 1953.
11. А. А. Гольдберг. Индикаторы целых функций и интеграл по неаддитивной мере. Сб. «Современные проблемы теории аналитических функций», Ереван, 1965.
12. Н. С. Ландкоф. Основы современной теории потенциала. Физматгиз, 1966.
13. М. Брело. Основы классической теории потенциала. Изд-во «Мир», 1964.
14. Н. Бурбаки. Общая топология, гл. III—VIII. Физматгиз, 1969.
15. А. А. Кондратюк. Оценки индикаторов целых функций. Автореф. канд. дисс., Львов, 1969.
16. А. А. Гольдберг. Распределение значений и асимптотические свойства целых и мероморфных функций. Харьков, 1965.
17. А. А. Гольдберг, И. В. Островский. Распределение значений мероморфных функций. Физматгиз, 1969.

Поступила 3 марта 1971 г.

* Ср., например, [17, стр. 166].