О КЛАССАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В БЕСКОНЕЧНОМ СЛОЕ

И. И. Антыпко, М. А. Перельман

1°. Рассмотрим систему уравнений

$$
\begin{gathered}
Lu(x, t) \equiv \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) = 0, \\
u(x, t) = \{u_1(x, t), \ldots, u_n(x, t)\}, \\
x \in R^m, \ T_0 \leqslant t \leqslant T,
\end{gathered} \tag{1}
$$

$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — матрица, элементами которой служат полиномы от $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ с постоянными (комплексными) коэффициентами.

К системе (1) присоединим краевые условия

$$
\sum_{k=1}^{n} \sum_{q=1}^{l} a_{i, k+(q-1)n} u_k(x, T_q) = 0 \ (i = 1, \ldots, n), \tag{2}
$$

где $T_0 \leqslant T_1 < T_2 < \ldots < T_l \leqslant T$, $l \geqslant 1$. Ранг матрицы $A = \{a_{ij}\}_{i=1, \ldots, n}^{j=1, \ldots, nl}$ равен n.

Здесь исследуется вопрос о том, при каких условиях на поведение решения $u(x, t)$ задачи (1) — (2) при $\|x\| \to \infty$ вытекает, что $u(x, t) \equiv 0$.

В случае $l = 2$ (двухточечная задача) аналогичный вопрос изучен в [1], а в случае многоточечной задачи ($1 \leqslant l \leqslant n$) с локальными краевыми условиями — в [2].

Обозначим

$$
u_i(x, T_k) = u_{(k-1)n+i}(x) \tag{a}
$$

$(i = 1, \ldots n; \ k = 1, \ldots l)$.

Тогда условия (2) примут вид

$$\sum_{k=1}^{nl} a_{ik} u_k(x) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Обозначим $A(s_{11}, \ldots, s_{1q_1}, \ldots, s_{l1}, \ldots, s_{lq_l})$ — базисный минор матрицы A, где

$0 \leqslant q_j \leqslant n$, $\sum_{j=1}^{l} q_j = n$, $(k-1)n < s_{k1} < \ldots < s_{k,q_k} \leqslant kn \quad (k = 1, \ldots, l)$ и s_{ij} — номер столбца матрицы A.

Введем в рассмотрение множества

$$L_k = \{j : j = s_{ki} - (k-1)n, \ i = 1, \ldots, q_k\} \quad (k = 1, \ldots, l);$$
$$N_k = \{j : 1 \leqslant j \leqslant n, \ j \neq s_{ki} - (k-1)n; \ i = 1, \ldots, q_k\} \quad (k = 1, \ldots, l);$$
$$L = \{j : j = s_{ki}; \ k = 1, \ldots, l; \ i = 1, \ldots, q_k\};$$
$$N = \{j : 1 \leqslant j \leqslant nl, \ j \neq s_{ki}; \ k = 1, \ldots, l; \ i = 1, \ldots, q_k\};$$
$$N_{l+1} = \{j : 1 \leqslant j \leqslant n\}.$$

Тогда $u_i(x)$ $(i \in L)$ в силу (3) выражаются однозначно через $u_j(x)$ $(j \in N)$:

$$\sum_{j \in N} b_{ij} u_j(x) = u_i(x) \quad (i \in L). \tag{4}$$

2°. Докажем теорему, связывающую вопрос о единственности решения задачи (1) — (2) с вопросом о существовании решения сопряженной краевой задачи. Сопряженной краевой задачей (по отношению к задаче (1) — (2)) будем называть задачу решения системы дифференциальных уравнений

$$L^* v^k \equiv -\frac{\partial v^k(x, t)}{\partial t} - P^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) v^k(x, t) = 0,$$
$$v^k(x, t) = \{v_1^k(x, t), \ldots, v_n^k(x, t)\} \quad (k = 1, \ldots, l), \tag{1'}$$

где $P^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — матрица, получающаяся из $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ транспонированием, заменой $\partial/\partial x_j$ на $-\partial/\partial x_j$; а коэффициентов — на комплексно сопряженные, при краевых условиях

$$w_j(x) + \sum_{i \in L} \bar{b}_{ij} w_i^*(x) = 0 \quad (j \in N),$$
$$w_i(x) = \varphi_i(x) \quad (i = nl + j, \ j \in N_{l+1}), \tag{2'}$$

где

$$w_k(x) = \begin{cases} v_k(x), & 1 \leqslant k \leqslant nl \\ -v_k(x), & k > nl, \end{cases} \tag{в}$$

$$\sum_{k=1}^{l} v_i^k(x, t_0) = v_{nl+i}(x), \quad v_i^k(x, T_k) = v_{(k-1)n+i}(x),$$

$t_0 \in [T_0, T]$ и фиксировано.

Пусть Φ — линейное топологическое пространство функций, E — нормированное пространство, E' — сопряженное пространство, причем $\Phi \subset E$ и Φ плотно в E.

Теорема 1. *Пусть при произвольном фиксированном $t_0 \in [T_0, T]$ для любых функций $\varphi_i(x) \in \Phi$ сопряженная задача (1') — (2') имеет решение $v^k(x, t)$, причем $v^k(x, t) \in E$ при любом $t \in [T_0, T]$.*

Тогда всякое решение $u(x, t)$ задачи (1) — (2) такое, что $u(x, t) \in E'$, $t \in [T_0, T]$ тождественно равно нулю.

Доказательство. Пусть $u(x, t) \in E'$ — решение задачи (1) — (2), $\varphi_i(x) \in \Phi$ $(i = nl + 1, \ldots, n(l+1))$ — произвольные функции, $v^k(x, t)$ $(k = 1, \ldots, l)$ — решение задачи (1′) — (2′). Тогда

$$0 = \sum_{k=1}^{l} \int_{t_0}^{T_k} (Lu, v^k)\, dt = \sum_{k=1}^{l} (u, v^k)\Big|_{t_0}^{T_k} - \sum_{k=1}^{l} \int_{t_0}^{T_k} (u, L^* v^k)\, dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{l} (u, v^k)\Big|_{t_0}^{T_k} = \sum_{k=1}^{l} \sum_{i=1}^{n} (u_i, v_i^k)\Big|_{t_0}^{T_k}.$$

Обозначим $u_i(x, t_0) = u_{nl+i}(x)$. Учитывая (а) и (в) и используя (4), получаем

$$0 = \sum_{i=1}^{(l+1)n} (u_i, w_i) = \sum_{j \in N} (u_j, w_j) + \sum_{i \in L} \Big(\sum_{j \in N} b_{ij} \cdot u_j, w_i \Big) + \sum_{j=nl+i} (u_j, w_j) =$$

$$= \sum_{j \in N} \Big(u_j, w_j + \sum_{i \in Z} \bar{b}_{ij} w_i \Big) + \sum_{\substack{j=nl+i \\ i \in N_{l+1}}} (u_j, w_j).^{\, i \in N_{l+1}}$$

Учитывая (2′), получаем

$$\sum_{\substack{j=nl+i \\ i \in N_{l+1}}} (u_j, w_j) = \sum_{i \in N_{l+1}} (u_i(x, t_0), \varphi_{nl+i}(x)) = 0.$$

В силу произвольности $\varphi_j(x) \in \Phi$ и плотности включения $\Phi \subset E$

$$u_i(x, t_0) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

В силу произвольности $t_0 \in [T_0, T]$

$$u(x, t) \equiv 0, \quad t \in [T_0, T].$$

Теорема доказана.

3°. Рассмотрим матрицу

$$D(s, t_0) = \begin{pmatrix} B_1^L & B_2^L & \ldots & B_l^L \\ -e^{(T_1 - t_0) P^*(is)} & -e^{(T_2 - t_0) P^*(is)} & \ldots & -e^{(T_l - t_0) P^*(is)} \end{pmatrix},$$

где B_k^L получается из

$$B_k = \begin{pmatrix} b_{(k-1)n+1,\,1} & b_{(k-1)n+2,\,1} & \ldots & b_{kn,\,1} \\ b_{(k-1)n+1,\,2} & b_{(k-1)n+2,\,2} & \ldots & b_{kn,\,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{(k-1)n+1,\,nl} & b_{(k-1)n+2,\,nl} & \ldots & b_{kn,\,nl} \end{pmatrix}^{*}$$

Заменой элементов столбцов с номерами $\in N_k$ на $\delta_{(k-1)n+i,\,j}$ $(i \in N_k$ — фиксировано, $j = 1, \ldots nl)$, вычеркиванием строк с номерами $\in L$ и заменой b_{ij} на $\bar{b}_{ij}$.

Очевидно, что $D(s, t_0)$ — квадратная матрица порядка nl. Определитель этой матрицы $\Delta(s, t_0) = \det D(s, t_0)$ естественно возникает при исследовании вопроса

* Равенство (4) определяет b_{ij} лишь при $i \in L$, $j \in N$. В матрице B_k все b_{ij} при $i \in N$ или $j \in L$ — произвольны.

...имости задачи (1′) — (2′). Важную роль в определении классов единственности решения задачи (1) — (2) играет вопрос о нулях $\Delta(s, t_0)$.

Лемма 1. *Множество нулей определителя* $\Delta(s, t_0)$ *не зависит от* t_0.

Доказательство очевидно, если заметить, что

$$D(s, t_0) = \begin{pmatrix} E_n & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & E_n & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -e^{-t_0 P^*(is)} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} B_1^L & \dots & B_{l-1}^L & B_l^L \\ -e^{T_1 P^*(is)} & \dots & -e^{T_{l-1} P^*(is)} & -e^{T_l P^*(is)} \end{pmatrix},$$

где E_n — единичная матрица порядка n, 0 — нулевые матрицы $n \times n$, а

$$B_k^L = \begin{pmatrix} B_{k,1}^L \\ \vdots \\ B_{k,l-1}^L \end{pmatrix}, \quad B_{kl}^L \text{ — блоки } n \times n.$$

Значит, при нахождении нулей $\Delta(s, t_0)$, t_0 можно выбирать произвольно из $[T_0, T]$. Возьмем $t_0 = T_1$.

Определителем $\Delta(s)$ краевой задачи (1) — (2) назовем величину

$$\Delta(s) = \det D(s, T_1) = \det \begin{pmatrix} B_1^L & B_2^L & \dots & B_l^L \\ -E_n & -e^{(T_2 - T_1) P^*(is)} & \dots & -e^{(T_l - T_1) P^*(is)} \end{pmatrix}.$$

Как и в [3], задачу (1) — (2) назовем невырожденной, если $\Delta(s) \not\equiv 0$, и вырожденной, если $\Delta(s) \equiv 0$.

Пусть Z — множество нулей $\Delta(s)$. Если задача невырожденная, то число $a = \inf\limits_{s \in Z} \| \operatorname{Im} s \|$ *будем называть типом краевой задачи* (1) — (2).

4°. Пусть $\Psi = \{\psi(s)\}$ — пространство преобразований Фурье функций из Φ. Тогда задача (1′) — (2′) в пространстве Ψ переходит в следующую задачу:

$$L^* \tilde{v}^k(s, t) = 0 \quad (k = 1, \dots, l) \tag{1''}$$

$$\begin{cases} \tilde{w}_j(s) + \sum\limits_{i \in L} \tilde{b}_{ij} \tilde{w}_i(s) = 0 & (j \in N) \\ \tilde{w}_i(s) = \psi_i(s) & (i = nl + j,\ j \in N_{l+1}), \end{cases} \tag{2''}$$

где $\tilde{v}^k(s, t)$ — преобразование Фурье (по x) $v^k(x, t)$; $\tilde{w}_j(s)$, $\psi_j(s)$ — преобразования Фурье соответственно $w_j(x)$ и $\varphi_j(x)$.

Теорема 2. *Решение задачи* (1″) — (2″) *при любых* $\psi_j(s) \in \Psi$ *существует при всех значениях* s, *для которых* $\Delta(s) \neq 0$. *Это решение может быть представлено в виде*

$$\tilde{v}^k(s, t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta_i^k(s, t)}{\Delta(s, t_0)} \psi_i(s), \tag{5}$$

где $\Delta_i^k(s, t)$ *при каждом* $t \in [T_0, T]$ — *целые вектор-функции порядка не выше* p_0, p_0 — *приведенный порядок системы* (1).

Доказательство. Решение задачи (1″) — (2″) можно записать в виде

$$\tilde{v}^k(s, t) = \exp\{(T_k - t) P^*(is)\} c^k(s), \tag{6}$$

где $c^k(s) = \{c_1^k(s), \ldots, c_n^k(s)\}$ следует подбирать с учетом (2″). Для нахождения $c_i^k(s)$ получаем систему

$$\tilde{v}^k(s, T_k) = c^k(s),$$
$$\tilde{v}^k(s, t_0) = \exp\{(T_k - t_0) P^*(is)\} c^k(s).$$

Обозначим $c_i^k(s) = c_{(k-1)n+i}(s)$; $c(s) = \{c_1(s), \ldots, c_{nl}(s)\}$. Тогда, учитывая (в), получим

$$\tilde{w}_{(k-1)n+i}(s) = \tilde{v}_{(k-1)n+i}(s) = \tilde{v}_i^k(s, T_k) = c_{(k-1)n+i}(s)$$
$$(i \in N_{l+1},\ k = 1, \ldots, l),$$
$$\tilde{w}_i(s) = -\tilde{v}_i(s) = -\sum_{k=1}^{l} \tilde{v}_{i-nl}^k(s, t_0) =$$
$$= -\sum_{k=1}^{l} \sum_{q=1}^{n} [\exp\{(T_k - t_0) P^*(is)\}]_{i-nl,\, q} \cdot c_{(k-1)n+q},$$
$$(i = nl + j,\ j \in N_{l+1}),$$

где $[\exp\{(T_k - t_0) P^*(is)\}]_{i-nl,\, q}$ — элемент матрицы $e^{(T_k - t_0) P^*(is)}$, стоящий на пересечении $(i - nl)$-й строки и q-го столбца. Подставляя $\tilde{w}_i$ в (2″), получим

$$c_j(s) + \sum_{i \in L} \bar{b}_{ij} c_i(s) = 0 \quad (j \in N)$$
$$-\sum_{k=1}^{l} \sum_{q=1}^{n} [\exp\{(T_k - t_0) P^*(is)\}]_{i-nl,\, q} \cdot c_{(k-1)n+q}(s) =$$
$$= \psi_i(s) \quad (i = nl + j,\ j \in N_{l+1}).$$

Матрица коэффициентов этой системы равна $D(s, t_0)$.

Если обозначим $\psi(s) = \{0, \ldots, 0, \psi_{nl+1}(s), \ldots, \psi_{n(l+1)}(s)\}$ ($(l-1)n$ первых компонент нули), то получаем

$$D(s, t_0) c(s) = \psi(s).$$

Из леммы 1 и условия $\Delta(s) \neq 0$ следует, что существует

$$D^{-1}(s, t_0) \text{ и } c(s) = D^{-1}(s, t_0) \psi(s).$$

Таким образом,

$$c^k(s) = \sum_{l=1}^{n} \frac{d_l^k(s)}{\Delta(s, t_0)} \psi_{nl+i}(s),$$

где $d_l^k(s)$ — целые вектор-функции от s. Подставляя это выражение в (6), получаем представление решения задачи (1″) — (2″) в виде (5), где

$$\Delta_l^k(s, t) = e^{(T_k - t) P^*(is)} \cdot d_l^k(s).$$

Теорема доказана.

Ниже будем обозначать $M_{\alpha, A}$ — пространство функций, удовлетворяющих оценке

$$|f(x)| \leqslant C_f \exp\{A \|x\|^\alpha\}.$$

помощью формулы (5), используя теорему 1, приходим, как и в [3], к следующим результатам по единственности решения задачи (1) — (2).

I. *Если $a = \infty$, то задача* (1) — (2) *имеет лишь тривиальное решение*

а) *в пространстве как угодно быстро растущих функций, если* $p_0 < 1$;

б) *в пространстве* $M_{\alpha, A}$ *при любых* $\alpha > 0$, $A > 0$, *если* $p_0 = 1$;

в) *в пространстве* $M_{p_0', A}$ *с некоторым* $A > 0$, *если* $p_0 > 1$ $\left(p_0' = \frac{p_0}{p_0 - 1}\right)$.

II. *Если* $0 < a < \infty$, *то задача (1) — (2) имеет лишь тривиальное решение в пространстве функций, удовлетворяющих оценке*

$$|f(x)| \leqslant C_f \exp\left\{\sum A_i |x_i|\right\}, \quad \sum A_i^2 < a^2.$$

III. *Если* $a = 0$, *но* $\Delta(s)$ *не имеет вещественных нулей, то задача* (1) — (2) *имеет лишь тривиальное решение в пространстве функций* K_μ, *удовлетворяющих оценке*

$$|f(x)| \leqslant C_f (1 + \|x\|)^\mu$$

при любом $\mu > 0$.

5°. **Теорема 3.** *Пусть в некоторой точке* s_0 $\Delta(s_0) = 0$. *Тогда существует решение* $u(x, t) \not\equiv 0$ *задачи* (1) — (2), *имеющее вид*

$$u(x, t) = \exp\{-i(s_0, x)\} z(t). \tag{7}$$

Доказательство. Подставляя (7) в систему (1), получаем

$$z(t) = \exp\{(t - T_1) P(-is_0)\} \zeta, \tag{8}$$

ζ — постоянный вектор.

Условия (2) дают

$$z(T_1) = \zeta,$$
$$z(T_k) = \exp\{(T_k - T_1) P(-is_0)\} \zeta$$
$$(k = 2, \ldots, l).$$

Обозначим $z_i(T_k) = z_{(k-1)n+i}$ $(k = 1, \ldots, l)$, тогда

$$z_i = \zeta_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$
$$z_{(k-1)n+i} = \sum_{q=1}^{n} [\exp\{(T_k - T_1) P(-is_0)\}]_{iq} \zeta_q$$
$$(k = 2, \ldots, l).$$

Из (4)

$$z_i = \sum_{j \in N} b_{ij} z_j \quad (i \in L)$$

или

$$-z_i + \sum_{j \in N} b_{ij} z_j = 0 \quad (i \in L).$$

Для нахождения ζ_i получаем систему

$$-\zeta_i + \sum_{j \in N_1} b_{ij} \zeta_j +$$
$$+ \sum_{k=1}^{l-1} \sum_{\substack{nk+j \in N \\ j \in N_{l+1}}} b_{i, nk+j} \sum_{q=1}^{n} [\exp\{(T_{k+1} - T_1) P(-is_0)\}]_{iq} \zeta_q = 0$$
$$(i \in L_1)$$

$$-\sum_{q=1}^{n}[\exp\{(T_{k+1}-T_1)P(-is_0)\}]_{iq}\zeta_q+\sum_{j\in N_1} b_{nk+i,\,j}\zeta_j+ \tag{9}$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\sum_{\substack{ns+j\in N\\ j\in N_{l+1}}} b_{nk+i,\,ns+j}\sum_{q=1}^{n}[\exp\{(T_{s+1}-T_1)P(-is_0)\}]_{jq}\zeta_q=0$$

$$(nk+i\in L;\quad k=1,\ \ldots,\ l-1).$$

Если определитель этой системы равен нулю, то она имеет решение $\zeta_0\neq 0$ и вектор-функция $u(x,\ t)$, определенная по формуле (7), где в силу (8) $z(t)=\exp\{(t-T_1)P(-is_0)\}\zeta_0$ является решением задачи (1) — (2), отличным от тождественного нуля. Тем самым для завершения доказательства остается установить следующий факт.

Лемма 2. Определитель системы (9) с точностью до знака равен

$$\overline{\Delta(s_0)}.$$

Доказательство. Матрица коэффициентов системы (9) равна

$$Q=C_1^\delta+(C_2^0C_3^0\ldots C_l^0)\begin{pmatrix} e^{(T_2-T_1)P(-is_0)}\\ \cdots\cdots\cdots \\ e^{(T_l-T_1)P(-is_0)}\end{pmatrix}-$$

$$-(E_\delta(L_2)\ \ldots\ E_\delta(L_l))\begin{pmatrix} e^{(T_2-T_1)P(-is_0)}\\ \cdots\cdots\cdots \\ e^{(T_l-T_1)P(-is_0)}\end{pmatrix},$$

где C_k^0 получается из

$$C_k=\begin{pmatrix} b_{s_{11},\,(k-1)n+1} & \ldots & b_{s_{11},\,kn}\\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s_{lq_l}(k-1)n+1} & \ldots & b_{s_{lq_l},\,kn}\end{pmatrix}$$

заменой элементов столбцов с номерааи $\in L_k$ нулями.

C_k^δ — получается из C_k заменой элементов столбцов $\in L_k$ $b_{s_{lq},\,j}$ на $-\delta_{s_{lq},\,j}$ $(j\in L_k)$, $E_\delta(L_k)$ — матрица $n\times n$ все элементы которой равны нулю, кроме диагональных элементов с номерами (строк) $s_{kl}-nk$, равных 1.

Тогда, очевидно,

$$Q=C_1^\delta+(C_2^\delta\ \ldots\ C_l^\delta)\begin{pmatrix} e^{(T_2-T_1)P(-is_0)}\\ \cdots\cdots\cdots \\ e^{(T_l-T_1)P(-is_0)}\end{pmatrix}.$$

$\det Q$ с точностью до знака равен

$$\det\begin{pmatrix} E_n & \ldots & O & -e^{(T_2-T_1)P(-is_0)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & \ldots & E_n & -e^{(T_l-T_1)P(-is_0)}\\ C_2^\delta & \ldots & C_l^\delta & C_1^\delta\end{pmatrix}=$$

$$=\det\begin{pmatrix} e^{(T_2-T_1)P(-is_0)} & -E_n & \ldots & 0\\ e^{(T_l-T_1)P(-is_0)} & 0 & \ldots & -E_n\\ C_1^\delta & C_2^\delta & \ldots & C_l^\delta\end{pmatrix}.$$

обозначим B_k^δ матрицу, полученную из B_k вычеркиванием столбцов с номерами N_k и заменой элементов строк с номерами $(k-1)n+i$ $(i \in L_k)$ $b_{(k-1)n+i,\,(k-1)n+j}$ $(i \in L_k,\ j=1,\ \ldots,\ q_k)$ на $-\delta_{(k-1)n+i,\,(k-1)n+j}$ и b_{ij} на $\overline{b}_{ij}$. Учитывая структуру матриц B_k^δ, C_k^δ и то, что $\exp\{(T_k-T_1)P^*(is)\}$ и $\exp\{(T_k-T_1)P(-is)\}$, $(B_1^\delta, \ldots, B_l^\delta)$ и $(C_1^\delta \ldots C_l^\delta)$ эрмитовосопряженные, получаем, что $\det Q$ с точностью до знака равен $\overline{\det D_1}$, где

$$D_1 = \begin{pmatrix} & & & e^{(T_2-T_1)P^*(is_0)} & \ldots & e^{(T_l-T_1)P^*(is_0)} \\ B_1^\delta & \ldots & B_l^\delta & -E_n & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 0 & \ldots & -E_n \end{pmatrix}.$$

Учитывая структуру B_k^L, преобразуем $\Delta(s_0) = \det D(s_0, T_1)$, обращая в B_k^L элементы столбцов с номерами $\in L$ в нули, получаем, что $\Delta(s_0)$ с точностью до знака равен

$$\det\left(\sum_{k=1}^{l} e^{(T_k-T_1)P^*(is_0)} B_{1k}^\delta, \ \ldots, \ \sum_{k=1}^{l} e^{(T_k-T_1)P^*(is_0)} B_{lk}^\delta\right) = $$
$$= M(s_0).$$

Аналогично, учитывая структуру B_k^δ, преобразуем $\det D_{\mathrm{I}}$, обращая элементы $e^{(T_k-T_1)P^*(is_0)}$ в нули, получаем, что с точностью до знака $\det D_{\mathrm{I}}$ равен $M(s_0)$. Лемма доказана.

С помощью теоремы 3 аналогично [3] находим классы функций, в которых нарушается единственность. Получаем следующие результаты.

IV. *Если* $0 < a < \infty$, *то в классе функций* $M_{1,A}$, $A > a$ *задача* (1) — (2) *имеет нетривиальное решение;*

V. *Если* $a = 0$, *но* $\Delta(s)$ *не имеет вещественных нулей, то при любом* $\varepsilon > 0$ *задача* (1) — (2) *имеет нетривиальное решение* $u(x, t) \in M_{1,\varepsilon}$*;*

VI. *Если* $a = 0$ *и существует* $s_0 \in Z$, $\operatorname{Im} s_0 = 0$, *то задача* (1) — (2) *имеет нетривиальное ограниченное решение. Если при этом* $\Delta(s) \not\equiv 0$ *и решение задачи* (1) — (2) *принадлежит* $L_1(R^m)$ *или* $L_2(R^m)$, *то решение тождественно равно нулю.*

В случае «вырожденной» задачи (1) — (2) ($\Delta(s) \equiv 0$), как в [3], получаем

VII. *Если* $\Delta(s) \equiv 0$, *то задача* (1) — (2) *имеет решение* $u(x, t) \not\equiv 0$

а) *в пространстве* $M_{p_0', C}$, *при некотором* $C < 0$, *если* $p_0 > 1$*;*

б) *в пространстве* $M_{\alpha, A}$ *при любых* $\alpha > 0$, $A < 0$, *если* $p_0 = 1$*;*

в) *финитное, если* $p_0 < 1$.

6°. Исследуем вопрос о том, как изменение краевых условий (2) может влиять на характер задачи (1) — (2).

Остановимся сначала на простейшем случае $n = 1$. Задача (1) — (2) тогда имеет вид

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t), \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{l} a_k u(x, T_k) = 0, \qquad \sum_{k=1}^{l} |a_k| \neq 0. \tag{11}$$

$\Delta(s)$ задачи (10) — (11) с точностью до знака равен

$$\sum_{k=1}^{l} a_k e^{(T_k-T_1)P(-is)}.$$

Следовательно, задача (10) — (11) всегда невырождена и имеет бесконечный тип лишь в случае задачи Коши.

Перейдем к случаю $n = 2$, ограничившись рассмотрением уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial t^2} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,\ t),$$
$$x \in R^m, \quad t \in [T_0,\ T], \tag{12}$$

$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — многочлен с комплексными коэффициентами от $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}$.

Как будет видно ниже, для этого уравнения при различных условиях вида (2) задача может оказаться как вырожденной, так и невырожденной, а также, в последнем случае, может меняться ее тип. Найдем необходимые и достаточные условия для осуществления одного из «крайних» случаев, т. е. A) задача вырождена или B) задача невырождена и имеет бесконечный тип.

К уравнению (12) присоединим краевые условия

$$\sum_{k=1}^{3}\left(a_{i,\,2k-1} u(x,\ T_k) + a_{i,\,2k} \frac{\partial u(x,\ T_k)}{\partial t}\right) = 0,$$
$$T_0 \leqslant T_1 < T_2 < T_3 \leqslant T,\ (i = 1,\ 2). \tag{13}$$

Ранг матрицы краевых условий равен 2.

Записав уравнение (12) в виде системы

$$\frac{\partial u_1(x,\ t)}{\partial t} = u_2(x,\ t)$$
$$\frac{\partial u_2(x,\ t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u_1(x,\ t),$$

придем к задаче вида (1) — (2) с $n = 2$. Нетрудно посчитать, что ее определитель с точностью до знака равен

$$C^{12} + C^{34} + C^{56} + (C^{14} - C^{23})\operatorname{ch}(T_2 - T_1)\sqrt{P(-is)} +$$
$$+ C^{13}\frac{\operatorname{sh}(T_2 - T_1)\sqrt{P(-is)}}{\sqrt{P(-is)}} - C^{24}\sqrt{P(-is)}\operatorname{sh}(T_2 - T_1)\sqrt{P(-is)} +$$
$$+ (C^{16} - C^{25})\operatorname{ch}(T_3 - T_1)\sqrt{P(-is)} + C^{15}\frac{\operatorname{sh}(T_3 - T_1)\sqrt{P(-is)}}{\sqrt{P(-is)}} -$$
$$- C^{26}\sqrt{P(-is)}\operatorname{sh}(T_3 - T_1)\sqrt{P(-is)} +$$
$$+ (C^{36} - C^{45})\operatorname{ch}(T_3 - T_2)\sqrt{P(-is)} +$$
$$+ C^{35}\frac{\operatorname{sh}(T_3 - T_2)\sqrt{P(-is)}}{\sqrt{P(-is)}} - C^{46}\sqrt{P(-is)}\operatorname{sh}(T_3 - T_2)\sqrt{P(-is)},$$

где C^{ik} $(1 \leqslant i < k \leqslant 6)$ — миноры матрицы $(\underset{1}{C^\delta}\underset{2}{C^\delta}\underset{3}{C^\delta})$.

A) Выясним, при каких условиях вида (13) краевая задача (12) — (13) является вырожденной.

Пусть сначала $T_2 - T_1 \neq T_3 - T_2$. Тогда в силу линейной независимости функций

$$1;\ \operatorname{ch}(T_2 - T_1)z;\ z^{-1}\operatorname{sh}(T_2 - T_1)z;\ z\operatorname{sh}(T_2 - T_1)z;$$
$$\operatorname{ch}(T_3 - T_1)z;\ z^{-1}\operatorname{sh}(T_3 - T_1)z;\ z\operatorname{sh}(T_3 - T_1)z;$$
$$\operatorname{ch}(T_3 - T_2)z;\ z^{-1}\operatorname{sh}(T_3 - T_2)z;\ z\operatorname{sh}(T_3 - T_2)z$$

$\Delta(s) \equiv 0$ в том и только в том случае, когда

$$C^{12} + C^{34} + C^{56} = 0; \quad C^{14} - C^{23} = 0;$$
$$C^{16} - C^{25} = 0; \quad C^{36} - C^{45} = 0; \quad C^{13} = 0;$$
$$C^{24} = 0; \quad C^{15} = 0; \quad C^{26} = 0; \quad C^{35} = 0; \quad C^{46} = 0. \tag{14}$$

C^{ik} $(i \in L,\ k \in L)$ имеет вид $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$. Рассматривая всевозможные положения этого минора в матрице $(C_1^\delta C_2^\delta C_3^\delta)$ и учитывая (12), получаем, что краевые условия при этом имеют вид

$$\begin{cases} u(x,\ T_i) \pm u(x,\ T_k) = 0, \\ \dfrac{\partial u(x,\ T_i)}{\partial t} \mp \dfrac{\partial u(x,\ T_k)}{\partial t} = 0. \end{cases} \tag{15}$$
$$(1 \leqslant i < k \leqslant 3).$$

Пусть теперь $T_2 - T_1 = T_3 - T_2$. Тогда $\Delta(s) \equiv 0$ в том и только том случае, когда

$$C^{12} + C^{34} + C^{56} = 0;$$
$$C^{14} - C^{23} + C^{36} - C^{45} = 0;$$
$$C^{13} + C^{35} = 0; \quad C^{24} + C^{46} = 0;$$
$$C^{16} - C^{25} = 0; \quad C^{15} = 0; \quad C^{26} = 0. \tag{16}$$

Отсюда следует, что задача (12) — (13) будет вырожденной тогда и только тогда, когда условия (13) принимают одну из следующих форм:

$$\begin{cases} u(x,\ T_1) + a_1 \dfrac{\partial u(x,\ T_2)}{\partial t} - u(x,\ T_3) = 0 \\ \dfrac{\partial u(x,\ T_1)}{\partial t} + a_2 \dfrac{\partial u(x,\ T_2)}{\partial t} + \dfrac{\partial u(x,\ T_3)}{\partial t} = 0, \end{cases} \tag{17$_1$}$$

или

$$\begin{cases} u(x,\ T_1) + a_1 u(x,\ T_2) + u(x,\ T_3) = 0 \\ \dfrac{\partial u(x,\ T_1)}{\partial t} + a_2 u(x,\ T_2) - \dfrac{\partial u(x,\ T_3)}{\partial t} = 0, \end{cases} \tag{17$_2$}$$

или

$$\begin{cases} u(x,\ T_1) + a \dfrac{\partial u(x,\ T_1)}{\partial t} + u(x,\ T_3) + a \dfrac{\partial u(x,\ T_3)}{\partial t} = 0 \\ u(x,\ T_2) + a \dfrac{\partial u(x,\ T_2)}{\partial t} = 0, \end{cases} \tag{17$_3$}$$

$$\begin{cases} u(x,\ T_1) \pm (a + 1)\, u(x,\ T_2) + au(x,\ T_3) = 0 \\ \dfrac{\partial u(x,\ T_1)}{\partial t} \pm (a - 1) \dfrac{\partial u(x,\ T_2)}{\partial t} - a \dfrac{\partial u(x,\ T_3)}{\partial t} = 0, \\ a \neq \pm 1, \end{cases} \tag{17$_4$}$$

или

$$\begin{cases} au(x,\ T_1) - u(x,\ T_2) + (\pm 1 - a)\, u(x,\ T_3) = 0 \\ \dfrac{a}{1 \mp 2a} \dfrac{\partial u(x,\ T_1)}{\partial t} - \dfrac{\partial u(x,\ T_2)}{\partial t} + \dfrac{a - 1}{1 \mp 2a} \dfrac{\partial u(x,\ T_3)}{\partial t} = 0. \end{cases} \tag{17$_5$}$$

Тем самым установлена

Теорема 4. *Для того чтобы краевая задача* (12) — (13) *была вырожденной, необходимо и достаточно, чтобы в случае* $T_2 - T_1 \neq T_3 - T_2$ *условия* (13) *совпадали с* (15), *а в случае* $T_2 - T_1 = T_3 - T_2$ *условия* (13) *принимали один из видов* (17_1) — (17_5).

в) Найдем теперь вид краевых условий (13), при которых задача (12) — (13) имеет бесконечный тип.

Пусть снова $T_2 - T_1 \neq T_3 - T_2$. Тогда легко видеть, что $\Delta(s) \neq 0$ при всех s в том и только том случае, когда

$$\begin{gathered} C^{12} + C^{34} + C^{56} \neq 0; \quad C^{14} = C^{23}; \\ C^{16} = C^{25}; \quad C^{36} = C^{45}; \quad C^{13} = 0; \\ C^{24} = 0; \quad C^{15} = 0; \quad C^{26} = 0; \quad C^{35} = 0; \quad C^{46} = 0. \end{gathered} \tag{18}$$

В силу (18) получаем, что краевые условия здесь имеют вид

$$\begin{cases} u(x, T_i) - au(x, T_k) = 0 \\ \dfrac{\partial u(x, T_i)}{\partial t} + a \dfrac{\partial u(x, T_k)}{\partial t} = 0, \end{cases} \tag{19}$$

$$i \neq k; \ i, \ k = 1, \ 2, \ 3; \ a \neq \pm 1.$$

В случае $T_2 - T_1 = T_3 - T_2$ $\Delta(s) \neq 0$ при всех s тогда и только тогда, когда

$$\begin{gathered} C^{12} + C^{34} + C^{56} \neq 0; \\ C^{14} - C^{23} + C^{36} - C^{45} = 0; \\ C^{13} + C^{35} = 0; \quad C^{24} + C^{46} = 0; \\ C^{16} - C^{25} = 0; \quad C^{15} = 0; \quad C^{26} = 0. \end{gathered} \tag{20}$$

Краевые условия (11) при этом принимают одну из форм

$$\begin{cases} u(x, T_1) + au(x, T_2) - bu(x, T_3) = 0 \\ \dfrac{\partial u(x, T_1)}{\partial t} + a \dfrac{b+1}{b-1} \dfrac{\partial u(x, T_2)}{\partial t} + b \dfrac{\partial u(x, T_3)}{\partial t} = 0, \end{cases} \tag{21_1}$$

$$b \neq \pm 1, \quad a \neq \pm (b - 1),$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x, T_1)}{\partial t} + a \dfrac{\partial u(x, T_2)}{\partial t} + b \dfrac{\partial u(x, T_3)}{\partial t} = 0 \\ u(x, T_1) + a \dfrac{b-1}{b+1} u(x, T_2) - bu(x, T_3) = 0, \end{cases} \tag{21_2}$$

$$b \neq \pm 1, \ a \neq \pm (b + 1)^{-1},$$

или

$$\begin{cases} u(x, T_1) + a \dfrac{\partial u(x, T_1)}{\partial t} + b \dfrac{\partial u(x, T_2)}{\partial t} + u(x, T_3) + a \dfrac{\partial u(x, T_3)}{\partial t} = 0 \\ u(x, T_2) + a \dfrac{\partial u(x, T_2)}{\partial t} = 0, \end{cases} \tag{21_3}$$

$$b \neq 0,$$

или

$$\begin{cases} u(x, T_1) + a \dfrac{\partial u(x, T_1)}{\partial t} + b \dfrac{\partial u(x, T_2)}{\partial t} + u(x, T_3) - a \dfrac{\partial u(x, T_3)}{\partial t} = 0 \\ u(x, T_2) = 0, \end{cases} \tag{21_4}$$

$$b \neq 0,$$

или

$$\begin{cases} u(x, T_1) + a \dfrac{\partial u(x, T_1)}{\partial t} + bu(x, T_2) - au(x, T_3) + \dfrac{\partial u(x, T_3)}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial u(x, T_2)}{\partial t} = 0, \end{cases} \tag{21_5}$$

$$b \neq 0,$$

ли

$$\begin{cases} u(x, T_i) - au(x, T_2) = 0 \\ \dfrac{\partial u(x, T_i)}{\partial t} + a\dfrac{\partial u(x, T_2)}{\partial t} = 0, \end{cases} \tag{21_6}$$

$$i = 1,\ 3; \quad a \neq \pm 1,$$

ли

$$\begin{cases} \dfrac{a(a+b)}{a-b} u(x, T_i) + u(x, T_2) - au(x, T_k) = 0 \\ \dfrac{b(a+b)}{a-b} \dfrac{\partial u(x, T_i)}{\partial t} - \dfrac{\partial u(x, T_2)}{\partial t} + b\dfrac{\partial u(x, T_k)}{\partial t} = 0, \end{cases} \tag{21_7}$$

$$a \neq b; \quad \frac{2ab}{a-b} \neq \pm 1; \quad i \neq k; \ i, k = 1,\ 3.$$

Теорема 5. *Краевая задача* (12)—(13) *имеет бесконечный тип тогда и олько тогда, когда краевые условия* (13) *имеют вид* (19) *при* $T_2 - T_1 \neq T_3 - T_2$ *и один из видов* (21_1)—(21_7) *при* $T_2 - T_1 = T_3 - T_2$.

В заключение авторы благодарят В. М. Борок за внимание к работе и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Антыпко. О краевой задаче в бесконечном слое для систем нейных дифференциальных уравнений в частных производных. Вестник ХГУ, 36, серия мех.-матем. Зап. мех.-мат. ф-та и ХМО, т. 36, 1969; стр. 62—72.

2. В. М. Борок, М. А. Перельман. О классах единственности реения многоточечной краевой задачи в бесконечном слое. «Изв. вузов. Математика», № 11, 1972.

3. В. М. Борок. Классы единственности решения краевой задачи в бесонечном слое для систем линейных уравнений в частных производных с постонными коэффициентами. «Матем. сб.», 79 (121) 2 (6), 1969, стр. 293—304.

Поступила 25 февраля 1971 г.