ТЕОРЕМЫ ТИПА ОСТРОВСКОГО ДЛЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ, ПРЕДСТАВИМЫХ РЯДАМИ ДИРИХЛЕ

З. Г. Габович

В этой заметке рассматриваются вопросы сверхсходимости рядов

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\lambda_n, z)}, \tag{1}$$

где

$$(\lambda_n, z) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_n^{(j)} z^{(j)}$$

скалярное произведение векторов

$$\lambda_n = \left(\lambda_n^{(1)}, \ \ldots, \ \lambda_n^{(p)}\right)$$

и

$$z = (z^{(1)}, \ \ldots, \ z^{(p)})$$

в комплексном пространстве C^p. Пусть

$$|z| = \sum_{j=1}^{p} |z^{(j)}|.$$

Предполагается, что

$$|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \cdots \leqslant |\lambda_n| \to \infty \tag{2}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{|\lambda_n|} = 0. \tag{3}$$

Из условия (3) следует, что ряд (1) абсолютно сходится в каждой точке z, для которой

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|a_n| - \operatorname{Re}(\lambda_n, z)}{|\lambda_n|} < 0,$$

а в любой точке z, в которой

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|a_n| - \operatorname{Re}(\lambda_n, z)}{|\lambda_n|} > 0,$$

этот ряд расходится.

Пусть $\{n_p\}$ — последовательность всех тех индексов, для которых

$$\left|\frac{\lambda_{n_p}}{|\lambda_{n_p}|} - s\right| \leqslant \varepsilon$$

(s — точка p-мерной комплексной сферы $|s| = 1$). Если ввести функции

$$\omega(s, \varepsilon) = \overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{\ln|a_{n_p}|}{|\lambda_{n_p}|}$$

и

$$\omega(s) = \lim_{\varepsilon\to 0} \omega(s, \varepsilon),$$

то, используя метод, предложенный в статье [1] для случая одного переменного, нетрудно доказать, что неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|a_n| - \operatorname{Re}(\lambda_n, z)}{|\lambda_n|} < 0$$

определяет область

$$\Omega = \operatorname{int} \bigcap_{|s|=1} \{z : \operatorname{Re}(s, z) \geqslant \omega(s)\}.$$

Ряд (1) абсолютно сходится во всех точках области Ω и расходится во всякой точке, внешней к этой области.

Пусть η — произвольное положительное число.

Обозначим

$$\Omega_{\eta} = \operatorname{int} \bigcap_{|s|=1} \{z : \operatorname{Re}(s, z) \geqslant \omega(s) - \eta\},$$

$$\Omega_{-\eta} = \operatorname{int} \bigcap_{|s|=1} \{z : \operatorname{Re}(s, z) \geqslant \omega(s) + \eta\}.$$

Лемма. *Пусть D_{η} и $D_{-\eta}$ — ограниченные области, причем*

$$D_{\eta} \subset \Omega_{\eta},$$

а

$$D_{-\eta} \subset \Omega_{-\eta}.$$

Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно найти такое $N(\varepsilon)$, что для всех $z \in \overline{D}_{\eta}$ выполняется неравенство

$$\sum_{n=1}^{N} | a_n e^{-(\lambda_n, z)} | < \exp[(\eta + \varepsilon) | \lambda_N |], \tag{4}$$

а для всех $z \in \overline{D}_{-\eta}$ выполняется неравенство

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} | a_n e^{-(\lambda_n, z)} | < \exp[-(\eta - \varepsilon) | \lambda_{N+1} |], \tag{5}$$

если $N > N(\varepsilon)$.

Доказательство. Из определения Ω_{η} и $\Omega_{-\eta}$ вытекает, что Ω_{η} является областью абсолютной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\eta|\lambda_n|} e^{-(\lambda_n, z)},$$

а $\Omega_{-\eta}$ — областью абсолютной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\eta|\lambda_n|} e^{-(\lambda_n, z)}.$$

Поскольку области D_{η} и $D_{-\eta}$ ограничены, то существует такое число $\gamma > 0$, $\gamma < \eta$, $\gamma < \frac{\varepsilon}{4}$, что

$$\sup_{z \in D_{\eta}} \sum_{n=1}^{\infty} | a_n | e^{-(\eta+\gamma)|\lambda_n|} | e^{-(\lambda_n, z)} | < C \tag{6}$$

и

$$\sup_{z \in D_{-\eta}} \sum_{n=1}^{\infty} | a_n | e^{(\eta-\gamma)|\lambda_n|} | e^{-(\lambda_n, z)} | < C. \tag{7}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $N(\varepsilon)$ таким образом, чтобы

$$C < \exp\left(\frac{\varepsilon}{2} | \lambda_{N(\varepsilon)} |\right)$$

и чтобы при всех $N > N(\varepsilon)$ выполнялись неравенства

$$\exp\left(\frac{\varepsilon}{4} | \lambda_N |\right) > N, \tag{8}$$

$$\ln \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-(\eta-\gamma)|\lambda_n|} < -\left(\eta - \frac{\varepsilon}{2}\right) |\lambda_{N+1}| \tag{9}$$

(это следует из формул для абсциссы абсолютной сходимости ряда Дирихле).

Согласно формулам (6) и (8) имеем для $z \in \overline{D}_\eta$ и $N > N(\varepsilon)$

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n e^{-(\lambda_n, z)}| \leqslant \left[\sum_{n=1}^{N} |a_n| e^{-(\eta+\gamma)|\lambda_n|} |e^{-(\lambda_n, z)}|\right] \left[\sum_{n=1}^{N} e^{(\eta+\gamma)|\lambda_n|}\right] <$$

$$< \left[\exp\left(\frac{\varepsilon}{2} |\lambda_N|\right)\right] \cdot N \cdot \exp(\eta+\gamma) |\lambda_N|) < \exp[(\eta+\varepsilon) |\lambda_N|].$$

Используя (7) и (9), получаем для $z \in \overline{D}_{-\eta}$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n e^{-(\lambda_n, z)}| \leqslant \left[\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| e^{(\eta-\gamma)|\lambda_n|} |e^{-(\lambda_n, z)}|\right] \cdot \left[\sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-(\eta-\gamma)|\lambda_n|}\right] <$$

$$< \exp\left(\frac{\varepsilon}{2} |\lambda_{N+1}|\right) \cdot \exp\left[-\left(\eta - \frac{\varepsilon}{2}\right) |\lambda_{N+1}|\right] = \exp[-(\eta-\varepsilon) |\lambda_{N+1}|]$$

при $N > N(\varepsilon)$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть*

$$|\lambda_{N_k+1}| > (1+\theta) |\lambda_{N_k}| \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

где $\theta > 0$. Пусть, далее, можно найти поликруг

$$U(z_0, r_0) = \{z : |z^{(j)} - z_0^{(j)}| < r_0, \ j = 1, \ldots, p\} \subset \Omega,$$

касающийся $\partial\Omega$ в точке ζ. Если функция $f(z)$ голоморфна при $z = \zeta$, то последовательность частных сумм

$$S_{N_k}(z) = \sum_{n=1}^{N_k} a_n e^{-(\lambda_n, z)}, \ k = 1, 2, \ldots,$$

равномерно сходится к $f(z)$ в некоторой области, содержащей точку ζ.

Доказательство. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в окрестности W точки ζ. Возьмем поликруг

$U(z_1, r_1) \subset W \cap U(z_0, r_0)$, касающийся $\partial\Omega$ в точке ζ; построим поликруги $U(z_1, r_1 - \eta)$, $U(z_1, r_1 + \sigma)$, $U(z_1, r_1 + \eta)$ так, чтобы $0 < \sigma < \eta < r_1$. Обозначим через $M_k(r)$ максимум модуля функции

$$f(z) - S_{N_k}(z)$$

в $\overline{U}(z_1, r)$.

Поскольку

$$U(z_1, r_1) \subset \Omega,$$

то

$$U(z_1, r_1 + \eta) \subset \Omega_\eta,$$

а

$$U(z_1, r_1 - \eta) \subset \Omega_{-\eta}.$$

Отождествим D_η с $U(z_1, r_1 + \eta)$ и $D_{-\eta}$ — с $U(z_1, r_1 - \eta)$. Согласно лемме для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое натуральное N_ε, что

$$M_k(r_1 - \eta) < \exp[-(\eta - \varepsilon) |\lambda_{N_k+1}|], \tag{10}$$

$$M_k(r_1 + \eta) < c + \max_{z \in \overline{U(z_1, r_1+\eta)}} \sum_{n=1}^{N_k} |a_n e^{-(\lambda_n, z)}| < \exp[(\eta + \varepsilon) |\lambda_{N_k}|], \tag{11}$$

если $N_k > N_\varepsilon$. Поскольку

$$\ln M_k(r)$$

является выпуклой функцией от $\ln r$ [3], то

$$\ln M_k(r_1 + \sigma) \leqslant \frac{\ln(r_1 + \eta) - \ln(r_1 + \sigma)}{\ln(r_1 + \eta) - \ln(r_1 - \eta)} \ln M_k(r_1 - \eta) +$$
$$+ \frac{\ln(r_1 + \sigma) - \ln(r_1 - \eta)}{\ln(r_1 + \eta) - \ln(r_1 - \eta)} \ln M_k(r_1 + \eta).$$

Отсюда с помощью неравенств (10) и (11) находим при $N_k > N_\varepsilon$

$$\ln M_k(r_1 + \sigma) < -\frac{\ln(r_1 + \eta) - \ln(r_1 + \sigma)}{\ln(r_1 + \eta) - \ln(r_1 - \eta)} (\eta - \varepsilon) |\lambda_{N_k+1}| +$$
$$+ \frac{\ln(r_1 + \sigma) - \ln(r_1 - \eta)}{\ln(r_1 + \eta) - \ln(r_1 - \eta)} (\eta + \varepsilon) |\lambda_{N_k}| < -\frac{\ln(r_1 + \sigma) - \ln(r_1 - \eta)}{\ln(r_1 + \eta) - \ln(r_1 - \eta)} \times$$
$$\times \left[\frac{\ln(r_1 + \eta) - \ln(r_1 + \sigma)}{\ln(r_1 + \sigma) - \ln(r_1 - \eta)} \cdot \frac{(\eta - \varepsilon)}{(\eta + \varepsilon)} (1 + \theta) - 1\right] (\eta + \varepsilon) |\lambda_{N_k}|, \tag{12}$$

каким бы малым ни было $\varepsilon > 0$.

Положим $\sigma = \eta^2$. Тогда

$$\lim_{\eta \to 0} \frac{\ln(r_1 + \eta) - \ln(r_1 + \sigma)}{\ln(r_1 + \sigma) - \ln(r_1 - \eta)} = 1.$$

Значит, можно найти такие $\eta_0 > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$, что

$$\frac{\ln(r_1 + \eta) - \ln(r_1 + \sigma)}{\ln(r_1 + \sigma) - \ln(r_1 - \eta)} \cdot \frac{(\eta - \varepsilon)}{(\eta + \varepsilon)} \cdot (1 + \theta) > 1,$$

если $\eta \leqslant \eta_0$ и $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Полагая в (12)

$$\eta = \eta_0, \quad \sigma = \eta_0^2 \text{ и } \varepsilon = \varepsilon_0,$$

получаем, что правая часть неравенства (12) стремится к $-\infty$ при $k \to \infty$, так что

$$\lim_{k \to \infty} M_k(r_1 + \sigma) = 0$$

Следовательно, если σ достаточно мало, то последовательность $\{S_{N_k}(z)\}$ равномерно сходится к функции $f(z)$ в $\overline{U(z_1, r_1 + \sigma)}$, содержащем точку ζ. Доказательство закончено.

Теорема 2. *Пусть*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|\lambda_{N_k+1}|}{|\lambda_{N_k}|} = \infty.$$

Тогда последовательность частных сумм $\{S_{N_k}(z)\}$ ряда (1) *равномерно сходится в любом поликруге $U(z_0, r_0)$, где $z_0 \in \Omega$, компактно принадлежащем области голоморфности функции $f(z)$.*

Доказательство. Пусть

$$\overline{U(z_0, r_1)} \subset U(z_0, r_0) \cap \Omega$$

поликруг

$$U(z_0, r_2) \quad (r_2 > r_0)$$

принадлежит области голоморфности функции $f(z)$. Обозначим через ...аксимум модуля функции $f(z) - S_{N_k}(z)$ в $\overline{U(z_0, r)}$.

...рем числа β_1 и β_2 $(0 < \beta_1, \beta_2 < \infty)$ так, чтобы

$$U(z_0, r_1) \subset \Omega_{-\beta_1},$$

$$U(z_0, r_2) \subset \Omega_{\beta_2}.$$

...гласно лемме для любого $\varepsilon > 0$ $\varepsilon < \beta_1$ найдется такое натуральное N_ε, что

$$M_k(r_1) < \exp[-(\beta_1 - \varepsilon) | \lambda_{N_{k+1}} |], \tag{13}$$

$$M_k(r_2) < c + \max_{z \in U(z_0, r_2)} \sum_{n=1}^{N_k} | a_n e^{-(\lambda_n, z)} | < \exp[(\beta_2 + \varepsilon) | \lambda_{N_k} |], \tag{14}$$

... $> N_\varepsilon$.

...ку $\ln M_k(r)$ является выпуклой функцией от $\ln r$, то

$$\ln M_k(r_0) \leqslant \frac{\ln r_2 - \ln r_0}{\ln r_2 - \ln r_1} \ln M_k(r_1) + \frac{\ln r_0 - \ln r_1}{\ln r_2 - \ln r_1} \ln M_k(r_2).$$

...гласно формулам (13) и (14) получаем при $N_k > N_\varepsilon$

$$\ln M_k(r_0) < -\frac{\ln r_2 - \ln r_0}{\ln r_2 - \ln r_1} (\beta_1 - \varepsilon) |\lambda_{N_{k+1}}| + \frac{\ln r_0 - \ln r_1}{\ln r_2 - \ln r_1} (\beta_2 + \varepsilon) | \lambda_{N_k} | =$$

$$= \left[-\frac{\ln r_2 - \ln r_0}{\ln r_2 - \ln r_1} (\beta_1 - \varepsilon) \frac{|\lambda_{N_{k+1}}|}{|\lambda_{N_k}|} + \frac{\ln r_0 - \ln r_1}{\ln r_2 - \ln r_1} (\beta_2 + \varepsilon) \right] | \lambda_{N_k} |$$

для произвольного $\varepsilon > 0$. Выражение в квадратных скобках стремится к $-\infty$ при $k \to \infty$ и, следовательно,

$$\{S_{N_k}(z)\} \; S_{N_k}(z)$$

равномерно сходится к функции $f(z)$ в $\overline{U(z_0, r_0)}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Л. Лунц. О некоторых обобщениях рядов Дирихле. «Матем. сб.», 10 (52) № 1—2, 1942, 33—50.

2. Г. Л. Лунц. О сверхсходимости некоторых рядов. «Изв. АН Арм. ССР», 15, № 5, 1962, 11—26.

Поступила 28 января 1971 г.