СПЕКТРАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ ТИПА МАРЧЕНКО БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю. Л. Кишакевич

В этой работе мы занимаемся следующими задачами для бесконечных систем линейных конечноразностных уравнений:

а) построение обобщенной спектральной функции (о. с. ф.) типа Марченко и равенства Парсеваля—Марченко *;

б) решение обратной задачи спектрального анализа по о. с. ф. типа Марченко;

в) вывод равенства Парсеваля для самосопряженного случая из равенства Парсеваля — Марченко.

Настоящая работа аналогична работе Ф. С. Рофе-Бекетова [1] о бесконечных системах линейных дифференциальных уравнений. В связи с тем, что в рассматриваемом нами случае независимое переменное меняется дискретно, мы не всюду могли следовать методам, применяемым В. А. Марченко [2] и Ф. С. Рофе-Бекетовым [1].

§ 1. Бесконечную систему линейных уравнений удобно трактовать, как одно операторное уравнение. Мы не существенно обобщим постановку задачи, заменяя операторные коэффициенты элементами произвольной алгебры.

Пусть F — некоторая комплексная алгебра с единицей [5]. Введем такие обозначения:

а) F_0^∞ — совокупность финитных последовательностей элементов из F;

б) $\hat{F}_0^\infty$ — совокупность полиномов от λ, коэффициентами которых являются элементы F;

в) $E_j(\lambda) = \lambda^j I$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$, где I — единица F.

Правым F-отображением назовем отображение S^+ $\hat{F}_0^\infty \ni P \to \langle S^+ \mid P \rangle \in F$, удовлетворяющее условию:

$$\langle S^+ \mid P_1 \cdot A + P_2 \cdot B \rangle = \langle S^+ \mid P_1 \rangle A + \langle S^+ \mid P_2 \rangle B$$

* Отметим, что уже в случае одного разностного выражения с экспоненциально убывающим потенциалом спектральная функция, вообще говоря, не является мерой, а оказывается обобщенной функцией, связанной с регуляризацией особенностей типа полюса (см. [3, 4]).

для произвольных P_1, $P_2 \in \hat{F}_0^\infty$, A, $B \in F$.

Левым F — отображением назовем отображение $S^- \ \hat{F}_0^\infty \ni P \to \langle P \mid S^- \rangle \in F$, удовлетворяющее условию:

$$\langle A \cdot P_1 \dotplus B \cdot P_2 \mid S^- \rangle = A \langle P_1 \mid S^- \rangle \dotplus B \langle P_2 \mid S^- \rangle$$

для произвольных A, $B \in F$, P_1, $P_2 \in \hat{F}_0^\infty$.

Согласно определениям, левые и правые F-отображения можно задавать, указывая их значения на E_j:

$$S_j^+ = \langle S^+ \mid E_j \rangle; \ S_j^- = \langle E_j \mid S^- \rangle; \ j = 0, 1, 2, \ldots,$$

где S_j^+, $S_j^- \in F$. Установим между совокупностями левых и правых F-отображений взаимнооднозначное соответствие $S^+ \leftrightarrow S^-$, если $S_i^+ = S_i^- = S_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$

Совокупность последовательностей $S = \{S_j\}_{j=0}^\infty$, $S_j \in F$ обозначим через $(\hat{F}_0^\infty)'$. Очевидно, каждая такая последовательность порождает одно левое и одно правое F-отображение по формуле

$$\langle E_j \mid S \rangle = S_j = \langle S \mid E_j \rangle. \tag{1.1}$$

Определим операцию умножения слева правого F-отображения S на произвольный полином $Q(\lambda) \sum_{i=0}^{m} A_i \lambda^i \in \hat{F}_0^\infty$ по формуле

$$\langle Q \cdot S \mid P \rangle = \sum_{i=0}^{m} A_i \langle S \mid \lambda^i P(\lambda) \rangle.$$

Аналогично вводится умножение справа левого F-отображения S на произвольный полином из $\hat{F}_0^\infty$ по формуле

$$\langle Q \mid S \cdot P \rangle = \sum_{j=0}^{m} \langle Q \cdot \lambda^j \mid S \rangle B_j; \ (P(\lambda) = \sum_{j=0}^{m} B_j \lambda^j).$$

Непосредственным подсчетом легко убедиться в справедливости такого равенства

$$\langle Q \mid S \cdot P \rangle = \langle Q \cdot S \mid P \rangle \tag{2.1}$$

для произвольных Q, $P \in \hat{F}_0^\infty$; $S \in (\hat{F}_0^\infty)'$. Вследствие равенства (2.1) можно ввести такое обозначение:

$$\langle Q \mid S \mid P \rangle \stackrel{df}{=} \langle Q \cdot S \mid P \rangle. \tag{3.1}$$

Легко видеть, что для произвольных $S \in (\hat{F}_0^\infty)'$, $P \in \hat{F}_0^\infty$

$$\langle I \mid S \mid P \rangle = \langle S \mid P \rangle. \tag{4.1}$$

Кроме того, введем в рассмотрение матрицы $a = \{A_{ij}\}$ порядка n с элементами из алгебры F. Совокупность всех матриц n-го порядка над F образует кольцо F_n [6] относительно матричных операций умножения и сложения. Для каждого $i \neq j$ и произвольного $C \in F$ обозначим через $b_{ij}(C)$ матрицу, получающуюся из единичной матрицы заменой элемента $A_{ij} = 0$ единичной матрицы на C.

Определение 1.1. *Унимодулярными матрицами назовем матрицы, принадлежащие к группе, образующими которой являются всевозможные матрицы* $b_{ij}(C)$ $(i \neq j)$ C пробегает F.

Нетрудно убедиться в справедливости такого утверждения.

Лемма 1.1. *Всякая треугольная матрица с регулярными элементами* ...*ебры F по диагонали обратима.*

§ 2. Пусть $\{A_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{B_j\}_{j=0}^{\infty}$ — некоторые бесконечные последовательности ...ементов алгебры F, причем A_j $(j=0, 1, \ldots)$ — регулярны. С помощью этих ...следовательностей строим разностное выражение l, которое преобразует $U \in F_0^{\infty}$ ... последовательность $\{lU\}_{j=0}^{\infty}$ по формуле

$$(lU)_j = A_j U_{j+1} + A_{j-1} U_{j-1} + B_j U_j. \tag{A}$$

При подсчете (lU_0) полагаем, что

$$U_{-1} = 0. \tag{B}$$

Одновременно рассматриваем выражение, транспонированное к (A):

$$(\tilde{l}U)_j = U_{j+1} A_j + U_{j-1} A_{j-1} + U_j B_j, \tag{1.2}$$

причем

$$U_{-1} = 0. \tag{2.2}$$

Пусть $\Omega(\lambda) = \{\Omega_j(\lambda)\}_{j=0}^{\infty}$, $\tilde{\Omega}(\lambda) = \{\tilde{\Omega}_j(\lambda)\}_{j=0}^{\infty}$ удовлетворяют соотношениям

$$(l\Omega)_j(\lambda) = \lambda \Omega_j(\lambda), \quad \Omega_{-1} = 0, \quad \Omega_0 = I, \tag{3.2}$$

$$(\tilde{l}\tilde{\Omega})_j(\lambda) = \lambda \tilde{\Omega}_j(\lambda), \quad \tilde{\Omega}_{-1} = 0, \quad \Omega_0 = I. \tag{4.2}$$

Из уравнений (3.2) и (4.2) вытекает, что $\Omega_j(\lambda)$, $\tilde{\Omega}_j(\lambda)$ — многочлены точно j-й степени над F, причем старший коэффициент многочлена $\Omega_j(\lambda)$ равен

$$C_{j,j} = A_{j-1}^{-1} A_{j-2}^{-1} \cdots A_0^{-1}, \tag{5.2}$$

а старший коэффициент многочена $\tilde{\Omega}_j(\lambda)$ равен

$$D_{j,j} = A_0^{-1} A_1^{-1} \cdots A_{j-1}^{-1}. \tag{6.2}$$

Введем Ω и $\tilde{\Omega}$-преобразования Фурье элементов $U = (U_0, U_1, \ldots) \in F_0^{\infty}$ по формулам

$$(U\Omega)(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \Omega_n(\lambda), \tag{7.2}$$

$$(\tilde{\Omega}U)(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\Omega}_n(\lambda) U_n. \tag{8.2}$$

Теорема 1.2. *Совокупность Ω и $\tilde{\Omega}$-преобразований Фурье всех элементов из F_0^{∞} совпадает с $\hat{F}_0^{\infty}$. Любой полином $P \in \hat{F}_0^{\infty}$ степени n единственным образом представляется в виде*

$$P(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} U_j \Omega_j(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} \tilde{\Omega}_j(\lambda) V_j; \quad U_j, V_j \in F, \ j = 0, 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Пусть $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} P_i \lambda^i$, $\Omega_i(\lambda) = \sum_{k=0}^{i} C_{i,k} \lambda^k$. Тогда из равенства $\sum_{k=0}^{n} P_k\lambda^k = \sum_{j=0}^{n} U_j\left(\sum_{k=0}^{l} C_{j,\,k}\lambda^k\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=k}^{n} U_jC_{j,\,k}\right)\lambda^k$ вытекает, что

$$P_k = \sum_{j=k}^{n} U_jC_{j,\,k} \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n). \tag{9.2}$$

Матрица системы (9.2) относительно неизвестных $U_0, \ldots, U_n$ — верхняя треугольная с элементами $C_{j,\,j}$ на диагонали. Вследствие (5.2) $C_{j,\,j}$ — регулярны и, согласно лемме 1.1, матрица системы (9.2) обратимая. Таким образом, система (9.2) имеет единственное решение $(U_0,\ U_1,\ \ldots,\ U_n)$. Аналогично доказывается теорема для $\widetilde{\Omega}$-преобразования Фурье.

Замечание. Из равенства (8.2) следует, что

$$\widetilde{\Omega}(U \cdot A + V \cdot B) = (\widetilde{\Omega}U) \cdot A + (\widetilde{\Omega}V) \cdot B \tag{10.2}$$

для произвольных $U,\ V \in F_0^\infty,\ A,\ B \in F$.

Зададим отображение $R : \hat{F}_0^\infty \to F$ по формуле

$$\langle R \mid \hat{U}(\lambda)\rangle = (\widetilde{\Omega}^{-1}\hat{U})_0,\ \hat{U} \in \hat{F}_0^\infty, \tag{11.2}$$

или, что то же самое (теорема 1.2):

$$\langle R \mid (\widetilde{\Omega}U)(\lambda)\rangle = U_0,\quad U \in F_0^\infty. \tag{12.2}$$

Вследствие (10.2) $R \in (F_0^\infty)'$.

Теорема 2.2. *F-отображение R, определенное формулой* (11.2) *(или, что то же самое,* (12.2)*) является о. с. ф. типа Марченко задачи (A) — (B), т. е. для произвольных $U = \{U_j\}_{j=0}^\infty$, $V = \{V_j\}_{j=0}^\infty \in F_0^\infty$ имеет место равенство Парсеваля-Марченко*

$$\langle (U\Omega)(\lambda) \mid R \mid (\widetilde{\Omega}V)(\lambda)\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} U_jV_j. \tag{13.2}$$

Доказательство. Обозначим через $I_n = \{0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ I\ 0,\ \ldots\}$ — такой элемент из F_0^∞, в котором n-я координата I, а все остальные 0. Тогда из (12.2) следует, что

$$\langle R \mid \widetilde{\Omega}_n(\lambda)\rangle = \langle R \mid (\widetilde{\Omega}I_n)(\lambda)\rangle = \delta_{n0} \cdot I. \tag{14.2}$$

Лемма 1.2. $\langle \Omega_n \mid R \mid \Omega_k\rangle = \delta_{nk} \cdot I;\ n,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

Доказательство (методом математической индукции). Вследствие равенств (14.2) и (4.1) получаем, что при любых $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

$$\langle \Omega_0 \mid R \mid \widetilde{\Omega}_k\rangle = \delta_{0k} \cdot I.$$

Допустим, что для $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$ и любых $k = 0,\ 1,\ \ldots$

$$\langle \Omega_j \mid R \mid \widetilde{\Omega}\rangle = \delta_{jk} \cdot I$$

и докажем, что при любых $k = 0,\ 1,\ \ldots$

$$\langle \Omega_n \mid R \mid \widetilde{\Omega}_k\rangle = \delta_{nk} \cdot I.$$

Используя равенства (3.2) и (4.2), нетрудно получить соотношение

$$\begin{aligned}\langle \Omega_n \mid R \mid \widetilde{\Omega}_k\rangle &= A_{n-1}^{-1}\langle \Omega_{n-1} \mid R \mid \widetilde{\Omega}_{k+1}\rangle A_k - \\ &- A_{n-1}^{-1}B_{n-1}\langle \Omega_{n-1} \mid R \mid \widetilde{\Omega}_k\rangle - A_{n-1}^{-1}A_{n-2}\langle \Omega_{n-2} \mid R \mid \widetilde{\Omega}_k\rangle + \\ &+ A_{n-1}^{-1}\langle \Omega_{n-1} \mid R \mid \widetilde{\Omega}_{k-1}\rangle \cdot A_{k-1} + A_{n-1}^{-1}\langle \Omega_{n-1} \mid R \mid \Omega_k\rangle B_k.\end{aligned} \tag{15.2}$$

Рассмотрим такие случаи:

а) $k > n$ или $k \leqslant n-3$: все члены в правой части равенства (15.2) равны 0 и поэтому $\langle \Omega_n | R | \widetilde{\Omega}_k \rangle = 0$;

б) $k = n-2 : \langle \Omega_n | R | \widetilde{\Omega}_{n-2} \rangle = A_{n-1}^{-1} A_{n-2} - A_{n-1}^{-1} A_{n-2} = 0$;

в) $k = n-1 : \langle \Omega_n | R | \widetilde{\Omega}_{n-1} \rangle = A_{n-1}^{-1} B_{n-1} - A_{n-1}^{-1} B_{n-1} = 0$;

г) $k = n : \langle \Omega_n | R | \widetilde{\Omega}_n \rangle = A_{n-1}^{-1} \cdot A_{n-1} = I$.

Лемма доказана.

Из леммы 1.2, линейности $R \in (\hat{F}_0^{\infty})'$ и определений Ω- и $\widetilde{\Omega}$-преобразований Фурье вытекает, что для произвольных $U, V \in F_0^{\infty}$ имеет место равенство (13.2). Теорема доказана.

§ 3. Обратную задачу решаем для выражения (А), в котором $A_j = I$ ($j = 0, 1, \ldots$), т. е. для выражения

$$(lU)_j = U_{j+1} + U_{j-1} + B_j U_j, \tag{C}$$

причем

$$U_{-1} = 0. \tag{D}$$

В этом случае в силу (5.2) и (6.2) старшие коэффициенты полиномов $\Omega_n(\lambda)$, $\widetilde{\Omega}_n(\lambda)$ равны I.

Если R — о. с. ф. задачи (C) — (D), то из леммы 1.2 вытекает, что

$$\langle R | \lambda^k \widetilde{\Omega}_n(\lambda) \rangle = \delta_{nk} \cdot I, \quad k \leqslant n, \tag{1.3}$$

$$\langle \lambda^k \Omega_n(\lambda) | R \rangle = \delta_{nk} \cdot I, \quad k \leqslant n. \tag{2.3}$$

Таким образом, коэффициенты $D_{n,0}, D_{n,1}, \ldots, D_{n,n-1}, I$ многочлена $\Omega_n(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} D_{n,j} \lambda^j$; $(D_{n,n} = I)$ удовлетворяют системе уравнений

$$r_n \cdot d_n = e_n; \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.3}$$

где

$$r_n = \begin{pmatrix} IR_1 \cdots R_n \\ R_1 R_2 \cdots R_{n+1} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ R_{n-1} R_n \cdots R_{2n-1} \\ R_n R_{n+1} \cdots R_{2n} \end{pmatrix}; \quad d_n = \begin{pmatrix} D_{n,0} \\ D_{n,1} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ D_{n,n-1} \\ I \end{pmatrix}; \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ I \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Теорема 1.3. *Для того чтобы $R = \{R_j\}_{j=0}^{\infty}$ ($R_j \in F$, $R_0 = I$) была о. с. ф. задачи* (C) — (D), *необходимо и достаточно, чтобы матрицы r_n ($n = 0, 1, \ldots$)* (см. (4.3)), *были унимодулярными (см. определение 1.1).*

Доказательство. *Необходимость.* Из (3.3) следует, что

$$r_n \cdot \begin{pmatrix} I & D_{1,0} & D_{2,0} & \cdots & D_{n,0} \\ 0 & I & D_{2,1} & \cdots & D_{n,1} \\ 0 & 0 & I & \cdots & D_{n,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ R_1 & I & 0 & \cdots & 0 \\ R_2 & * & I & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R_n & * & * & \cdots & I \end{pmatrix}$$

(элементы, отмеченные звездочками, нас не интересуют). Из этого соотношения легко вытекает унимодулярность матрицы r_n и представимость ее в виде произведения нижнетреугольной унимодулярной матрицы на верхнетреугольную унимодулярную матрицу.

Достаточность. Пусть задано $R=\{R_j\}_{j=0}^{\infty}$, $(R_j\in F,\ R_0=I)$ и матрицы r_n (4.3) — унимодулярны при всех $n=0,1,2,\ldots$. Сначала находим две системы многочленов $\{\Omega_n(\lambda)\}$, $\{\widetilde{\Omega}_n(\lambda)\}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ такие, что

а) $\Omega_n(\lambda)$, $\widetilde{\Omega}_n(\lambda)$ — многочлены n-й степени относительно λ;

б) $\langle R\mid\lambda^k\widetilde{\Omega}_n(\lambda)\rangle=\delta_{nk}\cdot I;\quad k\leqslant n$

$$\langle\lambda^k\Omega_n(\lambda)\mid R\rangle=\delta_{nk}\cdot I;\quad k\leqslant n.$$

Таким образом, коэффициенты многочленов

$$\widetilde{\Omega}_n(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}D_{n,\,k}\lambda^k,\quad \Omega_n(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}C_{n,\,k}\lambda^k$$

удовлетворяют системам уравнений

$$r_n\cdot\begin{pmatrix}D_{n,\,0}\\ \cdots\\ D_{n,\,n-1}\\ D_{n,\,n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \cdots\\ 0\\ I\end{pmatrix}\tag{5.3}$$

$$(C_{n,\,0},\ldots,C_{n,\,n-1},C_{n,\,n})\cdot r_n=(0,0,\ldots,0,I).\tag{6.3}$$

Вследствие унимодулярности матриц r_n системы (5.3) и (6.3) имеют единственные решения при всех $n=0,1,2,\ldots$, причем $D_{n,\,n}=C_{n,\,n}=I$.

Пусть $\lambda\Omega_n(\lambda)=A_{n,\,n+1}\Omega_{n+1}(\lambda)+A_{n,\,n}\Omega_n(\lambda)+\cdots$

Тогда

$$\langle\lambda\Omega_n(\lambda)\mid R\mid\widetilde{\Omega}_k(\lambda)\rangle=\sum_{i=0}^{n+1}A_{n,\,i}\langle\Omega_i\mid R\mid\widetilde{\Omega}_k\rangle.$$

Так как при $k<n-1$

$$\langle\lambda\Omega_n(\lambda)\mid R\mid\widetilde{\Omega}_k(\lambda)\rangle=\langle\Omega_n(\lambda)\mid R\mid\lambda\Omega_k(\lambda)\rangle=0,$$

то $A_{n,\,k}=0$ при $k<n-1$. Легко подсчитать, что $A_{n,\,n-1}=A_{n,\,n+1}=I$. Обозначив $A_{n,\,n}$ через B_n, получим

$$\lambda\Omega_n(\lambda)=\Omega_{n+1}(\lambda)+\Omega_{n-1}(\lambda)+B_n\Omega_n(\lambda),$$

где $B_n=\langle\lambda\Omega_n(\lambda)\mid R\mid\widetilde{\Omega}_n(\lambda)\rangle$. Теорема доказана.

§ 4. Пусть F — алгебра с инволюцией $U\to U^*$ [5].

Теорема 1.4. Если $R=\{R_j\}_{j=0}^{\infty}(R_j\in F,\ R_0=I)$ — *о. с. ф. задачи* (C) — (D), *то* $R^*\overset{df}{=}\{R_j^*\}_{j=0}^{\infty}$ — *о. с. ф. задачи*;

$$(l_1U)_j=U_{j+1}+U_{j-1}+B_j^*U_j,\tag{E}$$

$$U_{-1}=0.\tag{F}$$

Доказательство. Обозначим выражение, транспонированное к выражению (E) через $\widetilde{l}_1$. Пусть $\Theta(\lambda)=\{\Theta_j(\lambda)\}_{j=0}^{\infty}$; $\widetilde{\Theta}(\lambda)=\{\widetilde{\Theta}_j(\lambda)\}_{j=0}^{\infty}$ удовлетворяют соотношениям

$$(l_1\Theta)_j(\lambda)=\lambda\Theta_j(\lambda);\quad \Theta_{-1}=0,\quad \Theta_0=I;\tag{1.4}$$

$$(\widetilde{l}_1\widetilde{\Theta})_j(\lambda)=\lambda\widetilde{\Theta}_j(\lambda),\quad \widetilde{\Theta}_{-1}=0,\quad \widetilde{\Theta}_0=I.\tag{2.4}$$

Сравнив (1.4) и (4.2), (2.4) и (3.2), легко убедиться, что

$$\Theta_j^*(\lambda)=\widetilde{\Omega}_j(\lambda);\quad \widetilde{\Theta}_j^*(\bar{\lambda})=\Omega_j(\lambda);\quad j=0,1,\ldots\tag{3.4}$$

...ореме 1.2 существуют такие единственные C_j, $D_j \in F$ $j=0, 1, \ldots, n$,

$$\lambda^n = \sum_{j=0}^{n} C_j \Theta_j(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} \Omega_j(\lambda) D_j. \tag{4.4}$$

Вследствие равенств (3.4)

$$C_j^* = D_j, \quad j=0, 1, \ldots, n. \tag{5.4}$$

Если $S = \{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ — о. с. ф. задачи (E) — (F), то

$$S_n = \langle \lambda^n | S \rangle = \langle \sum_{i=0}^{n} C_i \Theta_i(\lambda) | S \rangle = C_0, \tag{6.4}$$

соответственно

$$R_n = \langle R | \lambda^n \rangle = \langle R | \sum_{j=0}^{n} \Omega_j(\lambda) D_j \rangle = D_0. \tag{7.4}$$

Из равенств (5.4), (6.4) и (7.4) следует, что $S_n^* = R_n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$. Теорема доказана.

§ 5. Пусть F — алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в некотором гильбертовом пространстве H. Обозначим через H_0^{∞} линейное пространство финитных последовательностей элементов из H, а через $\hat{H}_0^{\infty}$ — линейное пространство полиномов, коэффициентами которых являются векторы из H. Пусть заданы некоторые последовательности операторов $\{A_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{B_j\}_{j=0}^{\infty}$ из F, причем A_j^{-1} существуют и принадлежат F. Рассмотрим разностное выражение l, преобразующее последовательность $u = \{u_j\}_{j=0}^{\infty} \in H_0^{\infty}$ в последовательность $\{lu\}_{j=0}^{\infty}$ по формуле

$$(lu)_j = A_j u_{j+1} = A_{j-1} u_{j-1} + B_j u_j, \tag{G}$$

причем при вычислении $(lu)_0$ предполагаем, что

$$u_{-1} = 0. \tag{H}$$

По выражению (G) строим выражения L, $\tilde{L}$, которые действуют на элементы из F_0^{∞}:

$$(LU)_j = A_j U_{j+1} + A_{j-1} U_{j-1} + B_j U_j, \tag{1.5}$$

$$(\tilde{L}U)_j = U_{j+1} A_j + U_{j-1} A_{j-1} + U_j B_j, \tag{2.5}$$

причем

$$U_{-1} = 0. \tag{3.5}$$

Предположим, что H сепарабельно и выберем в нем счетный ортонормированный базис. Тогда каждый элемент из F можно представить в виде матрицы $A = \{A_{ik}\}_{i,k=1}^{\infty}$, а элементы $u \in H$ — в виде квадратично суммирующихся последовательностей $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ комплексных чисел, которые удобно записывать в виде столбца (справа от матрицы) или в виде строки (слева от матрицы).

Зададим в H инволюцию: если $u = (u_1, u_2, \ldots)$, то $u^* = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots)$. Тогда uv^* — скалярное произведение векторов u, $v \in H$, uA — матрица-строка (т. е. вектор из H), полученная в результате умножения последовательности $\{u_l\}_{l=1}^{\infty}$ на матрицу $A = \{A_{lk}\}_{l,k=1}^{\infty}$. Легко видеть, что $\langle S | p(\lambda) \rangle = \sum_{i=0}^{m} S_i p_i$ —

вектор из $H\ (p(\lambda)=\sum_{i=0}^{m} p_i\lambda^i,\ p_i \in H,\ a\ \langle g(\lambda)\,|\,S\,|\,p(\lambda)\rangle=\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} g_i S_{i+k} p_k$ — комплексное число $(g(\lambda)=\sum_{i=0}^{n} g_i\lambda^i;\ g_i \in H;\ p(\lambda)=\sum_{i=0}^{m} p_i\lambda^i;\ p_i \in H.$

Ω и $\widetilde{\Omega}$-преобразования Фурье элементов из H_0^∞ вводим по формулам

$$(u\Omega)(\lambda)=\sum_{j=0}^{\infty} u_j\Omega_j(\lambda); \tag{4.5}$$

$$(\widetilde{\Omega}u)(\lambda)=\sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{\Omega}_j(\lambda)\,u_j, \tag{5.5}$$

где Ω и $\widetilde{\Omega}$ — имеют те же значения, что и в § 2. Так как при $H \ni x \neq 0\ F_0^\infty x = H_0^\infty$ и $xF_0^\infty = H_0^\infty$

$$(\widetilde{\Omega}U)(\lambda)\ x=(\widetilde{\Omega}Ux)(\lambda);\quad x\,(U\Omega)(\lambda) \doteq (xU\Omega)(\lambda)$$

для произвольного $U \in F_0^\infty$, то из теоремы 1.2 следует такое утверждение.

Теорема 1.5. *Совокупность* Ω или $\widetilde{\Omega}$-*преобразований Фурье всевозможных элементов из* H_0^∞ *совпадает с* $\hat{H}_0^\infty$. *Каждый полином* $p \in \hat{H}_0^\infty$ *степени* n *однозначно представляется в виде*

$$p(\lambda)=\sum_{j=0}^{n} p_j\Omega_j(\lambda);\quad p_j \in H, \tag{6.5}$$

или в виде

$$p(\lambda)=\sum_{j=0}^{n} \widetilde{\Omega}_j(\lambda)\,p_j';\quad p_j' \in H. \tag{7.5}$$

Из теоремы 2.2 вытекает

Теорема 2.5. *Каждой задаче* (G) — (H) *отвечает такое* $R \in (\hat{F}_0^\infty)'$, *что для произвольных* $u,\ v \in H_0^\infty$

$$\langle (u\Omega)(\lambda)\,|\,R\,|\,(\widetilde{\Omega}v)(\lambda)\rangle=\sum_{j=0}^{\infty}(u_j,\ v_j^*)_H. \tag{8.5}$$

§ **6.** Рассмотрим краевую задачу, порожденную выражением

$$(lu)_j=u_{j+1}+u_{j-1}+B_ju_j \tag{1.6}$$

и краевым условием

$$u_{-1}=0. \tag{2.6}$$

Если задача (1.6) — (2.6) самосопряжена в том смысле*, что $B_j=B_j^*$, $j=0,1,2,\ldots$, то, как следует из теоремы 1.4, $R=R^*$ $(R_j=R_j^*;\ j=0,1,\ldots)$, т. е. R_j — самосопряженные ограниченные операторы в H. Кроме того, легко видеть, что

$$\Omega_j^*(\lambda)=\widetilde{\Omega}_j(\lambda). \tag{3.6}$$

* В рассматриваемом случае оператор (1.6) — (2.6) является самосопряженным или симметрическим.

Лемма 1.6. *Если H — сепарабельное гильбертово пространство и $R = \{R_j\}_{j=0}^{\infty}$, $(R_j \in F,\ R_0 = I)$ — о. с. ф. самосопряженной задачи* (1.6) — (2.6), *то для произвольных $x_i \in H$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ выполняется условие*

$$\sum_{i,\,j=0}^{n} (x_i,\ R_{i+j}x_j)_H \geqslant (x_n,\ x_n)_H. \tag{4.6}$$

Доказательство. Пусть x_j $(j = 0, 1, \ldots, n)$ — произвольные элементы из H. Векторный полином $\sum_{i=0}^{n} x_i^* \lambda^i$ по теореме 1.5 можно единственным способом представить в виде

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^* \lambda^i = (y\Omega)(\lambda), \tag{5.6}$$

где

$$y = \{y_p\}_{p=0}^{\infty} \in H_0^{\infty};\quad y_n = x_n^*;\ y_{n+1} = y_{n+2} = \cdots = 0.$$

Тогда из равенств (3.6) и (5.6) вытекает, что

$$\sum_{i=0}^{n} x_i \lambda^i = (\tilde{\Omega} y^*)(\lambda). \tag{6.6}$$

Используя равенство Парсеваля — Марченко (8.5), нетрудно получить

$$\sum_{i,\,j=0}^{n} (x_i,\ R_{i+j}x_j)_H = \sum_{i,\,j=0}^{n} x_i^* R_{i+j} x_j =$$

$$= \left\langle \sum_{i=0}^{n} x_i^* \lambda^i \mid R \mid \sum_{k=0}^{n} x_k \lambda^k \right\rangle \geqslant (y_n,\ y_n). \tag{7.6}$$

Отсюда уже легко получить (4.6), сравнивая старшие коэффициенты многочленов, стоящих в правой и левой частях равенства (5.6). Лемма доказана.

Теорема 1.6. *Если H — сепарабельное гильбертово пространство, а $R = \{R_k\}_{k=0}^{\infty} (R_k \in F,\ R_0 = I)$ — о. с. ф. самосопряженной задачи* (1.6) —(2.6), *то существует такая неубывающая операторная мера $\Phi(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$, что для произвольных $u, v \in H_0^{\infty}$*

$$\langle (u\Omega)(\lambda) \mid R \mid (\tilde{\Omega}v)(\lambda) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (u\Omega)(\lambda)\, d\Phi(\lambda)\, (\tilde{\Omega}v)(\lambda). \tag{8.6}$$

Доказательство. Вследствие неравенства (4.6) бесконечная последовательность $R = \{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы 4 из [7] и является эрмитовой моментной последовательностью в понимании [7]. Итак, существует такая неубывающая операторная $\Phi(\lambda)$, что

$$R_k = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^k d\Phi(\lambda),\quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{9.6}$$

Вследствие линейности $R \in (\hat{F}_0^{\infty})'$ отсюда уже вытекает (8.6).

Замечание. Из теоремы 1.3 следует такое решение обратной задачи для выражения (1.6) с условием (2.6) в самосопряженном случае $(B_j = B_j^*,\ j = 0, 1, \ldots)$.

Теорема 2.6. *Для того чтобы некоторая неубывающая операторная мера $d\Phi(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ была спектральной функцией задачи* (1.6)—(2.6), *необходимо и достаточно, чтобы матрицы*

$$r_n = \begin{pmatrix} I & R_1 & \dots & R_n \\ R_1 & R_2 & \dots & R_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_n & R_{n+1} & \dots & R_{2n} \end{pmatrix}$$

были унимодулярны при всех $n = 0, 1, \dots$;

$$\left(R_j = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^j d\Phi(\lambda), \quad j = 0, 1, \dots \right).$$

В заключение отметим, что для самосопряженного разностного выражения (1.6) с условием (2.6) обратная задача изучалась в [8, 9]. В [9] получены сходные с нашими условия разрешимости обратной задачи при специальных B_j (B_j — бесконечная якобиевая матрица при $j = 0, 1, \dots$), но там имеется разрыв между необходимыми и достаточными условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. С. Рофе-Бекетов. Разложение по собственным функциям бесконечных систем дифференциальных уравнений в несамосопряженном и самосопряженном случаях. «Матем. сб.», 51, № 3 (1960), 293—342.

2. В. А. Марченко. Разложение по собственным функциям несамосопряженных сингулярных дифференциальных операторов второго порядка. «Матем. сб.», 52, № 2 (1960), 739—788.

3. В. Э. Лянце. Спектр и резольвента несамосопряженного разностного оператора. УМЖ, 20, № 4 (1968), 489—503.

4. В. Э. Лянце. Разложение по собственным функциям несамосопряженного разностного оператора. УМЖ, 21, № 4 (1969), 456—468.

5. А. И. Плеснер. Спектральная теория линейных операторов. Изд-во «Наука», 1965.

6. А. И. Мальцев. Основы линейной алгебры. Изд-во «Наука», 1970.

7. J. S. Mac-Nerney, Nermitian moment sequences, Trans. of the Am. Mat. Soc., 103, № 1 (1962), 45—81.

8. Ю. М. Березанский. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Изд-во «Наукова думка», 1965.

9. А. А. Андрощук. О спектральных матрицах в частных разностях второго порядка на полуплоскости УМЖ, 22, № 3 (1970), 334—341.

Поступила 27 января 1971 г.