О КЛАССАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ РАЗНОСТНОГО АНАЛОГА УРАВНЕНИЙ ТИПА СОБОЛЕВА—ГАЛЬПЕРНА

Н. Ю. Иохвидович

§ 1. Постановка задачи и определения

Рассмотрим уравнение вида

$$P\left(\Delta, \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x, t) \equiv \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=-p_k}^{q_k} a_{kj} \frac{d^k u(x+jh, t)}{dt^k} = 0, \tag{1}$$

$-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant t < \infty$, p_k, $q_k \geqslant 0$, a_{kj} — постоянные, т. е. дифференциальные по временной переменной t и разностные по пространственной переменной нейные уравнения с постоянными коэффициентами. К уравнению (1) присоединются начальные условия

$$\frac{d^j u(x, 0)}{dt^j} = 0, \ j = 0, 1, \ldots, m-1, \ -\infty < x < \infty. \tag{2}$$

В [1] (см. там же дальнейшие ссылки) изучен вопрос о единственности решения задачи (1) — (2) в классах функций

$$|u(x, t)| \leqslant Cf(x) \exp At, \ -\infty < x < \infty, \ t \geqslant 0. \tag{3}$$

Целью настоящей работы является установление необходимых и достаточных условий единственности решения задачи Коши (1)—(2) в классах функций, удовлетворяющих оценке вида (3) лишь при $x \leqslant 0$ (или $x \geqslant 0$). Аналогичный вопрос для уравнений в частных производных исследован нами в [2].

Мы будем рассматривать только решения нормального типа по t, т. е. решения уравнения (1), которые вместе со своими производными, входящими в уравнение, растут по t не быстрее $\exp\{\alpha t\}$ с некоторым $\alpha > 0$.

Дальнейшие рассмотрения относятся к случаю, когда оценки на функции, в классе которых изучаются вопросы единственности, задаются на полуоси $x \leqslant 0$; при $x \geqslant 0$ исследование может быть проведено аналогичным способом.

Не уменьшая общности, можно считать в уравнении (1)

$$h = 1, \ p_k = 0 \ (k = 0, 1, \ldots, m).$$

Пусть $w_0(\lambda), \ldots, w_{n-1}(\lambda)$ не обязательно различные корни уравнения

$$P(w, \lambda) \equiv \sum_{k=0}^{m} P_k(w) \lambda^k \equiv \sum_{j=0}^{n} Q_j(\lambda) w^j = 0.$$

Учитывая (2), мы всегда можем полагать, что многочлен $P(w, \lambda)$ нельзя представить в виде

$$P(w, \lambda) = P_1(\lambda) P_2(w, \lambda),$$

где $P_1(\lambda)$ и $P_2(w, \lambda)$ — многочлены, $P_1(\lambda) \not\equiv \text{const}$. В окрестности бесконечно удаленной точки корни уравнения $P(w, \lambda) = 0$ имеют вид [3]

$$w_j(\lambda) = \alpha_j^{(0)} \lambda^{q_j^{(0)}} + \alpha_j^{(1)} \lambda^{q_j^{(1)}} + \ldots,$$

$$\alpha_j^{(0)} \neq 0, \ q_j^{(0)} > q_j^{(1)} > \ldots, \ j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Если $q_j^{(0)} = 0$, то определим $V_j(\lambda)$ равенством

$$w_j(\lambda) = \alpha_j^{(0)} \left(1 + \frac{\alpha_j^{(1)}}{\alpha_j^{(0)}} \lambda^{q_j^{(1)}} + \ldots\right) = \alpha_j^{(0)} (1 + V_j(\lambda)).$$

Обозначим

$$|\alpha_j^{(0)}| = A_j^{(0)}, \ \arg \alpha_j^{(0)} = \varphi_j^{(0)}, \ -\pi < \varphi_j^{(0)} \leqslant \pi,$$

$$|\lambda| = r, \ \arg \lambda = \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},$$

$$I_j(\lambda) = \operatorname{Re} V_j(\lambda) + \frac{|V_j(\lambda)|^2}{2},$$

$$A = \max_{\{j \,:\, q_j^{(0)} = 0\}} \ln A_j^{(0)}.$$

Определения. *Корень $w_j(\lambda)$ удовлетворяет условию I, если*

а) $q_j^{(0)} = 0$;

б) $\exists\, C_j^+,\ C_j^- > 0,\ \beta_j^+,\ \beta_j^- > 0$ такие, что

$$I_j(\sigma_0 + i\tau) = C_j^\pm r^{-\beta_j^\pm}(1 + 0^\pm(1)),\ 0^\pm(1) \to 0,\ \tau \to \pm\infty;$$

в) $\exists\, C_j > 0$ такое, что

$$I_j(\lambda) \geqslant C_j r^{-\beta_j^0},\quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > 0,\quad \beta_j^0 = \max(\beta_j^+,\ \beta_j^-).$$

Корень $w_j(\lambda)$ удовлетворяет условию II, если

а) $q_j^{(0)} = 0$;

б) $\exists\, \varkappa_j \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ и $\exists\, \rho_0 > 0$ такие, что

$$I_j(\sigma_0 + \rho\exp\{i\varkappa_j\}) < 0,\ \rho > \rho_0.$$

Элементарный анализ показывает, что каждый корень $w_j(\lambda)$, у которого $q_j^{(0)} = 0$, $w_j(\lambda) \not\equiv 0$, удовлетворяет одному и только одному из условий I, II.

К типу T_1 отнесем корни $w_j(\lambda)$ такие, что $q_j^{(0)} > 0$.

К типу T_2 отнесем корни $w_j(\lambda)$, удовлетворяющие условию I и такие, что $\ln A_j^{(0)} = A$.

К типу T_3 отнесем корни $w_j(\lambda) \not\equiv \text{const}$, причем $\ln A_j^{(0)} = A$.

К типу T_4 отнесем корни $w_j(\lambda)$, удовлетворяющие условию II и такие, что $\ln A_j^{(0)} = A$.

К типу T_5 отнесем корни $w_j(\lambda)$ такие, что $q_j^{(0)} < 0$.

К типу T' отнесем корни $w_j(\lambda)$ такие, что $q_j^{(0)} = 0$, $\ln A_j^{(0)} < A$.

§ 2. Необходимые и достаточные условия единственности

Определение. *Уравнение (1) отнесем к типу Γ_k, $1 \leqslant k \leqslant 5$, если существует хотя бы один корень $w_j(\lambda)$, имеющий тип T_k, но ни один из корней не имеет типа T_l, $1 \leqslant l < k$.*

Заметим, что уравнения типов $\Gamma_1 - \Gamma_4$ могут иметь корни типа T', так как если уравнение $P(w, \lambda) = 0$ имеет корень типа T', то оно обязательно имеет и корень одного из типов T_2, T_3, T_4.

Теорема 1. *Пусть уравнение (1) имеет тип Γ_1, $h(x) > 0$, $(x \leqslant 0)$ — возрастающая с ростом $|x|$, непрерывная функция. Тогда для единственности решения задачи Коши (1)—(2) в классе функций, удовлетворяющих оценке*

$$|u(x, t)| \leqslant C\exp\{\alpha t - |x|\, h(x)\},\ x \leqslant 0,\ t \geqslant 0,\ \alpha > 0, \tag{4}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \infty. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $y(x, \lambda)$ — преобразование Лапласа решения $u(x, t)$ (по t). Тогда

$$P(\Delta, \lambda)\, y(x, \lambda) = 0 \tag{6}$$

ледуя идее Хилла [4], нужно установить, что условие (5) является необходим и достаточным для того, чтобы всякое аналитическое при $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \sigma_0 > \alpha$ ение уравнения (6), удовлетворяющее оценке

$$|y(x, \lambda)| \leqslant C \exp\{-|x|\, h(x)\},\ x \leqslant 0, \tag{7}$$

ю тождественно равно нулю.

Достаточность. Пусть $y_0(x, \lambda), \ldots, y_{n-1}(x, \lambda)$ — фундаментальная система ений уравнения (6), а $y(x, \lambda)$ — решение этого уравнения, аналитическое при $\lambda \geqslant \sigma_0 > \alpha$ и удовлетворяющее условию (7). Это решение может быть записано в виде

$$y(x, \lambda) \equiv \sum_{j=0}^{n-1} c_j(\lambda)\, y_j(x, \lambda),\ -\infty < x < \infty. \tag{8}$$

аменяя в (8) x на $x-k$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ и решая относительно $c_j(\lambda)$ получившуюся систему n уравнений, получим

$$c_j(\lambda) = W^{-1}(x, \lambda) \cdot W_j(x, \lambda),\ 0 \leqslant j \leqslant n-1, \tag{9}$$

где

$$W(x, \lambda) = \begin{vmatrix} y_0(x, \lambda) & \ldots & y_{n-1}(x, \lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_0(x-n+1,\ \lambda) & \ldots & y_{n-1}(x-n+1,\ \lambda) \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\prod_{j=0}^{n-1} \omega_j(\lambda)\right]^x W(0, \lambda), \tag{10}$$

и $W_j(x, \lambda)$ получается из $W(x, \lambda)$ заменой j-го столбца на столбец функций $y(x, \lambda), \ldots, y(x-n+1, \lambda)$.

Из (9) и (10), учитывая (7), получим

$$|c_j(\lambda)| \leqslant C_1 r^{M_1} (1 + |x|)^{M_2} \exp\{|x|\,[\ln|\omega_j(\lambda)| - h(x)]\}, \tag{11}$$

$$C_1 > 0,\ M_1,\ M_2 > 0.$$

Зафиксируем λ, а $|x|$ устремим к бесконечности. Отсюда получим, что $c_j(\lambda) \equiv \equiv 0$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, так как λ фиксировалось произвольно, то $y(x, \lambda) \equiv 0$, а следовательно, и $u(x, t) \equiv 0$.

Отметим, что приведенное выше доказательство справедливо для любых уравнений.

Необходимость. Рассмотрим функцию

$$y(x, \lambda) = C\,[\omega_j(\lambda)]^x, \tag{12}$$

где $\omega_j(\lambda)$ — решение характеристического уравнения с $q_j^{(0)} > 0$. Тогда $y(x, \lambda)$ — решение уравнения (6), аналитическое при $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \sigma_0 > \alpha$, $-\infty < x < \infty$.

Допустим, что условие (5) не выполнено, т. е. $h(x) \leqslant C_1$. Тогда функция (12) дает искомое решение уравнения (6), отличное от тождественного нуля и удовлетворяющее условию (7). Действительно, при $x \leqslant 0$

$$|y(x, \lambda)| = |\omega_j(\lambda)|^{-|x|} = \exp\{-|x|\ln|\omega_j(\lambda)|\}.$$

В силу того, что $q_j^{(0)} > 0$, при достаточно большом r

$$\ln|\omega_j(\lambda)| = \ln A_j^{(0)} r^{q_j^{(0)}}\, |1 + 0(1)| > C_1,$$

т. е.

$$|y(x, \lambda)| \leqslant C\exp\{-C_1|x|\} \leqslant C\exp\{-|x|h(x)\}$$

при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > \alpha$, σ_0 — достаточно велико.

Теорема 1 доказана полностью.

Теорема 2. *Пусть уравнение (1) имеет тип* Γ_2, $h(t) > 0$ — *непрерывная, убывающая при* $t > 0$ *функция. Тогда для единственности решения задачи Коши (1) — (2) в классе функций, удовлетворяющих оценке*

$$|u(x, t)| \leqslant C\exp\left\{\alpha t - A|x| - \int_0^{|x|} h(t)\,dt\right\}, \quad x \leqslant 0, \ t \geqslant 0, \tag{13}$$

$\alpha > 0$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int^{\infty} [h(t)]^{1+\frac{1}{\beta}}\,dt = \infty, \quad \beta = \min_{\{j\,:\,w_j(\lambda) \in T_2\}} \beta_j^{(l)}. \tag{14}$$

Доказательство. Нужно показать, что условие (14) является необходимым и достаточным для того, чтобы всякое аналитическое при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > \alpha$ и удовлетворяющее условию

$$|y(x, \lambda)| \leqslant C\exp\left\{-A|x| - \int_0^{|x|} h(t)\,dt\right\}, \quad x \leqslant 0 \tag{15}$$

решение уравнения (6) тождественно равнялось нулю.

Достаточность. Пусть (14) имеет место и пусть $y_0(x, \lambda), \ldots, y_{n-1}(x, \lambda)$ — фундаментальная система решений уравнения (6). Имеет место тождество (8) и, как в доказательстве теоремы 1, приходим к оценке типа (11):

$$|c_j(\lambda)| \leqslant C_1 r^{M_1}(1 + |x|)^{M_2}\exp\left\{\int_0^{|x|}[\ln|w_j(\lambda)| - A - h(t)]\,dt\right\}, \tag{16}$$

$$M_1,\ M_2 > 0,\ x \leqslant 0,\ \operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > \alpha,\ j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

1. $w_j(\lambda) \in T_2$. Тогда

$$\ln|w_j(\lambda)| = A + \ln|1 + V_j(\lambda)|, \text{ где}$$

$$|1 + V_j(\lambda)| = \sqrt{[1 + \operatorname{Re}V_j(\lambda)]^2 + [\operatorname{Im}V_j(\lambda)]^2} = \sqrt{1 + 2\operatorname{Re}V_j(\lambda) + |V_j(\lambda)|^2}.$$

Тогда

$$\ln|w_j(\lambda)| = A + \frac{1}{2}\ln(1 + 2\operatorname{Re}V_j(\lambda) + |V_j(\lambda)|^2) = A + \frac{1}{2}\ln(1 + 2I_j(\lambda)).$$

Исходя из этого, подынтегральное выражение в (16) можно записать так:

$$\ln|w_j(\lambda)| - A - h(t) = A + \frac{1}{2}\ln(1 + 2I_j(\lambda)) - A - h(t) = \frac{1}{2}\ln(1 + 2I_j(\lambda)) - h(t).$$

Возьмем $\lambda = \sigma_0 + i\tau$ при $\max\tau$, для которых выполняется свойство I с $\beta_j = \beta_j^0$, т. е.

$c_j(\lambda) = C_j r^{-\beta_j^0}(1 + 0(1))$, $0(1) \to 0$ при $\tau \to +\infty$ (либо $-\infty$), $C_j > 0$. Тогда при $\lambda = \sigma_0 + i\tau$ ($\tau > 0$ или < 0)

$$|c_j(\lambda)| \leqslant C_1 r^{M_1}(1 + |x|)^{M_2} \exp\left\{\int_0^{|x|} [C_j' r^{-\beta_j^0} - h(t)]\, dt\right\} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \exp\left\{(1+\varepsilon) C_j' r^{-\beta_j^0} |x| - (1-\varepsilon)\int_0^{|x|} h(t)\, dt\right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Положим $x = -g(r)$, где $g(r)$ определяется из условия

$$h(g(r)) = \delta r^{-\beta_j^0}, \quad \delta > \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} C_j' = \delta_0.$$

Тогда

$$|c_j(\lambda)| \leqslant C_1 \exp\{(1-\varepsilon)(\delta_0 - \delta)\, r^{-\beta_j^0} g(r)\} =$$

$$= C_2 \exp\{-C_3\, r^{-\beta_j^0} g(r)\}, \quad C_3 > 0. \tag{17}$$

Рассмотрим

$$\int^{\infty} \frac{r^{-\beta_j^0} g(r)}{r^2}\, dr = -\int^{\infty} y h'(y)\, [h(y)]^{\frac{1}{\beta_j^0}}\, dy =$$

$$= -y\,[h(y)]^{1+\frac{1}{\beta_j^0}}\Big|^{\infty} + \int^{\infty} [h(y)]^{1+\frac{1}{\beta_j^0}}\, dy = +\infty, \tag{18}$$

в силу условия (14).

Здесь можно считать $y\,[h(y)]_{y\to\infty}^{1+\frac{1}{\beta_j^0}} \to 0$, так как нужно найти как можно более широкий класс единственности.

Из (8) следует, что $c_j(\lambda)$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$ — аналитическая функция в достаточно далекой правой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > \alpha$.

Полагая в (16) $x = 0$, мы получим ограниченность функций $\dfrac{c_j(\lambda)}{r^{M_1}}$ при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > \alpha$.

Тогда, учитывая выполнение условий (17) и (18) в силу теоремы из теории аналитических функций [5], получаем, что $c_j(\lambda) \equiv 0$, $\{j : \omega_j(\lambda) \in T_2\}$.

2. $\omega_j(\lambda) \in T'$.

$$\ln|\omega_j(\lambda)| = \ln A_j^{(0)} + \ln|1 + 0(1)|, \quad 0(1) \to 0 \text{ при } r \to \infty, \ \ln A_j^{(0)} < A.$$

Тогда при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > \alpha$, σ_0 — достаточно велико, под знаком интеграла в (16) стоит отрицательная величина и, устремляя $|x| \to \infty$, получаем, что $c_j(\lambda) \equiv 0$, $\{j : \omega_j(\lambda) \in T'\}$.

3. $\omega_j(\lambda) \in T_3$.

$$\ln|\omega_j(\lambda)| = A.$$

Так же, как в случае 2, получаем $c_j(\lambda) \equiv 0$.

4. $\omega_j(\lambda) \in T_4$.

$$\ln|\omega_j(\lambda)| = A + \frac{1}{2}\ln(1 + 2I_j(\lambda)).$$

По определению типа T_4 существует такое $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varkappa_j \leqslant \frac{\pi}{2}$, что при $\lambda = \sigma_0 + \rho \exp\{i\varkappa_j\}$, $\rho > \rho_0 > 0$, ρ_0 — достаточно велико, $I_j(\lambda) < 0$. Тогда при $\lambda = \sigma_0 + \rho\exp\{i\varkappa_j\}$, $\rho > \rho_0$, $c_j(\lambda) \equiv 0$, и, в силу аналитичности, $c_j(\lambda) \equiv 0$ при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > \alpha$.

5. $\omega_j(\lambda) \in T_5$.

$$\ln|\omega_j(\lambda)| = \ln A_j^{(0)} | 1 + 0(1) | - | q_j^{(0)} | \ln r.$$

При $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > \alpha$, σ_0 — достаточно велико, устремляя $|x| \to \infty$ в (16), получим $c_j(\lambda) \equiv 0$.

Итак,

$$y(x, \lambda) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j(\lambda)\, y_j(x, \lambda) \equiv 0.$$

Необходимость. Нужно показать, что при нарушении (14) существует решение $y(x, \lambda) \not\equiv 0$ уравнения (6), аналитическое в некоторой правой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > \alpha$ и удовлетворяющее в ней условию (15).

Рассмотрим функцию $y(x, \lambda) = [\omega_j(\lambda)]^x$, где $\omega_j(\lambda)$ — решение характеристического уравнения, причем $\omega_j(\lambda) \in T_2$ с $\beta_j^0 = \beta$. Тогда $y(x, \lambda)$ — решение уравнения (6), аналитическое при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > \alpha$, $-\infty < x < \infty$.

Оценим выражение

$$f(\lambda) \equiv \sup_{x \leqslant 0} |y(x, \lambda)| \cdot C_1 \exp\left\{A|x| + \int_0^{|x|} h(t)\,dt\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_x C_1 \exp\left\{\int_0^{|x|} [A + h(t) - \ln|\omega_j(\lambda)|]\,dt\right\}.$$

$$\ln|\omega_j(\lambda)| = A + \frac{1}{2}\ln(1 + 2I_j(\lambda)) \geqslant A + \frac{1}{2}\ln(1 + C_j' r^{-\beta}),$$

так как

$$I_j(\lambda) \geqslant C_j r^{-\beta} \quad (\omega_j(\lambda) \in T_2),$$

$$\ln(1 + C_j' r^{-\beta}) = C_j' r^{-\beta}(1 + 0(1)), \quad 0(1) \to 0 \text{ при } r \to \infty.$$

Тогда

$$f(\lambda) \leqslant \sup_x C_1 \exp\left\{\int_0^{|x|} [h(t) - C_j'' r^{-\beta}]\,dt\right\}.$$

Определим функцию $g(r)$ из условия

$$h(g(r)) = C_j'' r^{-\beta}.$$

Тогда

$$f(\lambda) \leqslant C_1 \exp\left\{\int_0^{g(r)} [h(t) - C_j'' r^{-\beta}]\,dt\right\} \leqslant C_1 \exp\left\{\int_0^{g(r)} h(t)\,dt\right\} \equiv f_1(r).$$

$$\int_{r_0}^{\infty}\frac{\ln|f(\lambda)|}{r^2}\,dr \leqslant \int_{r_0}^{\infty}\frac{\ln f_1(r)}{r^2}\,dr = \int_{r_0}^{\infty}\frac{dr}{r^2}\int_0^{g(r)} h(t)\,dt + C_2 =$$

$$= C_2 + \int_0^{t_0} h(t)\,dt\int_{r_0}^{\infty}\frac{dr}{r^2} + \int_{t_0}^{\infty} h(t)\int_{g^{-1}(t)}^{\infty}\frac{dr}{r^2}\,dt = C_3 + \int_{t_0}^{\infty}\frac{h(t)}{g^{-1}(t)}\,dt =$$

$$= C_3 + C_j''\int_{r_0}^{\infty}\frac{r^{-\beta}g'(r)}{r}\,dr = C_3 + C_j''\left[\frac{g(r)}{r^{1+\beta}}\Bigg|_{r_0}^{\infty} + C_4\int_{r_0}^{\infty}\frac{g(r)}{r^{2+\beta}}\,dr\right].$$

Рассмотрим

$$\int_{r_0}^{\infty}\frac{g(r)}{r^{2+\beta}}\,dr = -C_5\int_{y_0}^{\infty} y\,h'(y)\,[h(y)]^{\frac{1}{\beta}}\,dy =$$

$$y = g(r)$$

$$= -C_6\left\{y\,[h(y)]^{1+\frac{1}{\beta}}\Bigg|_{y_0}^{\infty} - \int_{y_0}^{\infty}[h(y)]^{1+\frac{1}{\beta}}\,dy\right\} < \infty,$$

так как условие (14) нарушено.

Итак $\int^{\infty}\frac{\ln|f(\lambda)|}{r^2}\,dr < \infty.$

Тогда в силу известного критерия Карлемана [5] существует аналитическая при $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \sigma_0 > \alpha$ функция $F(\lambda) \not\equiv 0$ такая, что

$$|F(\lambda)\cdot f(\lambda)| \leqslant C_7. \tag{19}$$

Очевидно, что функция $y(x,\lambda)\cdot F(\lambda) = z(x,\lambda) \not\equiv 0$ также является решением уравнения (6), аналитическим при $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \sigma_0 > \alpha$, причем из (19) следует

$$|z(x,\lambda)| \leqslant C_7 \exp\left\{-A|x| - \int_0^{|x|} h(t)\,dt\right\}, \quad x \leqslant 0.$$

Теорема 2 доказана полностью.

Теорема 3. *Пусть уравнение (1) имеет тип* Γ_3, $\beta(x) > 0$ — *монотонная функция. Тогда для единственности решения задачи Коши* (1) — (2) *в классе функций, удовлетворяющих оценке*

$$|u(x,t)| \leqslant \beta(x)\exp\{\alpha t - A|x|\}, \quad x \leqslant 0, \quad t \geqslant 0, \quad \alpha > 0, \tag{20}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{x\to-\infty}\beta(x) = 0. \tag{21}$$

Доказательство. Нужно показать, что условие (21) является необходимым и достаточным для того, чтобы всякое аналитическое при $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \sigma_0 > \alpha$ и удовлетворяющее условию

$$|y(x,\lambda)| \leqslant \beta(x)\exp\{-A|x|\}, \quad x \leqslant 0 \tag{22}$$

решение уравнения (6) тождественно равнялось нулю.

Достаточность. Пусть (21) имеет место. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1, приходим к оценке типа (11)

$$|c_j(\lambda)| \leqslant C_1 r^{M_1}(1+|x|)^{M_2}\beta(x)\exp\{|x|\ln|w_j(\lambda)| - A|x|\},$$
$$C_1 > 0, \quad M_1, \quad M_2 > 0.$$

Для $w_j(\lambda) \in T'$, T_4, T_5, рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 2, получим, что $c_j(\lambda) \equiv 0$. Таким образом, функция $y(x, \lambda)$ представляет собой линейную комбинацию функций вида $[w_j(\lambda)]^x$ и произведений таких функций на степени x, причем $w_j(\lambda) = \alpha_j^{(0)} \equiv \text{const}$, $|w_j(\lambda)| = \exp\{A\}$, т. е. $y(x, \lambda)$ — это линейная комбинация функций вида $\exp\{Ax + i\varphi_j^{(0)}x\}$ и их произведений на степени x. Тогда оценка (22) возможна лишь в случае $y(x, \lambda) \equiv 0$.

Необходимость. Если условие (21) не выполняется, т. е. $\lim\limits_{x\to-\infty}\beta(x) = C > 0$, то функция $u(x, t) = C_1 t^m [w_j(\lambda)]^x$, $|w_j| = \exp\{A\}$, $w_j \equiv \text{const}$ при некотором C_1 дает пример нетривиального решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2) и (20).

Теорема 4. *Пусть уравнение* (1) *имеет тип* Γ_4, $h(x) > 0$ $(x \leqslant 0)$ — *непрерывная функция. Тогда для единственности решения задачи Коши* (1) — (2) *в классе функций, удовлетворяющих оценке*

$$|u(x, t)| \leqslant C\exp\{\alpha t - A|x| + |x|h(x)\}, \; x \leqslant 0, \; t \geqslant 0, \; \alpha > 0, \tag{23}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\inf h(x) = 0. \tag{24}$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть (24) выполнено. Оценка типа (11) в данном случае имеет вид

$$|c_j(\lambda)| \leqslant C_1 r^{M_1}(1+|x|)^{M_2}\exp\{|x|\ln w_j(\lambda) - A|x| + |x|h(x)\},$$
$$M_1 > 0, \; M_2 > 0.$$

Для $w_j(\lambda) \in T'$, T_5 так же, как в теореме 2, доказывается, что $c_j(\lambda) \equiv 0$. Далее пусть $w_j(\lambda) \in T_4$. В этом случае $\ln|w_j(\lambda)| = A + \frac{1}{2}\ln(1 + 2I_j(\lambda))$ и существует такое $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varkappa_j \leqslant \frac{\pi}{2}$, что $I_j(\lambda) < 0$ при $\lambda = \sigma_0 + \rho\exp\{i\varkappa_j\}$, $\rho > \rho_0 > 0$ Возьмем $\lambda = \sigma_0 + \rho\exp\{i\varkappa_j\}$, $\rho > \rho_0$. Тогда

$$|c_j(\lambda)| \leqslant C_1 r^{M_1}(1+|x|)^{M_2}\exp\{-C_2|I_j(\lambda)||x| + |x|h(x)\}. \tag{25}$$

Зафиксируем $\lambda = \sigma_0 + \rho\exp\{i\varkappa_j\}$ и рассмотрим такую последовательность x_n, $|x_n| \to \infty$, что $h(x_n) \to 0$. Тогда при $n \to \infty$ правая часть в (25) стремится к нулю, т. е. $c_j(\lambda) \equiv 0$ при $\lambda = \sigma_0 + \rho\exp\{i\varkappa_j\}$, а в силу аналитичности $c_j(\lambda)$ и во всей правой полуплоскости $\text{Re}\,\lambda \geqslant \sigma_0 > \alpha$. Таким образом, $y(x, \lambda) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} c_j(\lambda)\, y_j(x, \lambda) \equiv 0$.

Необходимость. Пусть условие (24) не выполнено, т. е. $\inf h(x) = h$ — Рассмотрим функцию

$$y(x, \lambda) = [w_j(\lambda)]^x,$$

где $w_j(\lambda) \in T_4$ и является решением характеристического уравнения, $y(x, \lambda)$ — решение уравнения (6), аналитическое при $\text{Re}\,\lambda \geqslant \sigma_0 > \alpha$, $-\infty < x < \infty$.

...ним выражение

$$f(\lambda) \equiv \sup_{x<0} |y(x, \lambda)| \cdot C_1 \exp\{A|x| - |x| h(x)\} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_x C_1 \exp\{-|x| \ln|w_j(\lambda)| + A|x| - h|x|\}.$$

...им, что

$$\ln|w_j(\lambda)| = A + \frac{1}{2}\ln(1 + 2I_j(\lambda)).$$

...гда

$$f(\lambda) \leqslant \sup_x C_1 \exp\left\{-\frac{|x|}{2}\ln(1 + 2I_j(\lambda)) - h|x|\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_x C_1 \exp\{|I_j(\lambda)||x| + \varepsilon|x| - h|x|\},$$

0, когда $|I_j(\lambda)| \to 0$.

Поскольку $I_j(\lambda) \to 0$ при $r \to \infty$, то можно выбрать σ_0 достаточно большим, ... $|I_j(\lambda)| < h$.

Тогда $f(\lambda) \leqslant C_1$, т. е.

$$|y(x, \lambda)| \leqslant C \exp\{-A|x| + |x| h(x)\},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5. *Пусть уравнение* (1) *имеет тип* Γ_5, $h(x) > 0$ — *непрерывная, возрастающая при* $x \geqslant 0$ *функция. Тогда для единственности решения задачи Коши* (1) — (2) *в классе функций, удовлетворяющих оценке*

$$|u(x, t)| \leqslant C \exp\left\{\alpha t + \int_0^{|x|} h(t)\, dt\right\}, \quad x \leqslant 0, \ t \geqslant 0, \ \alpha > 0, \tag{26}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\int^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{\Gamma} h(t)\right\} dt = \infty, \quad \Gamma = |\max_{0 \leqslant j \leqslant n-1} q_j^{(0)}|.$$

Доказательство этой теоремы приведено в [1].

§ 3. Примеры

Исследуем вопросы единственности решения задачи Коши для ряда уравнений.

I. Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\frac{du(x+1, t)}{dt} - 2\frac{du(x, t)}{dt} = u(x, t), \tag{27}$$
$$u(x, 0) = 0. \tag{28}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda w - 2\lambda = 1, \text{ откуда } w = 2\left(1 + \frac{1}{2\lambda}\right); \quad V(\lambda) = \frac{1}{2\lambda}.$$

Тогда

$$I(\lambda) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\lambda}\right) + \frac{1}{2|2\lambda|^2} = \frac{1}{2} r\cos\theta + \frac{1}{8r^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{\sigma}{r^2} + \frac{1}{8r^2} = \frac{1}{2} r^{-2}\left(\sigma + \frac{1}{8}\right) > 5r^{-2} > 0$$

при достаточно большом σ.

Отметим, что $I(\sigma_0 \pm i\tau) = \left(\frac{\sigma_0}{2} + \frac{1}{8}\right) r^{-2}$, т. е. корень $w(\lambda)$ удовлетворяет условию I. Тогда уравнение (27) следует отнести к типу Γ_2, значит, для единственности решения задачи Коши (27) — (28) в классе функций, удовлетворяющих оценке

$$|u(x, t)| \leqslant C \exp\left\{\alpha t - |x| \ln 2 - \int_0^{|x|} h(t)\, dt\right\}, \quad x \leqslant 0,$$

$t \geqslant 0$, $\alpha > 0$ — непрерывная, убывающая при $x \geqslant 0$ функция, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int^{\infty} [h(t)]^{\frac{3}{2}}\, dt = \infty.$$

2. Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\frac{du(x+1, t)}{dt} - 2\frac{du(x, t)}{dt} = -u(x, t), \tag{29}$$

$$u(x, 0) = 0. \tag{30}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda w - 2\lambda = -1, \text{ откуда } w = 2 - \frac{1}{\lambda} = 2\left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right);$$

$$V(\lambda) = -\frac{1}{2\lambda}, \quad I(\lambda) = -\frac{1}{2} r^{-1} \cos 0 + \frac{1}{8} r^{-2}.$$

Отсюда следует, что

$$I(\sigma_0 + i\tau) = -\frac{1}{2} r^{-2}\sigma_0 + \frac{1}{8} r^{-2} < 0 \quad \text{при} \quad \sigma_0 > \frac{1}{4}.$$

То есть корень $w(\lambda)$ удовлетворяет условию II. Тогда уравнение (29) следует отнести к типу Γ_4.

В этом случае для единственности решения задачи Коши (29) — (30) в классе функций, удовлетворяющих оценке

$$|u(x, t)| \leqslant C \exp\{\alpha t - |x| \ln 2 + |x| h(x)\}, \quad x \leqslant 0, \quad t \geqslant 0,$$

$\alpha > 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\inf_{x<0} h(x) = 0.$$

3. Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\frac{du(x+2, t)}{dt} = u(x, t); \tag{31}$$

$$u(x, 0) = 0. \tag{32}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$w^2\lambda = 1, \text{ откуда } w_{0,1} = \pm\lambda^{-\frac{1}{2}}.$$

В этом случае оба корня принадлежат типу T_5, т. е. уравнение (31) следует отнести к типу Γ_5.

Тогда для единственности решения задачи Коши (31) — (32) в классе функций (26) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int^{\infty} \exp\{-2h(t)\}\, dt = \infty.$$

В заключение автор благодарит В. М. Борок и Я. И. Житомирского за стоянное внимание к работе и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Борок. Классы единственности решения задачи Коши для разностного аналога уравнений типа Соболева-Гальперна. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 6. Харьков, Изд-во ХГУ, 1968.

2. Н. Ю. Иохвидович. О единственности решения задачи Коши для щих линейных уравнений. ДАН СССР, т. 193, № 1, 1970.

3. Н. Г. Чеботарев. Теория алгебраических функций. М. — Л., Гостехдат, 1948.

4. E. Hille. An abstract formulation of Caushy's problem. Camtes Rendus du Dausilme Congress des Mathmaticiens Scandinaves, Lund, 1953.

5. С. Мандельбройт. Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. ИЛ, 1955.

Поступила 16 декабря 1970 г.