# О $p$-АБСОЛЮТНО СУММИРУЮЩИХ КОНСТАНТАХ

*М. Г. Снобар*

Следуя И. Гордону [1], будем называть $p$-абсолютно суммирующей константой $\mu_p(X)$ $n$-мерного банахова пространства $X$ число

$$\mu_p(X) = \inf_{\{x_i\}} \sup_{\|x^*\| \leqslant 1} \left[ \frac{\sum_i |(x_i;\ x^*)|^p}{\sum_i \|x_i\|^p} \right]^{\frac{1}{p}}, \tag{1}$$

где $\{x_i\}$ пробегает все конечные подмножества пространства $X$, а $x^* \in X^*$. Определение $p$-абсолютно суммирующей константы возникло в связи с понятием $p$-абсолютно суммирующих операторов, которое ввел А. Пич [2].

В статье [1] получены различные соотношения для $\mu_p(X)$. Приведем некоторые из них

$$\mu_p(l_\infty^{(n)}) = n^{-\frac{1}{p}}; \quad \mu_p(l_1^{(n)}) = n^{-1}\left[2^{-n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot |n-2k|^p\right]^{\frac{1}{p}}; \tag{2}$$

$$\mu_p(l_2^{(n)}) = \left[\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)}\right]^{\frac{1}{p}}; \tag{3}$$

$$\mu_p(l_r^{(n)}) \asymp n^{-\frac{1}{s}}, \text{ где } s = \begin{cases} 2 \text{ при } 1 \leqslant r \leqslant 2;\ p \geqslant 1 \\ \frac{r}{r-1} \text{ при } 1 \leqslant p \leqslant \frac{r}{r-1} \leqslant 2 \\ p \text{ при } 1 \leqslant \frac{r}{r-1} \leqslant p \leqslant r \\ r \text{ при } 2 \leqslant r \leqslant p, \end{cases} \tag{4}$$

$$\mu_p(X) \leqslant \mu_r(X) \leqslant \mu_p^{\frac{p}{r}}(X); \ (1 \leqslant p \leqslant r < \infty). \tag{5}$$

Большая часть этих соотношений получена с помощью формулы из теоремы 1 [1]:

$$\mu_p(X) = \max_{\nu} \inf_{\|x\|=1} \left[\int_{K^*} |(x;\ x^*)|^p d\nu(x^*)\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{6}$$

где $K^*$ — замыкание множества крайних точек единичного шара пространства $X^*$, а $\nu$ пробегает всевозможные нормированные положительные борелевские меры на $K^*$.

Основным результатом нашей заметки является

**Теорема 1.** *Для любого n-мерного банахова пространства*

$$\mu_2(X) = n^{-\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Для ее доказательства нам потребуется одно предложение Ф. Джона [3].

**Предложение 1.** *Пусть $B$ — выпуклое замкнутое тело в n-мерном линейном пространстве $E$; $K$ — эллипсоид наименьшего объема, содержащий $B$. Тогда существуют множество точек $\{y_i\}_1^N$, принадлежащих одновременно телу $B$ и поверхности эллипсоида $K$, и множество неотрицательных чисел $\{\lambda_i\}_1^N$, удовлетворяющие соотношению*

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i (y_i;\ u) \cdot (y_i;\ v) = (u;\ v); \ \left(N \leqslant \frac{n(n+3)}{2};\ u;\ v \in E\right), \tag{8}$$

*где скалярное произведение порождается эллипсоидом $K$.*

Приведем это предложение в несколько измененном виде, приспособленном к нашим целям.

**Предложение 1*.** *Пусть $X$ — n-мерное банахово пространство. Существуют линейный оператор $T\colon X \to l_2^{(n)}$; элементы $\{y_i\}$ и неотрицательные числа $\{\lambda_i\}$, удовлетворяющие соотношениям*

$$\|T^{-1}\| = 1;\ \|T^{-1}y_i\| = \|T^* y_i\| = \|y_i\| = 1; \tag{9}$$

$$\sum \lambda_i (u;\ y_i)^2 = \|u\|^2;\ (u \in l_2^{(n)});\ \sum \lambda_i = n. \tag{10}$$

Здесь роль тела $B$ играет $(T^*)^{-1}$-образ единичного шара пространства $X^*$, а эллипсоида $K$ — единичный шар пространства $l_2^{(n)}$. Равенства (10) непосредственно следуют из (8). В доказательстве нуждается лишь равенство $\|T^{-1}y_i\| = 1$:

$$1 = \| T^{-1} \| \cdot \| y_i \| \geqslant \| T^{-1}y_i \| \geqslant (T^{-1}y_i;\ T^*y_i) = (y_i;\ y_i) = 1.$$

Доказательство теоремы 1. В формулу (1) подставим $x_i = \sqrt{\lambda_i}\, T^{-1}y_i$:

$$\mu_2^2(X) \leqslant \sup_{x^*} \frac{\sum \lambda_i (T^{-1}y_i;\ x^*)^2}{\sum \lambda_i \| T^{-1}y_i \|} = \sup_{x^*} \frac{\sum \lambda_i (y_i;\ T^{*-1}x^*)^2}{n} =$$

$$= \sup_{x^*} n^{-1} \cdot \| T^{*-1}x^* \|^2 = n^{-1} \cdot \| T^{-1} \|^2 = n^{-1}.$$

В формулу (6) подставим атомную меру, сосредоточенную в точках $T^*y_i$: $\nu(T^*y_i) = \lambda_i \cdot n^{-1}$:

$$\mu_2^2(X) \geqslant \inf_{\|x\|=1} n^{-1} \sum \lambda_i (x;\ T^*y_i)^2 =$$

$$= n^{-1} \inf_{\|x\|=1} \sum \lambda_i (Tx;\ y_i)^2 = n^{-1} \cdot \inf_{\|x\|=1} \cdot \| Tx \|^2 = n^{-1} \cdot \| T^{-1} \|^{-1} = n^{-1}.$$

Теорема доказана. Фактически мы указали ту меру, для которой достигается максимум в формуле (6).

Следствие 1. *Для любого $n$-мерного пространства*

$$n^{-\frac{1}{p}} \leqslant \mu_p(X) \leqslant n^{-\frac{1}{2}} (1 \leqslant p \leqslant 2), \tag{11}$$

$$n^{-\frac{1}{2}} \leqslant \mu_p(X) \leqslant n^{-\frac{1}{p}} (2 \leqslant p).$$

Для доказательства достаточно сопоставить (7) и (5). Полученные оценки почти точны (с точностью до коэффициентов, не зависящих от $n$), что следует из сравнения их с (2)—(4).

Следствие 2. *Пусть $X$ — $n$-мерное подпространство пространства $L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$. Тогда для его проекционной константы справедливо неравенство*

$$K_G^{-1} \sqrt{n} \leqslant \lambda(X) \leqslant \sqrt{n}, \tag{12}$$

*где $K_G$ — константа Гротендика* [4].

Правая часть этого неравенства доказана в [5] для любого $n$-мерного пространства. Левая часть получается из неравенства $K_G\ \mu_2(X)\, \lambda(X) \geqslant 1$, доказанного в [1].

Приведем еще одну формулу для $\mu_p(X)$

$$\mu_p(X) = \inf_{\{x_i\}} \sup_{\|x^*\| \leqslant 1} \sup_{\{\xi_i\}} \frac{\left| \sum \xi_i (x_i;\ x^*) \right|}{\left[\sum \| x_i \|^p\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\sum | \xi_i |^q\right]^{\frac{1}{q}}} =$$

$$= \inf_{\{x_i\}} \sup_{\{\xi_i\}} \frac{\left\| \sum \xi_i x_i \right\|}{\left[\sum \| x_i \|^p\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\sum | \xi_i |^q\right]^{\frac{1}{q}}}, \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right). \tag{13}$$

**Теорема 2.** *Если $2 \leqslant p \leqslant r$, то*

$$\mu_p(l_r^{(n)}) = n^{-\frac{1}{p}}. \tag{14}$$

Доказательство. В правую часть формулы (13) подставим $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$, где $e_j$ — канонический базис в $l_r^{(n)}$.

$$\mu_p(l_r^{(n)}) = \inf_{\{x_i\}} \sup_{\{\xi_i\}} \frac{\left[\sum_j \left|\sum_i \xi_i a_{ij}\right|^r\right]^{\frac{1}{r}}}{\left\{\sum_i \left[\sum_j |a_{ij}|^r\right]^{\frac{p}{r}}\right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\sum |\xi_i|^q\right]^{\frac{1}{q}}} \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{\{x_i\}} \sup_{\{\xi_i\}} \frac{\max_j \left|\sum_i \xi_i a_{ij}\right|}{\left[\sum_{i,j} |a_{ij}|^p\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\sum_i |\xi_i|^q\right]^{\frac{1}{q}}} =$$

$$= \inf_{\{x_i\}} \left[\frac{\max_j \sum_i |a_{ij}|^p}{\sum_j \left(\sum_i |a_{ij}|^p\right)}\right]^{\frac{1}{p}} = n^{-\frac{1}{p}}.$$

*При оценке знаменателя мы пользовались условием $p \leqslant r$. Сопоставляя* полученное неравенство с правой частью второго из неравенств (11), получаем (14).

В заключение выражаю благодарность М. И. Кадецу за руководство работой.

## ЛИТЕРАТУРА


1. V. Gordon. On $p$-absolutely summing constants of Banach spaces. Isr. J. Math. 7, № 2 (1969), 151—163.
2. A. Pietsch. Absolut $p$-summierende Abbildungen in normierte Räumen. Studia Math. 28 (1967), 333—353.
3. F. John. Extremum problems with inequalities as subsidary conditions. N. Y. Courant anniv vol. (1948), 187—204.
4. J. Lindenstauss, A. Pelczynski. Absolutely summing operators in $L_p$ — spaces and their applications. Studia Math. 29 (1968), 275—326.
5. М. И. Кадец, М. Г. Снобар. О некоторых функционалах на компакте Минковского. «Матем. заметки», т. 10, вып. 4, 1971, 453—457.


*Поступила 15 декабря 1970 г.*