О МЕРЕ, СВЯЗАННОЙ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ РЕШЕНИЙ ПЕРВЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Е. Я. Хруслов

Пусть в трехмерном пространстве R_3 задана последовательность замкнутых множеств $F^{(s)}$ $(s=1, 2, \ldots)$. Зафиксируем s и в области $D^{(s)}=R_3 \setminus F^{(s)}$ рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} &\Delta u^{(s)}(x)=f(x), \quad x \in D^{(s)}; \\ &u^{(s)}(x)=0, \ x \in \partial D^{(s)}; \\ &u^{(s)}(x) \to 0, \ x \to \infty, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\partial D^{(s)}$ — граница области $D^{(s)}$, функция $f(x) \in L_2(R_3)$ и финитна, $\Delta = \sum_{1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $x=\{x_1, x_2, x_3\} \in R_3$. Будем предполагать, что множество $F^{(s)}$ — регулярно относительно задачи Дирихле в области $D^{(s)}$. Тогда обобщенное решение задачи (1) непрерывно в $\overline{D^{(s)}}$ и, доопределив его нулем на множестве $F^{(s)}$, получим непрерывную во всем пространстве функцию $u^{(s)}(x)$, зависящую от параметра s.

Пусть при $s \to \infty$ последовательность функций $u^{(s)}(x)$ сходится в метриках $L_1(G)$, где G — произвольная ограниченная область в R_3 к некоторой функции $u(x)$. Ставится вопрос, как описать предельную функцию $u(x)$. В работах [1—3] этот вопрос рассматривался отдельно для таких двух случаев:

1) при $s \to \infty$ множества $F^{(s)}$ приближаются к некоторой фиксированной гладкой поверхности Γ;

2) при $s \to \infty$ множества $F^{(s)}$ «регулярно» распределяются во всем пространстве или некоторой его части.

Было показано, что при определенных условиях в случае 1) предельная функция $u(x)$ является решением краевой задачи:

$$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in R_3 \setminus \Gamma,$$
$$\left.\begin{aligned} &u^+(x) = u^-(x) = u(x) \\ &\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^+ - \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^- = c_\Gamma(x)\, u(x) \end{aligned}\right\} x \in \Gamma, \tag{2}$$
$$u(x) \to 0, \quad x \to \infty,$$

где $c_\Gamma(x)$ — непрерывная неотрицательная функция на Γ; знаками $+$ и $-$ отмечены предельные значения функций с разных сторон от Γ; $\frac{\partial}{\partial \nu}$ — производная по нормали, направленной в сторону, которой отвечает знак $+$.

В случае 2) предельная функция представляет собой решение краевой задачи

$$\Delta u(x) - c(x)\, u(x) = f(x), \quad x \in R_3, \tag{3}$$
$$u(x) \to 0, \quad x \to \infty,$$

$c(x)$ — неотрицательная непрерывная функция в R_3; $f(x)$ — та же, что в (1).

Из равенств (2) и (3) следует, что в обоих случаях предельная функция удовлетворяет в R_3 уравнению

$$\int u(x)\, \Delta\varphi(x)\, dx - \int u(x)\, \varphi(x)\, dm(x) = \int f(x)\, \varphi(x)\, dx, \tag{4}$$

где $\varphi(x)$ — произвольная финитная и дважды непрерывно дифференцируемая функция; $m(E)$ — мера, которая в случае 1) сосредоточена на Γ и имеет там плотность $c_\Gamma(x)$, а в случае 2) — абсолютно непрерывна и имеет плотность $c(x)$. Этому равенству можно придать такой смысл: предельная функция $u(x)$ удовлетворяет в обобщенном смысле уравнению вида $\Delta u - mu = f$, где m (в общем случае — мера) не зависит от $f(x)$.

В данной заметке показано, что аналогичный результат имеет место и в общем случае. А именно — с каждой последовательностью множеств $F^{(s)}$ ($s = 1, 2, \ldots$) можно связать меру $m(E)$ такую, что, если последовательность решений краевых задач (1), в областях $D^{(s)} = R_3 \setminus F^{(s)}$ сходится к функции $u(x)$, то $u(x)$ (исправленная на множестве меры нуль) удовлетворяет уравнению (4).

Перейдем к формулировке точного результата. Пусть E — некоторое множество в R_3. Обозначим через H_E произвольную конечную систему замкнутых непересекающихся множеств $F_i \subseteq E$, а через G_i — открытые множества такие, что $F_i \subset G_i$. Введем функцию множества

$$m(E) = \sup_{H_E} \sum_i \inf_{G_i \supset F_i} \varlimsup_{s \to \infty} C(F^{(s)} \cap G_i), \tag{5}$$

где $C(F^{(s)} \cap G_i)$ — ньютонова емкость множества $F^{(s)} \cap G_i$, верхняя грань в (5) берется по всевозможным системам H_E. Очевидно, она может принимать значения от 0 до $+\infty$.

Пусть в задаче (1) $f(x) \leqslant 0$ и последовательность $u^{(s)}(x)$ при $s \to \infty$ сходится к функции $u(x)$ в метриках $L_1(G)$, где G — произвольная ограниченная область в R_3.

В статье [3] доказана лемма:

Если в задаче (1) $f(x) \leqslant 0$ и для любой ограниченной области $G \subset R_3$ последовательность решений $u^{(s)}(x)$ этой задачи, продолженных нулем на $F^{(s)}$, при $s \to \infty$ сходится в $L_1(G)$ к функции $u(x)$, то почти всюду

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{|f(\xi)|}{|x-\xi|} d\xi - \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\mu(\xi)}{|x-\xi|}, \tag{6}$$

где μ - мера, удовлетворяющая неравенствам

$$\int d\mu(\xi) \leqslant \int |f(\xi)| d\xi, \tag{7}$$

и для любого замкнутого множества $T \subset R_3$

$$\mu(T) \geqslant \inf_{x \in T} u(x) \overline{\lim_{s \to \infty}} C(T \cap F^{(s)}). \tag{8}$$

Таким образом, предельная функция почти всюду определяется равенством (6). Изменим ее на множестве меры нуль так, чтобы она определялась этим равенством всюду, и дальше будем рассматривать именно эту функцию.

Введем обозначения: $O_\alpha = \{x \in R_3;\ u(x) < \alpha\}$, $\bar{O}_\alpha$ — замыкание O_α; $G_\alpha = R_3 \setminus \bar{O}_\alpha$.

Основной результат этой заметки содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *При любом* $\alpha > 0$ *в области* G_α *функция множества* $m(E)$, *определяемая формулой* (5), *есть конечная* σ*-аддитивная мера на классе борелевских множеств* $E \subset G_\alpha$ *и для любой дважды непрерывно дифференцируемой и финитной в* G_α *функции* $\varphi(x)$ *имеет место равенство*

$$\int u(x)\, \Delta\varphi(x)\, dx - \int u(x)\, \varphi(x)\, dm(x) = \int f(x)\, \varphi(x)\, dx. \tag{4'}$$

Доказательство. Согласно (6) предельная функция $u(x)$ может быть представлена в виде суммы двух функций $u^f(x)$ и $u^\mu(x)$, причем функция

$$u^f(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{|f(\xi)|}{|x-\xi|} d\xi$$

непрерывна всюду ($f(\xi) \in L_2(R_3)$) и финитна, а функция

$$u^\mu(x) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{d\mu(\xi)}{|x-\xi|}$$

субгармонична [4] и, следовательно, полунепрерывна сверху. Таким образом, предельная функция $u(x)$ полунепрерывна сверху и удовлетворяет всюду неравенствам [3]

$$0 \leqslant u(x) \leqslant u^f(x). \tag{9}$$

Пусть $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots E_i \ldots$ — убывающая последовательность открытых множеств, принадлежащих некоторой области $G_\alpha = R_3 \setminus \bar{O}_\alpha$ $(\alpha > 0)$ и таких, что при $i \to \infty$ диаметр E_i стремится к нулю. Тогда имеет место неравенство

$$\mu(E_i) \leqslant \max_{x \in E_i} u(x)(1 + \varepsilon(E_i)) \overline{\lim_{s \to \infty}} C(E_i \cap F^{(s)}), \tag{10}$$

где $\varepsilon(E_i) \to 0$ при $i \to \infty$.

Действительно, из леммы 2 [3] вытекает неравенство

$$\mu(E_l) \leqslant \sup \left\{ u^f(x) - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{R_3 \setminus E_l} \frac{d\mu(\xi)}{|x-\xi|} \right\} \varlimsup_{s \to \infty} C(E_l \cap F^{(s)}). \tag{11}$$

Предположим, что неравенство (10) не выполняется. Тогда, т. к. $u(x) \geqslant \alpha$ при $x \in E_l \subset G_\alpha$, то согласно (11) найдутся значения $\varepsilon > 0$ и последовательность точек $x_l \subset E_l$, для которых выполняются неравенства

$$u^f(x_l) - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{R_3 \setminus E_l} \frac{d\mu(\xi)}{|x_l - \xi|} \geqslant \max_{x \in E_l} u(x) + \varepsilon.$$

Поскольку множество G_α ограничено по (9), то можно выделить сходящуюся подпоследовательность точек $\{x_l,\ l \in J:\ x_l \to x_0\}$, причем, так как $E_l \supseteq E_{l+1}$, то $x_0 \in E_l$ для всех l. Учитывая, что диаметры множеств E_l стремятся к нулю, заключаем: для любого шара $K(x_0, \rho)$ с центром в точке x_0 радиуса $\rho > 0$ имеет место неравенство

$$u^f(x_l) - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{R_3 \setminus K(x_0, \rho)} \frac{d\mu(\xi)}{|x_l - \xi|} \geqslant u(x_0) + \varepsilon, \quad l \in J.$$

Так как функция $u^f(x)$ непрерывна всюду, а функция

$$u_\rho^\mu(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{R_3 \setminus K(x_0, \rho)} \frac{d\mu(\xi)}{|x_l - \xi|}$$

непрерывна в шаре $K(x_0, \rho)$, то

$$u^f(x_0) - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{R_3 \setminus K(x_0, \rho)} \frac{d\mu(\xi)}{|x_0 - \xi|} \geqslant u(x_0) + \varepsilon,$$

или в силу (6)

$$\frac{1}{4\pi} \int\limits_{K(x_0, \rho)} \frac{d\mu(\xi)}{|x_0 - \xi|} \geqslant \varepsilon,$$

но это, как показано в лемме 2 [3], противоречит ограниченности функции $u(x)$. Таким образом, неравенство (10) доказано.

Чтобы установить связь между мерой $\mu(E)$ и функцией множества $m(E)$, заданной формулой (9), докажем некоторые вспомогательные предположения.

Лемма 1. Пусть $E = \bigcup\limits_{i=1}^{N} E_i$, *где* $E_i = E \cap T_i$, T_i — *не пересекаются, причем множества* $\sum_m = \bigcup\limits_{i=1}^{m} T_i$ $(1 \leqslant m \leqslant N)$ — *замкнутые. Тогда*

$$m(E) = \sum_{i=1}^{N} m(E_i).$$

Очевидно, достаточно доказать лемму для случая $N = 2$. Так как E_1 и E_2 не пересекаются, то неравенство

$$m(E) \geqslant m(E_1) + m(E_2)$$

вытекает непосредственно из определения $m(E)$. Докажем обратное неравенство. В силу (5) для любого $\varepsilon > 0$ существует такая конечная система H_E непересекающихся замкнутых множеств $F_i \subset E$, что

$$m(E) \leqslant \sum_{\substack{i \\ F_i \in H_E}} \overline{\lim_{s\to\infty}}\, C(F^{(s)} \cap G_i) + \frac{\varepsilon}{3} \tag{12}$$

для любых открытых множеств $G_i \supset F_i$.

Рассмотрим множества $F_{1i} = T_1 \cap F_i$. Они замкнуты, не пересекаются и принадлежат множеству $E_1 = E \cap T_1$. Поэтому в силу (5) для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие открытые множества $G_{1i} \supset F_{1i}$, что

$$m(E_1) \geqslant \sum_i \overline{\lim_{s\to\infty}}\, C(F^{(s)} \cap G_{1i}) - \frac{\varepsilon}{3}. \tag{13}$$

Множества $F_{2i} = F_i \setminus G_{1i}$ тоже замкнуты, не пересекаются, они принадлежат $E_2 = E \setminus E_1 = E \cap T_2$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие открытые множества $G_{2i} \supset F_{2i}$, что

$$m(E_2) \geqslant \sum_i \overline{\lim_{s\to\infty}}\, C(F^{(s)} \cap G_{2i}) - \frac{\varepsilon}{3}. \tag{14}$$

Очевидно, $F_i \subset G_{1i} \cup G_{2i}$ и значит, в неравенстве (12) можно взять $G_i = G_{1i} \cup \cup G_{2i}$. В силу полуаддутивности емкости [4] имеем

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\, C(F^{(s)} \cap G_i) \leqslant \overline{\lim_{s\to\infty}}\, C(F^{(s)} \cap G_{1i}) + \overline{\lim_{s\to\infty}}\, C(F^{(s)} \cap G_{2i}),$$

откуда, учитывая неравенства (12), (13) и (14), получаем

$$m(E) \leqslant m(E_1) + m(E_2) + \varepsilon.$$

Так как ε — произвольное положительное число, то тем самым лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $\mu(E)$ — σ-аддитивная мера, определенная на борелевских множествах из R_3 и конечная на всех ограниченных множествах, а E — произвольное ограниченное борелевское множество.*

Для любого $\varepsilon > 0$ существует убывающая последовательность замкнутых множеств $F^k \subset E$ ($k = 1, 2, \ldots$), удовлетворяющих условиям:

1) $F^k = \bigcup_{i=1}^{N_k} F_i^k$ ($N_k < \infty$), при любом k множества F_i^k замкнуты, не пересекаются и каждое F_i^k полностью принадлежит некоторому F_j^{k-1};

2) диаметры $d(F_i^k)$ множеств F_i^k стремятся к нулю при $k \to \infty$, т. е. $\lim\limits_{k\to\infty} \max\limits_i d(F_i^k) = 0$;

3) для любых открытых множеств $G_i^k \supset F_i^k$

$$\mu(E) \leqslant \sum_{i=1}^{N_k} \mu(G_i^k) + \varepsilon.$$

При этом множества G_i^k можно выбирать так, что $\lim\limits_{k\to\infty} \max\limits_i d(G_i^k) = 0$ и каждое G_i^k принадлежит некоторому G_j^{k-1}.

Доказательство. Так как E — ограниченное борелевское множество и $\mu(E)$ конечно, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое замкнутое множество $F^1 \subset E$, диаметра $d_1 < \infty$, что $\mu(E) < \mu(F^1) + \frac{\varepsilon}{2}$ [5]. Следовательно, для любого открытого множества $G^1 \supset F^1$ $\mu(E) < \mu(G^1) + \frac{\varepsilon}{2}$.

Допустим, уже построено множество F^k, удовлетворяющее условию 1), причем $\max_i d(F_i^k) = d_k$ и для любых открытых множеств $G_i^k \supset F_i^k$

$$\mu(E) < \sum_{i=1}^{N_k} \mu(G_i^k) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon}{2^i}. \tag{15}$$

Покажем, как построить множество F^{k+1}, удовлетворяющее условиям 1), (15) и такое, что $\max_i d(F_i^{k+1}) = \frac{d_k}{2}$. Разобьем множество F_1^k на m_1 пересекающихся частей F_{1j}^k ($F_1^k = \bigcup_{j=1}^{m_1} F_{1j}^k$) так, чтобы диаметр каждой части не превосходил $\frac{d_k}{2}$. Очевидно, можно считать, что $m_1 \leqslant 8$ (т. к. $F_i^k \subset R_3$). Положим $F_1^{k+1} = \overline{F_{11}^k}$ и подберем такое открытое множество $\tilde{G}_1^{k+1} \supset F_1^{k+1}$, где

$$\mu(\tilde{G}_1^{k+1}) < \mu(F_1^{k+1}) + \frac{\varepsilon}{8N_k 2^{k+1}}.$$

Далее полагаем $F_2^{k+1} = \overline{F_{12}^k \setminus \tilde{G}_1^{k+1}}$ и аналогичным образом подбираем $\tilde{G}_2^{k+1}$. Вообще, если множества F_j^{k+1} и $\tilde{G}_j^{k+1}$ ($j = 1, 2, \ldots p-1 < m_1$) уже построены, то полагаем $F_p^{k+1} = \overline{F_{1p}^k \setminus \bigcup_{j=1}^{p-1} \tilde{G}_j^{k+1}}$ и подбираем открытое множество $\tilde{G}_p^{k+1} \supset F_p^{k+1}$ так, чтобы

$$\mu(\tilde{G}_p^{k+1}) < \mu(F_p^{k+1}) + \frac{\varepsilon}{8N_k 2^{k+1}}. \tag{16}$$

Очевидно, множества F_j^{k+1} замкнуты, не пересекаются, $d(F_j^{k+1}) \leqslant \frac{d_k}{2}$ и $F_j^{k+1} \subset F_1^k$ при $j = 1, 2, \ldots m_1$. Кроме того, $F_1^k \subset \bigcup_{j=1}^{m_1} \tilde{G}_j^{k+1}$. Поэтому в (15) в качестве G_1^k можно взять множество $\bigcup_{j=1}^{m_1} \tilde{G}_j^{k+1}$. Тогда будем иметь

$$\mu(G_1^k) \leqslant \sum_{j=1}^{m_1} \mu(\tilde{G}_j^{k+1}),$$

и, следовательно, в силу (16) для любых открытых множеств $G_j^{k+1} \supset F_j^{k+1}$ ($j = 1, 2, \ldots m_1$) выполняется неравенство

$$\mu(G_1^k) \leqslant \sum_{j=1}^{m_1} \mu(G_j^{k+1}) + \frac{\varepsilon}{N_k 2^{k+1}}.$$

Аналогичную процедуру проделываем с каждым множеством F_l^k. В результате получаем замкнутые непересекающиеся множества F_j^{k+1} диаметра $d(F_j^{k+1}) < \frac{d_k}{2}$ и такие, что $F_j^{k+1} \subset F_l^k$ при $M_{l-1} < j \leqslant M_l$, где $M_p = \sum_{l=1}^{p} m_l$, причем для любых открытых множеств $G_j^{k+1} \supset F_j^{k+1}$

$$\mu(G_l^k) \leqslant \sum_{j=M_{l-1}}^{M_l} \mu(G_j^{k+1}) + \frac{\varepsilon}{N_k 2^{k+1}}.$$

Следовательно, учитывая (15), будем иметь

$$\mu(E) \leqslant \sum_{i=1}^{N_{k+1}} \mu(G_i^{k+1}) + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\varepsilon}{2^i}, \quad N_{k+1} = M_{N_k}$$

для любых $G_i^{k+1} \supset F_i^{k+1}$.

Последнее утверждение леммы о том, что множества G_i^k можно выбирать так, что $\lim\limits_{k\to\infty} \max\limits_i d(G_i^k) = 0$ и каждое G_i^k принадлежит какому-нибудь G_j^{k-1}, очевидно, следует непосредственно из предыдущего. Лемма доказана.

Теперь можно доказать основную лемму о связи между мерой $\mu(E)$ и функцией множества $m(E)$, определенной формулой (5).

Лемма 3. *Пусть последовательность решений $u^{(s)}(x)$ краевых задач (1) (продолженных путем на множество $F^{(s)}$) при $s \to \infty$ сходится к функции $u(x)$, заданной формулой (6). Тогда для любого борелевского множества $E \subset G_\alpha$ $(\alpha > 0)$ имеет место равенство*

$$m(E) = \int\limits_E \frac{d\mu(x)}{u(x)}.$$

Доказательство. В силу (9) $\max u(x) = \beta < \infty$. Разобьем отрезок $[\alpha, \beta]$ на n частей и рассмотрим множества $T_i = \left\{x \in R_3 : \beta - \frac{\beta-\alpha}{n} i \leqslant u(x) < \beta - \frac{\beta-\alpha}{n}(i-1)\right\}$, где $i = 0, 1, 2, \ldots n$. Так как функция $u(x)$ полунепрерывна сверху, то T_i — борелевские множества, а множества $\bigcup\limits_{i=0}^{m} T_i$ $(m = 0, 1, \ldots n)$ замкнуты. Пусть $E \subset G_\alpha$ — борелевское множество. Тогда $E = \bigcup\limits_{i=0}^{n} E_i$, где $E_i = E \cap T_i$ — борелевские множества (возможно, некоторые из них пустые) и выполняются условия леммы 1.

Рассмотрим множество $E_i \neq \varnothing$. В силу леммы 2 и неравенства (10) для любого $\varepsilon > 0$ существует такая конечная система замкнутых непересекающихся множеств $F_{ik} \subset E_i$ и такие открытые множества $G_{ik} \supset F_{ik}$, что будут выполняться неравенства

$$\mu(E_i) \leqslant \sum_k \mu(G_{ik})(1 + \varepsilon),$$

$$m(E_i) \geqslant \sum_k \overline{\lim_{s\to\infty}} C(F^{(s)} \cap G_{ik}), \tag{17}$$

$$\mu(G_{ik}) \leqslant \max_{x\in G_{ik}} u(x)(1+\varepsilon) \lim_{s\to\infty} C(F^{(s)} \cap G_{ik}).$$

Так как $u(x)$ полунепрерывна сверху, а $F_{ik} \subset E_i = \left\{x \in E : \beta - \frac{\beta-\alpha}{n} i \leqslant \right.$ $\left. \leqslant u(x) \leqslant \beta - \frac{\beta-\alpha}{n}(i-1)\right\}$, то, не меняя этих неравенств, можно так выбрать G_{ik}, чтобы $\max\limits_{G_{ik}} u(x)$ для всех k стал меньше, чем $\overline{u}_i = \beta - \frac{\beta-\alpha}{n}(i-1)$. Тогда из (17) вытекает неравенство

$$m(E_i) \geqslant \frac{\mu(E_i)}{u_i} \frac{1}{(1+\varepsilon)^2},$$

а так как ε можно выбрать столь угодно малым, то

$$m(E_i) \geqslant \frac{\mu(E_i)}{u_i}.$$

Отсюда, воспользовавшись леммой 1, получаем

$$m(E) \geqslant \sum_{i=0}^{n} \frac{\mu(E_i)}{u_i}$$

и, следовательно,

$$m(E) \geqslant \int_E \frac{d\mu(x)}{u(x)}.$$

Докажем теперь обратное неравенство. Снова воспользуемся представлением $E = \bigcup\limits_{i=0}^{n} E_i$, $E_i = E \cap T_i$. Из определения $m(E_i)$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая конечная система H_{E_i} непересекающихся замкнутых множеств $F_{ik} \subset E_i$ ($F_{ik} \in H_{E_i}$, $k = 1, 2, \ldots N_i$), что для любых открытых множеств $G_{ik} \supset F_{ik}$ выполняется неравенство

$$m(E_i) \leqslant \sum_{k=1}^{N_i} \overline{\lim_{s\to\infty}} C(F^{(s)} \cap \overline{G}_{ik}) + \varepsilon. \tag{18}$$

Поскольку мера μ σ-аддитивна, то, не меняя этого неравенства, G_{ik} можно выбрать так, чтобы

$$\mu(E_i) \geqslant \sum_k \mu(\overline{G}_{ik}) - \varepsilon. \tag{19}$$

Как видно из формулы (6), функция $u(x)$ является ньютоновым потенциалом заряда $d\nu = |f(\xi)|\, d\xi - d\mu$ и поэтому обладает определенными свойствами непрерывности. Имеет место теорема [4]:

Пусть $u^\nu(x)$ — произвольный потенциал. Тогда при любом $\eta > 0$ существует открытое множество G_η емкости меньше η такое, что на дополнении к нему потенциал $u^\nu(x)$ непрерывен.

Воспользовавшись этой теоремой, построим открытое множество G_η емкости $C(G_\eta) < \frac{\varepsilon}{\max N_l}$, для которого на замкнутом множестве $T_\eta = R_3 \setminus G_\eta$ $u(x)$ была непрерывной.

В силу неравенства (8) имеем

$$\mu(\overline{G}_{ik}) \geqslant \mu(\overline{G}_{ik} \cap T_\eta) \geqslant \inf_{G_{ik} \cap T_\eta} u(x) \overline{\lim_{s\to\infty}} C(F^{(s)} \cap \overline{G}_{ik} \cap T_\eta). \tag{20}$$

Так как $F_{ik} \subset E_i \subset G_\alpha$, а $u(x)$ непрерывна на T_η, то множество G_{ik} можно выбрать так, чтобы $\inf\limits_{\overline{G}_{ik} \cap T_\eta} u(x)$ для всех k стал не меньше, чем $u_i(1-\varepsilon)$, где $u_l = \beta - \frac{\beta - \alpha}{n} i$. При этом неравенства (18) и (19) остаются в силе.

Тогда из (20) получаем

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} C(F^{(s)} \cap \overline{G}_{ik} \cap T_\eta) \leqslant \frac{\mu(\overline{G}_{ik})}{u_i(1-\varepsilon)}. \tag{21}$$

В силу полуаддитивности и монотонности емкости

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} C(F^{(s)} \cap \overline{G}_{ik}) \leqslant \overline{\lim_{s\to\infty}} C(F^{(s)} \cap \overline{G}_i \cap T_\eta) + \overline{\lim_{s\to\infty}} C(F^{(s)} \cap \overline{G}_{ik} \cap G_\eta) \leqslant$$
$$\leqslant \overline{\lim_{s\to\infty}} C(F^{(s)} \cap \overline{G}_{ik} \cap T_\eta) + C(G_\eta) \leqslant \overline{\lim_{s\to\infty}} C(F^{(s)} \cap \overline{G}_{lk} \cap T_\eta) + \frac{\varepsilon}{\max N_l}.$$

Отсюда, учитывая неравенства (18), (19) и (21), получим

$$m(E_i) \leqslant \frac{\mu(E_l)}{u_l} \cdot \frac{1}{1-\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{u_l(1-\varepsilon)} + 2\varepsilon,$$

а так как ε можно выбрать сколь угодно малым, то

$$m(E_i) \leqslant \frac{\mu(E_l)}{u_l}.$$

Воспользовавшись леммой 1, запишем

$$m(E) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu(E_i)}{u_l}.$$

Следовательно,

$$m(E) \leqslant \int_E \frac{d\mu(x)}{u(x)},$$

таким образом лемма 3 доказана.

Из леммы вытекает первое утверждение теоремы 1 о том, что функция множества $m(E)$ есть конечная σ-аддитивная мера на классе борелевских множеств $E \subset G_\alpha$ при любом $\alpha > 0$. Кроме того, для любого борелевского множества $E \subset G_\alpha$ имеет место равенство

$$\mu(E) = \int_E u(x)\, dm(x), \tag{22}$$

с помощью которого нетрудно доказать и вторую часть утверждения теоремы.

Пусть $\varphi(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая и финитная в G_α функция. Умножим равенство (6) на $\Delta\varphi(x)\left(\Delta=\sum_{1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)$ и проинтегрируем по области G_α

$$\int u(x)\,\Delta\varphi(x)\,dx=\frac{1}{4\pi}\int dx\Delta\varphi(x)\int\frac{|f(\xi)|}{|x-\xi|}\,d\xi-\frac{1}{4\pi}\int dx\Delta\varphi(x)\int\frac{d\mu(\xi)}{|x-\xi|}.$$

Меняя порядок интегрирования (что возможно, т. к. $|\Delta\varphi(x)|<c$, а меры $|f(\xi)|\,d\xi$ и $d\mu$ конечны) и учитывая равенство

$$\varphi(x)=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\Delta\varphi(\xi)}{|x-\xi|}\,d\xi,$$

получим

$$\int u(x)\,\Delta\varphi(x)\,dx-\int\varphi(x)\,d\mu(x)=\int f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

откуда в силу (22) следует равенство (4′) для $f(x)\leqslant 0$. Для знакопеременных $f(x)$ это равенство, очевидно, также имеет место в силу линейности задачи.

Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Марченко, Е. Я. Хруслов. Краевые задачи с мелкозернистой границей. «Матем. сб.», т. 65, 107, 1964.
2. Е. Я. Хруслов. Первая краевая задача в области со сложной границей. «Зап. мех.-маг. ф-та ХГУ и ХМО», т. 32, 1966.
3. Е. Я. Хруслов. Об условиях сходимости последовательности решений первой краевой задачи. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 12. Харьков, Изд-во ХГУ, 1970.
4. Н. С. Ландкоф. Основы современной теории потенциала. Изд-во «Наука», 1966.
5. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. 5, 1959.

Поступила 23 октября 1970 г.