АБСТРАКТНАЯ ПРОБЛЕМА КВАЗИАНАЛИТИЧНОСТИ

Ю. И. Любич, В. А. Ткаченко

Классическая проблема квазианалитичности допускает простую теоретико-операторную интерпретацию. Обозначим через A оператор, порождаемый в пространстве $C[0,1]$ дифференциальной операцией $i\dfrac{d}{ds}$ и граничным условием $x(0)=0$. Проблема квазианалитичности состоит в отыскании условий на последовательность положительных чисел $\{m_n\}_0^\infty$, необходимых и достаточных для того, чтобы из неравенств вида

$$\| A^n x \| \leqslant C(x)\, m_n \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{1}$$

($C(x)$ не зависит от n) следовало $x=0$.

В такой формулировке проблема квазианалитичности естественно переносится на общие линейные операторы в банаховом пространстве. Упомянутый выше оператор дифференцирования неограничен и не имеет спектра. Эти свойства следует сохранить в абстрактной проблеме квазианалитичности. Действительно, если на некотором ненулевом инвариантном подпространстве E оператор A ограничен, то $\| A^n x\| \leqslant C^n \| x \|$ $(x \in E,\ C = \| A \mid E \|)$; таким образом, даже при $m_n = C^n$ неравенствам (1) будет удовлетворять вектор $x \neq 0$. Если же спектр оператора непуст и, например, дискретен, то проблема квазианалитичности должна быть заменена соответствующей проблемой полноты системы корневых векторов.

В настоящей статье мы исследуем проблему квазианалитичности и проблему полноты. Основные результаты были анонсированы * в [1].

Пусть A — линейный оператор в банаховом пространстве B, $R(\lambda) = (A - \lambda E)^{-1}$ — его резольвента. Мы будем рассматривать случай, когда $R(\lambda)$ — мероморфная (и, в частности, целая) оператор-функция. Для оценки скорости ее роста введем функцию

$$m_A(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln \| R(re^{i\theta}) \|\, d\theta$$

и положим

$$\tau_A = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{m_A(r)}{r^\rho}.$$

Если $\tau_A < \infty$, будем называть резольвенту функцией нормального типа при порядке ρ.

Если A — оператор без спектра, то $R(\lambda)$ — целая функция. В этом случае положим

$$M_A(r) = \max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} \| R(re^{i\theta})\|$$

и

$$\sigma_A = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M_A(r)}{r^\rho}.$$

Величину σ_A назовем типом резольвенты и при $\sigma_A < \infty$ будем говорить, что резольвента имеет нормальный тип при порядке ρ. Легко видеть, что числа σ_A и τ_A конечны и бесконечны одновременно.

---

* В неравенствах (1) заметки [1] мы писали по недосмотру $\|x\|$ вместо $C(x)$.

Рост числовой последовательности $\{m_n\}_0^\infty$ мы будем измерять с помощью обычной характеристики

$$T(r) = \sup_{n \geqslant 0} \frac{r^n}{m_n}.$$

Положим еще для всякой целой функции $\omega(\lambda)$ по определению

$$M_\omega(r) = \max_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} |\omega(re^{i\theta})|.$$

Лемма 1. *Пусть A — оператор без спектра и x — ненулевой вектор, удовлетворяющий неравенствам* (1). *Тогда*

$$T(r) \leqslant C(x)\, rM_A(r). \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $\|x\| = 1$. Тогда

$$1 = \|A^{-n}A^n x\| \leqslant \|A^{-n}\|\, m_n C(x). \tag{3}$$

Ряд Тейлора для резольвенты $R(\lambda)$ имеет вид

$$R(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A^{-k-1},$$

откуда по неравенствам Коши получаем

$$\|A^{-n}\| \leqslant r^{-n+1} M_A(r).$$

Вместе с (3) это дает (2). Лемма доказана.

Из леммы (1) сразу же получается простая, но полезная

Теорема 1. *Пусть оператор A не имеет спектра и пусть при некотором ρ $(\rho > 0)$ будет*

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{1+\rho}}\, dr = \infty, \tag{4}$$

в то время как

$$\int_1^\infty \frac{\ln M_A(r)}{r^{1+\rho}}\, dr < \infty. \tag{5}$$

Тогда неравенства (1) влекут $x = 0$.

Условие (4) означает, что последовательность $\{m_n\}_0^\infty$ удовлетворяет классическому критерию квазианалитичности «при порядке ρ» [2, стр. 55—56]

Теорема 1 носит в определенном смысле окончательный характер. Более точно, справедлива

Теорема 2. *Пусть $\alpha(t)$ — положительная логарифмически выпуклая функция и пусть при некотором ρ $(\rho > 0)$ будет*

$$\int_1^\infty \frac{\ln \alpha(t)}{t^{1+\rho}}\, dt = \infty. \tag{6}$$

Тогда существует оператор A в гильбертовом пространстве, не имеющий спектра, и такой, что: 1) $\|R(\lambda)\| \leqslant \alpha(|\lambda|)$, 2) для некоторого $x \neq 0$ последовательность $m_n = \|A^n x\|$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ удовлетворяет условию квазианалитичности (4).

Мы начнем доказательство теоремы 2 со вспомогательного утверждения *.

Лемма 2. Пусть функция $\alpha(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда существуют монотонные последовательности $\{\alpha_n\}_0^\infty$ и $\{m_n\}_{-\infty}^\infty$ положительных чисел, для которых

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{\alpha_n} \leqslant \alpha(t) \quad (t \geqslant 0) \tag{7}$$

$$\alpha_k m_n \leqslant m_{k+n+1} \; (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \; k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

и последовательность $\{m_n\}_0^\infty$ удовлетворяет условию (4).

Доказательство. Положим $\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{t}{2}\right)$. Очевидно, функция $\theta(t)$ удовлетворяет условиям теоремы. Пусть

$$a(\tau) = \sup_{s \geqslant 0} \frac{s^\tau}{\theta(s)} \quad (\tau \geqslant 0) \tag{9}$$

и $s(\tau)$ — то значение s, при котором в (9) достигается верхняя грань. Примем $\alpha_n = a(n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Тогда $\alpha_n \geqslant \frac{(2t)^n}{\theta(2t)}$ и

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{\alpha_n} \leqslant \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{(2t)^n}\theta(2t) = 2\theta(2t) = \alpha(t).$$

Для фиксированного значения τ значение функции $a(\tau)$ получается следующим образом: к графику функции $\theta(s)$ в логарифмических координатах проводится опорная прямая с угловым коэффициентом τ, ее начальная ордината равна $-\ln a(\tau)$. Из этого замечания сразу следует $a(\tau_1)\,a(\tau_2) \leqslant a(\tau_1 + \tau_2)$, и, в частности $\alpha_k \alpha_n \leqslant \alpha_{k+n}$.

Переходя к построению последовательности $\{m_n\}$, заметим, что

$$\sup_{\tau \geqslant 0} \frac{t^\tau}{a(\tau)} = \theta(t). \tag{10}$$

Действительно,

$$\sup_{\tau \geqslant 0} \frac{t^\tau}{a(\tau)} \geqslant \frac{t^\tau}{\sup\limits_{s \geqslant 0} \frac{s^\tau}{\theta(s)}} = \left(\frac{t}{s(\tau)}\right)^t \theta(s(\tau)).$$

Ввиду логарифмической выпуклости функции $\theta(t)$ значение $s(\tau)$ можно задавать произвольно. Если, в частности принять $s(\tau) = t$, получим

$$\sup_{\tau \geqslant 0} \frac{t^\tau}{a(\tau)} \geqslant \theta(t). \tag{11}$$

Обозначим через $\tau(t)$ то значение τ, при котором в (10) достигается верхняя грань. Тогда

$$\sup_{\tau \geqslant 0} \frac{t^\tau}{a(\tau)} = \frac{t^{\tau(t)}}{a(\tau(t))} \leqslant \left(\frac{t}{s}\right)^{\tau(t)} \theta(s).$$

* Мы благодарны Б. Я. Левину за полезные обсуждения этой леммы.

[...]ли принять $s=t$, получим неравенство, противоположное (11). Из (10) имеем
$$\tau(t)\ln t=\ln\theta(t)+\ln a(\tau(t)).$$
Поэтому $\tau(t)$ — угловой коэффициент прямой, опорной к графику функции $\theta(t)$ в логарифмических координатах в точке $(\ln t,\ \ln\theta(t))$. В таком случае $\tau(t)$ — функция, монотонно стремящаяся к $+\infty$. Выберем теперь монотонно растущую функцию $\mu(t)$ так, чтобы разность $\nu(t)=\tau(t)-\mu(t)$ монотонно стремилась к $+\infty$ и выполнялось условие
$$\int_1^\infty\frac{\nu(t)\ln t}{t^{1+\rho}}\,dt<\infty. \tag{12}$$
Определим затем монотонно растущую функцию $w(t)$ равенством $w(\mu(t))\equiv\nu(t)$ и положим $m(x)=a(x+w(x))$. Если принять $m_n=m(n)$ для $n=0,1,2,\ldots$, то получится
$$a_k m_n=a(k)\,a(n+w(n))\leqslant a(k+n+w(k+n))\leqslant m_{k+n+1}\ (k,n=0,1,2,\ldots). \tag{13}$$
Пусть
$$m_n=\inf_{k\geqslant 0}\frac{m_{k+n+1}}{a_k}\quad(n=-1,\ -2,\ \ldots), \tag{14}$$
поскольку при каждом фиксированном $n\ (n<0)$ будет
$$\lim_{k\to\infty}\frac{m_{k+n}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{a(k+n+w(k+n))}{a(k)}\geqslant\lim_{k\to\infty}a(n+w(k+n))=\infty,$$
то нижняя грань в (14) достигается на конечном значении k и поэтому $m_n>0$. Из (13) и (14) следует, что последовательности $\{\alpha_n\}_0^\infty$ и $\{m_n\}_{-\infty}^\infty$ удовлетворяют условию (8). Кроме того,
$$\sup_{\tau\geqslant 0}\frac{t^\tau}{m(\tau)}=\sup_{\tau\geqslant 0}\left\{\frac{t^{\tau+w(\tau)}}{a(\tau+w(\tau))}\cdot\frac{1}{t^{w(t)}}\right\}\geqslant\frac{t^{\tau(t)}}{a(\tau(t))}\cdot\frac{1}{t^{w(\mu(t))}}=\frac{\theta(t)}{t^{\nu(t)}}.$$
Но тогда из (6) и (12) получается, что выполнено условие (4). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Возьмем последовательности $\{\alpha_n\}_0^\infty$ и $\{m_n\}_{-\infty}^\infty$ из леммы 2 и проверим, что в гильбертовом пространстве последовательностей $\xi=\{\xi_n\}_{-\infty}^\infty$ с нормой
$$\|\xi\|=\Big(\sum_{n=-\infty}^\infty m_n^2|\xi_n|^2\Big)^{\frac12}$$
оператор правого сдвига $A\xi=\{\xi_{n-1}\}_{-\infty}^\infty$ обладает всеми требуемыми свойствами.

Действительно, если $A\xi=\lambda\xi$, то $\xi_{n-1}=\lambda\xi_n$. При $\lambda=0$ сразу получаем $\xi=0$, а при $\lambda\neq 0$ имеем $\xi_n=\lambda^{-n}\xi_0$. Но последовательность $\lambda^{-n}m_n$ неограничена при $n\to+\infty$ и, следовательно, $\|\xi\|<\infty$ лишь для $\xi_0=0$. Значит, оператор A не имеет собственных векторов. Если $\eta=\{\eta_k\}_{-\infty}^\infty$, то вектор $\xi=\sum_{k=0}^\infty\lambda^k\eta^{(k)}$ при $\eta^{(k)}=\{\eta_{k+n+1}\}_{n=-\infty}^\infty$ удовлетворяет резольвентному уравнению $(A-\lambda E)\xi=\eta$. Таким образом, оператор A не имеет спектра. Для оценки резольвенты заметим, что в силу (8) будет
$$\|\eta^k\|^2=\sum_{n=-\infty}^\infty|\eta_{k+n+1}|^2m_n^2\leqslant\sum_{n=-\infty}^\infty|\eta_{k+n+1}|^2a_k^{-2}m_{k+n+1}^2=a_k^{-2}\|\eta\|.$$

Поэтому

$$\| R(\lambda)\eta \| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k \| \eta^k \| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k \alpha_k^{-1} \|\eta\| \leqslant \alpha(|\lambda|)\|\eta\|.$$

Следовательно, оператор A удовлетворяет всем условиям теоремы. Возьмем в качестве x вектор $\{\delta_{n,1}\}$ ($\delta_{n,k}$ — символ Кронекера). Тогда $A^k x = \{\delta_{n,k}\}$ и $A^k x = m_k$. Теорема доказана.

Дальнейшее исследование мы проведем при условии, что порядок $\rho \leqslant 1$. Тогда теорема 1 допускает существенное развитие. Именно, справедлива

Теорема 3. *Пусть A — оператор без спектра и его резольвента $R(\lambda)$ имеет нормальный тип при порядке $\rho \leqslant 1$. Пусть на двух лучах* $\arg\lambda = \theta_1$, $\arg\lambda = \theta_2$, $\theta_2 - \theta_1 \equiv \pi\rho^{-1} \pmod{2\pi}$ *выполняется оценка* $\| R(\lambda)\| \leqslant \alpha(|\lambda|)$, *где* $\alpha(t)$ $(t \geqslant 0)$ *— положительная непрерывная неубывающая функция, для которой*

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln\alpha(t)}{t^{1+\rho}} \ln t \, dt < \infty. \tag{15}$$

Тогда для того, чтобы из неравенств

$$\| A^n x \| \leqslant C(x)\, m_n \tag{1}$$

следовало $x = 0$, достаточно, а при условии $\sigma_A > 0$ и необходимо, чтобы последовательность $\{m_n\}_0^{\infty}$ удовлетворяла критерию квазианалитичности (4)

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^{1+\rho}} dr = \infty.$$

Для доказательства теоремы нам понадобятся вспомогательные утверждения, к изложению которых мы переходим.

Лемма 3. *Пусть $\beta(t)$ — возрастающая положительная функция на полуоси $t \geqslant 0$ и пусть либо*

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln\beta(t)}{t^2} \ln t \, dt < \infty, \tag{16}$$

либо при некотором q $(0 < q < 1)$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln\beta(t)}{t^{1+q}} dt. \tag{17}$$

Тогда существует целая функция $\omega(\lambda)$ нулевого рода с корнями в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda < 0$, для которой 1) на вещественной оси $\beta(t) \leqslant |\omega(t)|$; 2) при любом $k \geqslant 0$ будет

$$\int_1^{\infty} t^k \beta(t) |\omega^{-1}(t)| \, dt < \infty; \tag{18}$$

3) если выполнено условие (16), то

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln M_\omega(r)}{r^2} dr < \infty, \tag{19}$$

если выполняется (17), то

$$\int_1^\infty \frac{\ln M_\omega(r)}{r^{1+q}}\,dr < \infty. \tag{20}$$

Лемма 3 доказывается аналогично теореме 1 работы [3]: обозначим через a_n ($n = 1, 2, \ldots$) положительные корни уравнения

$$\ln \beta(a_n) = n.$$

Если $\gamma(t) \geqslant 0$ и $\int\limits_1^\infty \gamma(t)\,dt < \infty$, то

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} \gamma(t) \ln \beta(t)\,dt > \ln \beta(a_n) \int_{a_n}^{a_{n+1}} \gamma(t)\,dt = \ln \beta(a_n)(b_n - b_{n+1}),$$

где

$$b_n = \int_{a_n}^\infty \gamma(t)\,dt,$$

поэтому

$$\sum_{n=1}^N n(b_n - b_{n+1}) = \sum_{n=1}^n b_k - Nb_{N+1} < \int_{a_1}^{a_{N+1}} \gamma(t) \ln \beta(t)\,dt.$$

Но

$$(N+1)\,b_{N+1} < \int_{a_{N+1}}^\infty \gamma(t) \ln \beta(t)\,dt,$$

так что

$$\sum_{n=1}^\infty b_n < \int_{a_1}^\infty \gamma(t) \ln \beta(t)\,dt. \tag{21}$$

При выполнении условия (16) положим $\gamma(t) = \frac{\ln t}{t^2}$. Тогда $b_n = \frac{\ln(ea_n)}{a_n}$ и в силу (18)

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\ln a_n}{a_n} < \infty. \tag{22}$$

Если же выполнено условие (17), то возьмем $\gamma(t) = \frac{1}{t^{1+q}}$. Тогда $b_n = \frac{1}{q} a_n^{-q}$,

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{a_n^q} < \infty. \tag{23}$$

В обоих случаях ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{a_n}$ сходится и

$$\tilde{\omega}(\lambda) = e \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - i\frac{e\lambda}{a_n}\right)$$

есть целая функция нулевого рода. Проверим, что функция $\omega(\lambda) = \tilde{\omega}^2(\lambda)$ удовлетворяет всем требованиям леммы. Действительно, для заданного t выберем n так, чтобы $a_n \leqslant t < a_{n+1}$. Тогда

$$\beta(t) < \beta(a_{n+1}) = e^{n+1},$$

$$|\omega(t)| > |\tilde{\omega}(t)| = e \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{e^2}{a_n^2} t^2\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant e \frac{(et)^n}{a_1 a_2 \ldots a_n} \geqslant e^{n+1}$$

и первые два требования выполнены. Условия (19) и (20) следуют из (22) и (23) [4]. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть резольвента оператора A *— мероморфная функция нормального типа при порядке* $\rho \leqslant 1$ *и пусть на лучах* $\arg\lambda = \theta_1$, $\arg\lambda = \theta_2$, $\theta_2 - \theta_1 \equiv \pi\rho^{-1} \pmod{2\pi}$ *она удовлетворяет условиям теоремы 3. Пусть далее для вектора* x *выполнены неравенства (1) и для некоторого функционала* f *функция* $f(R(\lambda)x)$ *оказывается целой. Тогда эта функция имеет минимальный тип при порядке* ρ.

Доказательство. Положим вначале $\beta(t) = \alpha\left(t^{\frac{1}{\rho}}\right)$. Имеем

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln\beta(t)\ln t}{t^2}\,dt = \rho^2 \int_1^{\infty} \frac{\ln\alpha(t)\ln t}{t^{1+\rho}}\,dt < \infty.$$

Обозначим через $\omega(\lambda)$ функцию, построенную по $\beta(t)$ в соответствии с леммой 3; для нее выполняется (18). Примем $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi\rho^{-1}$ и рассмотрим функцию $\omega^{-1}(\lambda) f\left(R\left(\lambda^{\frac{1}{\rho}}\right)x\right)$. Эта функция голоморфна и имеет экспоненциальный тип в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$, а на действительной оси не превосходит $\|f\|\,\|x\|$. По теореме Винера — Пэли

$$\omega^{-1}(\lambda) f\left(R\left(\lambda^{\frac{1}{\rho}}\right)x\right) = \int_{-\infty}^{a} e^{-i\lambda t} \chi(t)\,dt \quad (0 \leqslant \arg\lambda \leqslant \pi), \tag{24}$$

где $\int_{-\infty}^{a} |\chi(t)|^2\,dt < \infty$. Формула обращения дает

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{-1}(\lambda) e^{i\lambda t} f\left(R\left(\lambda^{\frac{1}{\rho}}\right)x\right) d\lambda,$$

а из (18) следует, что $\chi(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция. Последнее равенство нам удобно переписать в виде

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_L e^{i\lambda t} \omega^{-1}(\lambda) f\left(R\left(\lambda^{\frac{1}{\rho}}\right)x\right) d\lambda, \tag{25}$$

[illegible] L — контур, составленный из двух лучей $\{|\lambda| \geqslant 1, \operatorname{Im}\lambda = 0\}$ и полу-[illegible] $\{|\lambda| = 1, \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0\}$. Подставим теперь разложение

$$R(\lambda)x = -\frac{1}{\lambda}x - \frac{1}{\lambda^2}Ax - \dots - \frac{1}{\lambda^k}A^{k-1}x + \frac{1}{\lambda^k}R(\lambda)A^kx$$

При $t > 0$ слагаемые, отвечающие всем членам разложения, кроме послед-[illegible]. Поэтому

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_L e^{i\lambda t}\lambda^{-\frac{k}{\rho}}\omega^{-1}(\lambda)\, f\left(R\left(\lambda^{\frac{1}{\rho}}\right)A^kx\right)d\lambda \quad (t \geqslant 0) \tag{26}$$

$$\chi^{(n)}(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_L e^{i\lambda t}\lambda^{-\frac{k}{\rho}+n}\omega^{-1}(\lambda)\, f\left(R\left(\lambda^{\frac{1}{\rho}}\right)A^kx\right)d\lambda \quad (t \geqslant 0). \tag{27}$$

[illegible]мним теперь, что для вектора x выполнены неравенства (1). Если выбрать [illegible] (27) $k = [n\rho]$, получим

$$|\chi^{(n)}(t)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_L |\lambda|^{n-\frac{[n\rho]}{\rho}}\, |\omega^{-1}(\lambda)|\, \beta(|\lambda|)\, |d\lambda|\; C(x)\, M_n\, \|f\|, \quad (t \geqslant 0)$$

[illegible] Положим $T_\rho(r) = \sup\limits_{n\geqslant 0}\frac{r^n}{M_n}$. Тогда*

$$T_\rho(r) = \sup_{n\geqslant 0}\frac{\left(r^{\frac{1}{\rho}}\right)^{\rho n}}{m_{[\rho n]}} \geqslant \sup_{k\geqslant 0}\frac{\left(r^{\frac{1}{\rho}}\right)^{k}}{m_k} = T\left(r^{\frac{1}{\rho}}\right).$$

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln T_\rho(r)}{r^2}dr \geqslant \rho\int\limits_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{1+\rho}}dr = \infty$$

и по теореме Карлемана—Островского последовательность M_n — квазианалитическая. Из (24) видно, что $\chi(t) = 0$ при $t \geqslant a$. В таком случае $\chi(t) = 0$ при всех $t \geqslant 0$ и равенство (24) теперь принимает вид

$$\omega^{-1}(\lambda)\, f\left(R\left(\lambda^{\frac{1}{\rho}}\right)x\right) = \int\limits_{-\infty}^0 e^{-i\lambda t}\chi(t)\,dt \quad (0 \leqslant \arg\lambda \leqslant \pi).$$

Отсюда заключаем, что функция $\omega^{-1}(\lambda)\, f\left(R\left(\lambda^{\frac{1}{\rho}}\right)x\right)$ имеет в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$ минимальный экспоненциальный тип. Это означает, что функция $f(R(\lambda)x)$ имеет минимальный тип при порядке ρ в угле $0 \leqslant \arg\lambda \leqslant \pi\rho^{-1}$, что доказывает лемму при $\rho \leqslant \frac{1}{2}$. Если $\rho = 1$, то предыдущие соображения можно отнести к полуплоскости $0 \geqslant \arg\lambda \geqslant -\pi$ и тем показать, что функция $f(R(\lambda)x)$ имеет минимальный экспоненциальный тип во всей плоскости. Если же $\frac{1}{2} < \rho < 1$, то по принципу Фрагмена—Линделефа ее тип при порядке ρ минимален в угле $\pi\rho^{-1} \leqslant \arg\lambda \leqslant 2\pi$. Лемма доказана.

---

* Здесь существенно, что $\rho \leqslant 1$.

Лемма 5. Пусть оператор A удовлетворяет условиям предыдущей леммы, а вектор x и линейный функционал f таковы, что функция $f(R(\lambda)x)$ имеет минимальный тип при порядке ρ. Тогда

$$|f(R(\lambda)x)| \leqslant M(|\lambda|)\|x\|\|f\|, \tag{28}$$

где функция $M(r)$ определяется лишь мажорантой $\alpha(r)$ и не зависит от x и f, причем

$$\int_1^\infty \frac{\ln M(r)}{r^{1+\rho}}\,dr < \infty. \tag{29}$$

Доказательство. Снова рассмотрим функцию $\omega^{-1}(\lambda) f\left(R\left(\lambda^{\frac{1}{\rho}}\right)x\right)$ при $0 \leqslant \arg\lambda \leqslant \pi$. По принципу Фрагмена — Линделефа

$$\left|\omega^{-1}(\lambda) f\left(R\left(\lambda^{\frac{1}{\rho}}\right)x\right)\right| \leqslant \|x\|\|f\| \quad (0 \leqslant \arg\lambda \leqslant \pi).$$

Следовательно, при $\rho \leqslant \frac{1}{2}$ получаем

$$|f(R(\lambda)x)| \leqslant M_\omega(|\lambda|^\rho)\|x\|\|f\| \tag{30}$$

и, поскольку

$$\int_1^\infty \frac{\ln M_\omega(r^\rho)}{r^{1+\rho}}\,dr = \rho^{-1}\int_1^\infty \frac{\ln M_\omega(r)}{r^2}\,dr < \infty,$$

можно взять $M(r) = M_\omega(r^\rho)$. При $\rho = 1$, рассуждая так же, для полуплоскости $0 \geqslant \operatorname{Im}\lambda \geqslant -\pi$ можно снова получить оценку (29). Остается рассмотреть случай $\frac{1}{2} < \rho < 1$. Теперь неравенство (28) доказано лишь для $0 \leqslant \arg\lambda \leqslant \pi\rho^{-1}$.

Положим $\varkappa^{-1} = 2 - \rho^{-1}$. Функция $f\left(R\left(\lambda^{\frac{1}{\varkappa}}\right)x\right)$ для $-\pi \leqslant \arg\lambda \leqslant 0$ имеет нормальный тип при порядке $\rho\varkappa^{-1} < 1$. На действительной оси

$$\left|f\left(R\left(t^{\frac{1}{\varkappa}}\right)x\right)\right| \leqslant \alpha\left(\left|\lambda\right|^{\frac{1}{\varkappa}}\right)\|x\|\|f\|.$$

Если взять $\gamma(t) = \alpha\left(t^{\frac{1}{\varkappa}}\right)$, то получим

$$\int_1^\infty \frac{\ln\gamma(t)\ln t}{t^{1+\rho\varkappa^{-1}}}\,dt = \varkappa^2\int_1^\infty \frac{\ln\alpha(t)\ln t}{t^{1+\rho}}\,dt < \infty. \tag{31}$$

Поэтому к функции $\gamma(t)$ применима лемма 3 при $q = \rho\varkappa^{-1}$. Если $\nu(\lambda)$ — соответствующая целая функция, то, снова применяя принцип Фрагмена — Линделефа, приходим к оценке

$$\left|\nu^{-1}(-\lambda) f\left(R\left(\lambda^{\frac{1}{\varkappa}}\right)x\right)\right| \leqslant \|x\|\|f\| \quad (-\pi \leqslant \arg\lambda \leqslant 0).$$

Значит,

$$|f(R(\lambda)x)| \leqslant M_\nu(|\lambda|^\varkappa)\|x\|\|f\|.$$

Поскольку

$$\int_1^\infty \frac{\ln M_\nu(r^\varkappa)}{r^{1+\rho}}\,dr = \varkappa\int_1^\infty \frac{\ln M_\nu(r)}{r^{1+\rho\varkappa^{-1}}}\,dr < \infty,$$

можно принять $M(r) = M_\omega(r^\rho) M_\nu(r^\varkappa)$. Тогда из (28) и (29) следует утверждение леммы.

Перейдем к доказательству теоремы 3.

Достаточность. Обозначим через N множество тех элементов пространства, для которых функция $R(\lambda)x$ имеет минимальный тип при порядке ρ. По лемме 5 на множестве N выполняется неравенство

$$\| R(\lambda) x \| \leqslant M(|\lambda|) \| x \|,$$

где функция $M(r)$ удовлетворяет условию (29). Поэтому N — подпространство. Поскольку $R(\lambda) Ax = x + \lambda R(\lambda) x$ и $R(\lambda) R(\mu) = (\lambda - \mu)^{-1} (R(\lambda) - R(\mu))$, это подпространство инвариантно относительно оператора A и его резольвенты. Таким образом, оператор A не имеет спектра на N и удовлетворяет условию (5). По лемме 4 всякий элемент x, удовлетворяющий неравенствам (1), попадает в N. Но тогда по теореме 1 получаем $x = 0$.

Необходимость. Мы должны указать ненулевой элемент пространства, для которого выполнены неравенства (1), при условии, что $\sigma_A > 0$ и интеграл (4) сходится.

Если M_n и $T_\rho(r)$ имеют тот же смысл, что и в лемме 4, то

$$T_\rho(r) \leqslant r^{\frac{1}{\rho}} \sup_{n \geqslant 0} \frac{\left(r^{\frac{1}{\rho}}\right)^{[\rho n]}}{m_{[\rho n]}} = r^{\frac{1}{\rho}} \sup_{k \geqslant 0} \frac{\left(r^{\frac{1}{\rho}}\right)^{k}}{m_k} = r^{\frac{1}{\rho}} T\left(r^{\frac{1}{\rho}}\right).$$

Поэтому последовательность M_n — неквазианалитическая и существует бесконечно дифференцируемая финитная функция $\psi(t)$ ($\operatorname{supp} \psi = (0, 1)$), для которой

$$\int_0^1 |\psi^{(n)}(t)|^2 \, dt \leqslant M_n^2.$$

Положим $\mu(\lambda) = \int_0^1 e^{i\lambda t} \psi(t) \, dt$. Очевидно,

$$(-1)^n \mu(\lambda) (i\lambda)^n = \int_0^1 \psi^{(n)}(t) e^{i\lambda t} dt$$

и по равенству Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mu(\lambda)|^2 |\lambda|^{2n} d\lambda = \int_0^1 |\psi^{(n)}(t)|^2 dt.$$

Возьмем теперь вектор x, для которого функция $R(\lambda)x$ имеет положительный тип при порядке ρ. Такой вектор найдется, так как в противном случае по лемме 5 получилось бы $\| R(\lambda) \| \leqslant M(|\lambda|)$ и в силу (28) $\sigma_A = 0$. Можно считать, что вектор-функция $R(\lambda)x$ имеет положительный тип в угле $0 \leqslant \arg \lambda \leqslant \pi \rho^{-1}$. Положим

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\lambda) \, \omega^{-1}(\lambda) R\left(\lambda^{\frac{1}{\rho}}\right) x e^{i\lambda t} d\lambda. \tag{32}$$

Тогда

$$Ax(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\lambda) \, \omega^{-1}(\lambda) \, AR\left(\lambda^{\frac{1}{\rho}}\right) x e^{i\lambda t} d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\lambda)\,\omega^{-1}(\lambda)\,\lambda^{\frac{1}{\rho}} R\left(\lambda^{\frac{1}{\rho}}\right) x e^{i\lambda t} d\lambda \ (t \geqslant 0).$$

Аналогично при любом целом n имеем

$$A^n x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\lambda)\,\omega^{-1}(\lambda)\,\lambda^{\frac{n}{\rho}} R\left(\lambda^{\frac{1}{\rho}}\right) x e^{i\lambda t} d\lambda \ \ (t \geqslant 0)$$

и

$$\| A^n x(t) \| \leqslant \text{const} \int_{-\infty}^{\infty} |\mu(\lambda)|^2 |\lambda|^{2\left[\frac{n}{\rho}\right]} |d\lambda|. \ \ (t \geqslant 0)$$

Из (30) получаем $\| A^n x(t) \| \leqslant \text{const}\, M_{[n\rho^{-1}]}$. Но при $\rho \leqslant 1$ будет $M_{[n\rho^{-1}]} = m_{[\rho[n\rho^{-1}]]} = m_n$ и поэтому

$$\| A^n x(t) \| \leqslant \text{const}\, m_n.$$

Доказательство необходимости будет закончено, если окажется, что $x(t) \not\equiv 0$ при $t \geqslant 0$. Предполагая противное, из (32) получаем

$$\mu(\lambda)\,\omega^{-1}(\lambda)\, R\left(\lambda^{\frac{1}{\rho}}\right) x = \int_{-\infty}^{0} e^{-i\lambda t} x(t)\, dt.$$

По теореме о сложении индикаторов [4], отсюда следует, что функция $R\left(\lambda^{\frac{1}{\rho}}\right) x$ имеет нулевой экспоненциальный тип в полуплоскости $0 \leqslant \arg\lambda \leqslant \pi$. Но тогда функция $R(\lambda)\, x$ имеет нулевой тип при порядке ρ в угле $0 \leqslant \arg\lambda \leqslant \pi\rho^{-1}$ вопреки выбору элемента x. Значит $x(t) \not\equiv 0$ при $t > 0$ и теорема полностью доказана.

Перейдем теперь к вопросу о полноте.

Теорема 4. *Пусть резольвента оператора A — мероморфная функция конечного типа при порядке $\rho \leqslant 1$. Пусть на лучах $\arg\lambda = \theta_1$, $\arg\lambda = \theta_2$, $\theta_2 - \theta_1 \equiv \pi\rho^{-1} \pmod{2\pi}$ резольвента удовлетворяет условиям теоремы 3 и пусть последовательность $\{m_n\}_0^\infty$ удовлетворяет критерию квазианалитичности (4). Тогда линейная оболочка корневых векторов оператора A плотна в линейной оболочке векторов, для которых выполняются неравенства (1).*

Доказательство. Корневые подпространства оператора с мероморфной резольвентой дополняемы: ограниченными проекторами на них служат риссовские проекторы. Поэтому оператор A можно считать обратимым (в противном случае надлежит сначала отщепить ядро $\operatorname{Ker} A$).

Пусть f — линейный функционал, который аннулирует корневой линеал оператора A. Покажем, что $f(x) = 0$, если x удовлетворяет оценкам (1).

Действительно, функция $f(R(\lambda)\, x)$ — целая и по леммам 5 и 6 допускает оценку (28), в которой $M(r)$ удовлетворяет условию (29). Из разложения

$$f(R(\lambda)\, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k f(A^{-(k+1)} x),$$

как и при доказательстве леммы 1, получаем

$$|f(A^{-k} x)| \leqslant \frac{M(r)}{r^k}\, r\, \|x\|\, \|f\|.$$

...ловия выполняются и для вектора $A^k x$, поскольку $f(R(\lambda) A^k x)$ имеет ...ства, что и $f\ (R(\lambda) x)$, $\|A^n A^k x\| \leqslant C(x)\, m_{n+k}$, последовательность

...квазианалитическая вместе с последовательностью $\{m_n\}_0^\infty$, а функция ...висит лишь от выбора мажоранты $\alpha(r)$. Но тогда

$$|f(x)| = \left|f\left(A^{-k} A^k x\right)\right| \leqslant \frac{M(r)}{r^k}\, r\, \|A^k x\|\, \|f\| \leqslant C(x)\, \frac{M(r)}{r^k}\, r m_k\, \|f\|.$$

...$(x) \neq 0$, то

$$\sup_{k \geqslant 0} \frac{r^k}{m_k} \leqslant \mathrm{const}\, rM(r),$$

...то противоречит условию (4). Теорема доказана.

В заключение отметим некоторые нерешенные вопросы.

1. Можно ли в условии (15) опустить множитель $\ln t$ и тем самым устра...разрыв между теоремами 2 и 3?

2. Насколько в теореме 3 существенно наличие двух выделенных лучей ...ного роста резольвенты (во всяком случае, их нет у оператора, построен... теореме 2)?

3. Можно ли перенести построенную теорию на случай порядка $\rho > 1$?

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Любич, В. А. Ткаченко. Критерий квазианалитичности для ...рактного оператора. ДАН СССР, 190, № 4, 1970.
2. С. Мандельбройт. Примыкающие ряды, ИЛ, 1955.
3. О. И. Иноземцев, В. А. Марченко. О мажорантах нулевого ...рядка. УМН, XI, № 2 1956 68.
4. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. ГИТТЛ, 1956.

Поступила 21 ноября 1970 г.