ОБ ОБОБЩЕННЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ БЛЯШКЕ НА ПОЛУПЛОСКОСТИ

М. Г. Басов

§ 1. А. А. Гольдберг и И. В. Островский в работе [1] установили ряд теорем об асимптотических свойствах функций, мероморфных в полуплоскости, при условии, что порядок роста функций меньше единицы. В настоящей статье получены некоторые аналогичные результаты для функций, мероморфных в полуплоскости, при условии, что порядок роста функций дробный и больше единицы.

Следуя Р. Неванлинне [2], для функции $f(z)$ $(z = re^{i\varphi})$, мероморфной при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, введем величину

$$\mu(r, w) = a(r, w) + a(-r, w) + b(r, w) + c(r, w),$$

где

$$a(re^{i\theta}, w) = \frac{1}{\pi}\int_1^r \overset{+}{\ln}\left|\frac{1}{f(te^{i\theta}) - w}\right|\frac{dt}{t},$$

$$b(r, w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \overset{+}{\ln}\left|\frac{1}{f(re^{i\theta}) - w}\right|\sin\theta d\theta,$$

$$c(r, w) = \sum_{1 \leqslant r_\nu(w) \leqslant r} \sin\varphi_\nu(w). \tag{0.1}$$

Здесь через $r_\nu(w)e^{i\varphi_\nu(w)}$ обозначены w-точки функции $f(z)$ при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, считаемые с учетом их кратности, т. е. m — кратной w-точке, отвечает в сумме (0.1) m одинаковых слагаемых.

Пусть $\rho(w)$ — порядок функции $\mu(r, w)$, т. е.

$$\rho(w) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\overset{+}{\ln}\mu(r, w)}{\ln r}.$$

Р. Неванлинна доказал в [2]:

Если $\rho(w)$ *больше единицы для одного значения* w и $\rho(w) = \rho$ *для этого значения* w, *то* $\rho(w) \equiv \rho$ для всех w.

Эта теорема позволяет определить порядок функции $f(z)$ следующим образом. Если условие теоремы выполнено, то число ρ будем называть порядком функции $f(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. Если же условие теоремы не выполнено, т. е. $\rho(w) \leqslant 1$ для всех w, то порядок функции $f(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ не определяем.

Кроме стандартных величин $N(r, f)$, $T(r) = T(r, f)$ неванлинновской теории мероморфных функций, характеризующих поведение $f(z)$ [4], мы, следуя [1], рассматриваем величины

$$C(r, 1, w) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sin(\varphi_\nu(w)) \overset{+}{\ln}\frac{r}{r_\nu(w)},$$

$$m_{(h, l)}(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_h^l \overset{+}{\ln}|f(re^{i\varphi})|\, d\varphi \quad (0 \leqslant h < l \leqslant 2\pi).$$

§ 2. Рассмотрим обобщенное произведение Бляшке для верхней полуплоскости. Это произведение (обозначим его через $B(z)$) строится следующим образом. Возьмем некоторую последовательность

$$a_\nu = |a_\nu| e^{i\alpha_\nu}, \ \nu = 1, 2, \ldots, \ a_\nu \to \infty \text{ при } \nu\to\infty, \ \operatorname{Im} a_\nu > 0$$

и построим функцию

$$C(r,\ 1,\ 0)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sin\alpha_\nu \overset{+}{\ln}\frac{r}{|a_\nu|}.$$

Пусть ρ — порядок функции $C(r,\ 1,\ 0)$, g — целое неотрицательное число, такое, что

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha_\nu}{|a_\nu|^{g+1}}<\infty,\quad \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha_\nu}{|a_\nu|^{g}}=\infty. \tag{0.2}$$

Очевидно, $g\leqslant\rho\leqslant g+1$. Положим

$$B(z)=\prod_{\nu=1}^{\infty}D_g(z,\ a_\nu),$$

где

$$D_g(z,\ a_\nu)=\frac{E\left(\frac{z}{a_\nu},\ g\right)}{E\left(\frac{z}{\overline{a}_\nu},\ g\right)},$$

$$E(u,\ g)=(1-u)\,e^{u+\frac{u^2}{2}+\dots+\frac{u^g}{g}}.$$

При $2r\leqslant|a_\nu|$ верно неравенство

$$|\ln D_g(z,\ a_\nu)|\leqslant\frac{2r^{g+1}\sin\alpha_\nu}{|a_\nu|^{g+1}}. \tag{0.3}$$

Из соотношений (0.2) и (0.3) следует, что построенное произведение $B(z)$ сходится абсолютно и равномерно в каждой ограниченной части плоскости и представляет собой мероморфную функцию с нулями a_ν и полюсами $\overline{a}_\nu$. При этом выбранное нами g является наименьшим целым числом, обеспечивающим абсолютную сходимость произведения $B(z)$. Можно показать, что построенное произведение $B(z)$ имеет порядок ρ в полуплоскости $\operatorname{Im} z\geqslant 0$.

Теорема 1. *Пусть $B(z)$ — обобщенное произведение Бляшке для верхней полуплоскости, ρ — его порядок в этой полуплоскости,* $g=[\rho]$.

Если ρ — нецелое число и $\rho>1$, *то верно соотношение*

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{C(r,\ 1,\ 0)}{m_{(0,\ 2\pi)}(r,\ B)}\geqslant\frac{\sin(\rho-g)\pi}{4{,}4\rho^2}.$$

Эта теорема допускает уточнение, если на нули a_ν наложить дополнительные ограничения.

Теорема 2. *Если дополнительно к условиям теоремы 1 потребовать, чтобы все нули $B(z)$ лежали в секторе $0<\arg z\leqslant\pi/2\rho$, то*

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{C(r,\ \rho,\ 0)}{m_{(0,\ 2\pi)}(r,B)}\geqslant\frac{\sin(\rho-g)\pi}{4{,}4\rho},$$

где

$$C(r,\ \rho,\ 0)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sin\rho\alpha_\nu \overset{+}{\ln}\frac{r}{|a_\nu|}.$$

Следствие. *При условиях теоремы 2 для неванлинновского дефекта $B(z)$ в ∞ верна оценка*

$$\delta(\infty, B) \leqslant \frac{4{,}4\rho}{4{,}4\rho + \sin(\rho - g)\pi}. \tag{1}$$

Уместно отметить следующий факт. Пусть $B(z)$ имеет порядок ρ. Пусть λ — порядок $B(z)$ во всей плоскости, т. е. λ есть порядок характеристики

$$T(r, B) = m_{(0,2\pi)}(r, B) + N(r, B).$$

Тогда

$$\delta(\infty, B) \leqslant \frac{4{,}4\lambda}{4{,}4\lambda + |\sin\lambda\pi|}. \tag{2}$$

Это неравенство сразу вытекает из следующей теоремы Эдрея и Фукса:

Если мероморфная функция $f(z)$ имеет порядок λ, то

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r, \infty, f) + N(r, 0, f)}{T(r, f)} \geqslant \frac{2|\sin\lambda\pi|}{4{,}4\lambda + |\sin\lambda\pi|}$$

([3, стр. 294] или [5, стр. 154]), если учесть, что

$$N(r, \infty, B) = N(r, 0, B),$$

$$\delta(\infty, B) = 1 - \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r, \infty, B)}{T(r, B)}.$$

Заметим, что всегда выполняется $0 < \rho \leqslant \lambda$. Если $0 < \alpha_\nu \leqslant \pi/2\rho$, то при одних соотношениях между ρ и λ лучшей оценкой является (1), при других — оценка (2). Например, при $g + \frac{1}{2} \leqslant \rho < \lambda < g + 1$ оценка (1) лучше по сравнению с оценкой (2), а при $g \leqslant \rho < \lambda < g + \frac{1}{4}$ лучше оценка (2) (такие соотношения между ρ и λ могут иметь место). В этом легко убедиться обычными методами дифференциального исчисления, рассматривая функцию $y = \frac{4{,}4x}{4{,}4x + |\sin\pi x|}$.

Теорема 3. *Верно неравенство*

$$C(r, 1{,}0) \leqslant b_{(0,\pi)}(r, B) - b_{(0,\pi)}(r, 1/B).$$

Из теоремы 3 получаем

Следствие. *Всегда выполняется неравенство*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{C(r, 1, 0)}{m_{(0,\pi)}(r, B)} \leqslant 1.$$

§ 3. Рассмотрим обобщенные произведения Бляшке $B(z)$ для верхней полуплоскости, множество нулей которых имеет угловую плотность с показателем λ, т. е. для всех φ, кроме, возможно, счетного множества, существует предел

$$\Delta(\varphi) = \lim_{r\to\infty} \frac{n(r, \varphi)}{r^\lambda}.$$

Здесь $n(r, \varphi)$ — число нулей $B(z)$ в секторе $0 \leqslant \arg z \leqslant \varphi$, $|z| \leqslant r$.

Теорема 4. *Если множество нулей произведения $B(z)$ имеет угловую плотность с показателем λ, то*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{C(r, 1, 0)}{r^\lambda} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi \sin\varphi \, d\Delta(\varphi).$$

Кроме того, если $\lambda < 1$, то верно равенство

$$\lim_{r\to\infty} \frac{C(r,\ 1,\ 0)}{m_{(0,2\pi)}(r,\ B)} = \cos\frac{\lambda\pi}{2}\,\frac{\int\limits_0^\pi \sin\varphi\, d\Delta(\varphi)}{\lambda\int\limits_0^\pi \sin\lambda\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\Delta(\varphi)\,d\varphi}$$

при условии, что r, стремясь к ∞, принимает все положительные значения, за исключением, быть может, некоторого множества нулевой относительной меры.

Теорема 5. *Если все нули произведения $B(z)$ расположены на одном луче $\arg z = \alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$ с некоторой плотностью*

$$\Delta = \lim_{r\to\infty}\frac{n(r)}{r^\lambda}$$

и $\lambda \neq [\lambda] = g$, то верны соотношения

$$\lim_{r\to\infty}\frac{C(r,\ 1,\ 0)}{m_{(0,2\pi)}(r,\ B)} =$$

$$= \frac{\sin\alpha\sin(\lambda-g)\pi}{\left(2\left[\frac{\lambda\alpha}{\pi}\right]+1\right)|\sin\lambda(\pi-\alpha)| + \left\{2\left(g-\left[\frac{\lambda\alpha}{\pi}\right]\right)+1\right\}|\sin\lambda\alpha| - \sin(\lambda-g)\pi},$$

если

$$\alpha \in \left(n\frac{\pi}{\lambda},\ (\lambda-g+n)\frac{\pi}{\lambda}\right),\ n = 0,\ 1,\ \dots,\ g;$$

и

$$\lim_{r\to\infty}\frac{C(r,\ 1,\ 0)}{m_{(0,2\pi)}(r,\ B)} =$$

$$= \frac{\sin\alpha\sin(\lambda-g)\pi}{\left(2\left[\frac{\lambda\alpha}{\pi}\right]+1\right)|\sin\lambda(\pi-\alpha)| + \left\{2\left(g-\left[\frac{\lambda\alpha}{\pi}\right]\right)-1\right\}|\sin\lambda\alpha| + \sin(\lambda-g)\pi},$$

если

$$\alpha \in \left[(\lambda-g+n)\frac{\pi}{\lambda},\ (n+1)\frac{\pi}{\lambda}\right],\ n = 0,\ 1,\ \dots,\ (g-1).$$

§ 4. **Теорема 6.** *Пусть $f(z)$ — мероморфная в верхней полуплоскости функция, ρ — ее порядок; a_1 и b_1 — соответственно нуль и полюс функции $f(z)$, имеющие наименьшие модули.*

Если ρ — нецелое число, $\rho > 1$ и для какой-то пары чисел r_0 и r_1

$$0 < r_0 < r_1 < \min(|a_1|,\ |b_1|)$$

верно соотношение

$$\int\limits_{r_0 \le t \le r_1} \ln|f(t)|\,\frac{|dt|}{t^{\nu+1}} + \frac{2}{r_1^\nu}\int\limits_0^\pi \ln|f(r_1e^{i\varphi})|\sin\nu\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{r_1^{2\nu}}\int\limits_{-r_1}^{r_1} t^{\nu-1}\ln|f(t)|\,dt$$

$\nu = 1, 2, \ldots, g$; $g = [\rho]$, *то справедливо соотношение*

$$\lim_{r\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\left(\frac{g}{g+1-\rho}\operatorname{ctg}\frac{(\rho-g)\pi}{2}+\frac{g+1}{\rho-g}\operatorname{tg}\frac{(\rho-g)\pi}{2}\right)\frac{\lambda(r)}{m_{(0,\pi)}(r,f)}+\right.$$
$$\left.+\frac{4{,}4\rho^2}{\sin(\rho-g)\pi}\cdot\frac{C(r,1,0)+C(r,1,\infty)}{m_{(0,\pi)}(r,f)}\right]\geqslant 1.$$

Здесь

$$\lambda(r)=\begin{cases}0, & \text{если } |t|<r_0\\ \frac{1}{2}(|\ln|f(r)||+|\ln|f(-r)||), & \text{если } |t|\geqslant r_0.\end{cases}$$

§ 5. При установлении теорем 1, 2 и 6 мы существенно используем теорему 1.1. работы [1, стр. 7]. Кроме того, для доказательства теоремы 1 мы используем ие соотношения

$$m_{(0,2\pi)}(r,B)\leqslant\chi(r)\equiv\frac{r^{g+1}}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{\bar a_\nu}^{a_\nu}\Phi\left(\frac{r}{|\xi|}\right)\frac{|d\xi|}{|\xi|^{g+2}},$$

$$\int_0^\infty\frac{\chi(r)}{r^{1+\gamma}}dr=\frac{1}{2}J(1+g-\gamma)\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{\bar a_\nu}^{a_\nu}\frac{|d\xi|}{|\xi|^{\gamma+1}},$$

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{|1-te^{i\varphi}|},$$

$$J(\beta)=\int_0^\infty t^{\beta-1}\,\Phi(t)\,dt\quad(0<\beta<1),$$

$$J(\beta)<\frac{4{,}4}{\sin\beta\pi}.$$

Последнее неравенство установлено в работе [3, стр. 302].

В заключение приношу глубокую благодарность профессору И. В. Островскому за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Гольдберг, И. В. Островский. Некоторые теоремы о росте мероморфных функций. Уч. зап. мат. отд. физ.-матем. ф-та ХГУ и ХМО, т. 27, сер. 4, 3—37 (1961).
2. R. Nevanlinna. Uber die Eigenschaften meromorpher Funktionen in einem Winkelraum., Acta Soc. Sci. Fenn., 50 (1925), № 12, 1—45.
3. Edrei A., Fuchs W. H. J. On the growth of meromorphic functions with several deficient values, Trans. Amer. Math. Soc., 93 (1959), 292—328.
4. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции. М., 1941.
5. Хейман У. Мероморфные функции. Изд-во «Мир», 1966.
6. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, М., 1956.

Поступила 20 октября 1970 г.