О ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЯХ БЕЗ КОНЕЧНЫХ ВАЛИРОНОВСКИХ ДЕФЕКТНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

А. А. Гольдберг

Будем пользоваться без пояснений стандартной терминологией и обозначениями неванлинновской теории [1]. Пусть $f(z)$ — целая функция, $\rho = \rho[f]$ — ее порядок. Известно [1, стр. 269], что если $\rho \leqslant \frac{1}{2}$, то целая функция не имеет конечных дефектных значений в смысле Неванлинны. Ж. Валирон [2, п. 9] доказал, что целая функция не может иметь конечных валироновских дефектных значений, если

$$T(r, f) = O(\ln^2 r), \quad r \to \infty. \tag{1}$$

Если же это условие не выполняется, то, как показали Андерсон и Клуни [3], $f(z)$ может иметь бесконечное множество валироновских дефектных значений (согласно Дрейсину и Шиа [4] — даже множество мощности континуума). Однако, хотя условие (1) не может быть ослаблено, оно не является необходимым для отсутствия конечных валироновских дефектных значений (поскольку мы рассматриваем целые функции, нас будут интересовать только конечные дефектные значения, и мы будем дальше говорить просто о дефектных значениях, пропуская слово «конечные»). Известно, например, что при достаточно правильном росте функции $f(z)$ она не имеет валироновских дефектных значений [5—7]. В указанных работах выделяются различные классы целых функций без валироновских дефектных значений, но для функций из всех этих классов выполняется

$$\ln M(r, f) = (1 + o(1))\, T(r, f), \quad r \to \infty. \tag{2}$$

Мы укажем здесь класс целых функций, который характеризуется достаточно правильным ростом $T(r, f)$, такой, что входящие в него целые функции не имеют валироновских дефектных значений. При этом условие (2) может не выполняться.

Обозначим через L_ρ, $0 \leqslant \rho < \infty$, класс непрерывно дифференцируемых на $[0, \infty)$ положительных функций $l(r)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$1) \ \lim_{r \to \infty} l'(r)\, r \ln r = 0;$$

$$2)\ V(r) = r^{l(r)} \to \infty \text{ при } r \to \infty;$$

$$3)\ \overline{\lim_{r\to\infty}}\, l(r) = \rho.$$

Если условие 2) заменено более сильным условием

$$4)\ \underline{\lim_{r\to\infty}}\, l(r) > 0,$$

то $l(r) \in L_\rho^+ \subset L_\rho$. Если в 3) существует предел, то $l(r)$ называется уточненным порядком и обозначается через $\rho(r)$.

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ — целая трансцендентная функция, $\rho = \rho[f] \leqslant \frac{1}{2}$, и для некоторой функции $l(r) \in L_\rho$ выполняется*

$$\lim_{r\to\infty} T(r, f)\ /\ V(r) = A,\ 0 < A < \infty. \tag{3}$$

Тогда $\Delta(a, f) = 0$ для всех $a \neq \infty$, т. е.

$$\lim_{r\to\infty} N(r, a)\ /V(r) = A. \tag{4}$$

Наоборот, если для некоторого $a \neq \infty$ выполняется (4), то имеет место (3).

Ограничение $\rho \leqslant \frac{1}{2}$ в этой теореме не может быть снято, так как для любого ρ, $\frac{1}{2} < \rho < \infty$, можно указать целую функцию $f(z)$, для которой (3) выполняется с $l(r) \equiv \rho$, но $\delta(0, f) = \Delta(0, f) > 0$ (при ρ нецелом [1, стр. 150, упр. 1]; при ρ целом можно взять $\exp(z^\rho)$). Из (3) не следует (2) даже при $l(r) \equiv \rho$, $0 < \rho \leqslant \frac{1}{2}$ (см. пример 2, стр. 102 в [1]). Если $\rho[f] = 0$ и $\rho(r) \in L_0$, то из (3) следует (2). Действительно, в этом случае из (3) в силу теоремы 1 будет вытекать (4), откуда

$$n(r, a) \leqslant \int_r^{er} n(t, a)\frac{dt}{t} = N(er, a) - N(r, a) =$$

$$= A(1 + o(1))\, V(er) - A(1 + o(1))\, V(r) = o(V(r)),\ r \to \infty.$$

Таким образом, $n(r, a) = o(N(r, a))$, $r \to \infty$, и из теоремы 5 А. Ф. Гришина [8] сразу следует выполнение (2). Если же при $\rho = 0$ дано, что выполняется (4), то (3) следует непосредственно из указанной теоремы А. Ф. Гришина без ссылки на теорему 1.

Попутно докажем такую теорему.

Теорема 2. *Пусть $f(z)$ — целая функция, $\rho = \rho[f] \leqslant \frac{1}{2}$, и для некоторой функции $l(r) \in L_\rho^+$ выполняется* (3). *Тогда для всех $a \neq \infty$ выполняется*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r, a)}{l(r)\, V(r)} = A,\ 0 < A < \infty. \tag{5}$$

Наоборот, если для некоторого $a \neq \infty$ выполняется (5), *то имеет место* (3).

В этой теореме условие $l(r) \in L_\rho^+$, вообще говоря, нельзя заменить условием $l(r) \in L_\rho$. Ограничимся таким примером. Пусть $n(r, 0) \sim 2 \ln r$. Тогда $N(r, 0) \sim \ln^2 r = r^{l(r)}$, где $l(r) = 2 \ln \ln r / \ln r$. По теореме 1 имеем $T(r, f) \sim \ln^2 r$. Однако $n(r, 0) = o(l(r) V(r))$ при $r \to \infty$.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие. *Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ, $0 < \rho \leqslant \frac{1}{2}$. Для того чтобы существовал предел*

$$\lim_{r \to \infty} T(r, f)/r^\rho \neq 0, \infty, \tag{6}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовал предел

$$\lim_{r \to \infty} n(r, 0)/r^\rho \neq 0, \infty. \tag{7}$$

Как показал В. С. Азарин [9], при $\frac{1}{2} < \rho < \infty$ условие (7) не является ни необходимым, ни достаточным для выполнения (6). В. С. Азарин высказал предположение о справедливости указанного выше следствия. Автор глубоко благодарен В. С. Азарину за предложенную задачу и за предоставленную возможность ознакомиться со статьей [9] в рукописи.

Чтобы получить следствие 2, достаточно в теореме 1 ограничиться случаем, когда $l(r) = \rho(r)$ является уточненным порядком. Этот более слабый вариант теоремы 1 другим методом доказал Бернштейн [11], с работой которого автор познакомился, когда настоящая статья уже находилась в редакции.

Доказательство теоремы 1. Не уменьшая общности, можно считать, что $a = 0$, $f(0) = 1$ и $f(z) \neq 0$ в круге $\{|z| \leqslant 2\}$. Тогда функция $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right), \quad a_k \to \infty.$$

Обозначим

$$\check{f}(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{|a_k|}\right).$$

Очевидно, что $n(r, 0, f) = n\left(r, 0, \check{f}\right) = n(r, 0)$, $N(r, 0, f) = N(r, 0, \check{f}) = N(r, 0)$. С другой стороны, известно [1, гл. V, лемма 4. 4], что $T(r, f) \leqslant T\left(r, \check{f}\right)$. Пусть ε — произвольно малое положительное число. Изменяя в случае надобности определение $l(r)$ на конечном сегменте, можно считать, что для всех $r \geqslant 2$ выполняется $T(r, f) \leqslant (A+\varepsilon) V(r)$. Тогда

$$N(r, 0) \leqslant (A+\varepsilon) V(r), \; r \geqslant 0. \tag{8}$$

Если не выполняется (4), то существуют такое число B, $0 < B < A$, и такая последовательность $r_k \to \infty$, что

$$N(r_k, 0) \leqslant BV(r_k), \; k = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

При $k \geqslant k_0$ выполняется

$$\min_{|z|=r_k} |f(z)| < 1. \tag{10}$$

Действительно, в противном случае для некоторой подпоследовательности $k_j \to \infty$ $\min\limits_{|z|=r_{k_j}} |f(z)| \geqslant 1$

и

$$N(r_{k_j}, 0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(r_{k_j} e^{i\varphi})|\, d\varphi \approx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|f(r_{k_j} e^{i\varphi})|\, d\varphi = T(r_{k_j}, f).$$

Тогда $BV(r_{k_j}) \geqslant (A+o(1))\, V(r_{k_j})$, $B \geqslant A$, и мы приходим к противоречию.

Из (10) следует, что то же неравенство выполняется для $\check{f}(z)$. Очевидно, что $\left|\check{f}(r_k e^{i\varphi})\right|$ как функция от φ строго возрастает при $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, а при $\operatorname{Re} z \leqslant 0$, $z \neq 0$, выполняется $\left|\check{f}(z)\right| > 1$. Следовательно, существует такое β_k, $0 < \beta_k < \pi/2$, что $\left|\check{f}(r_k e^{i\beta_k})\right| = 1$. Согласно формуле Эдрея — Фукса [1, гл. V, лемма 4.5],

$$T\left(r_k, \check{f}\right) = \int_0^\infty N(t, 0)\, K(t, r_k, \beta_k)\, dt = \int_0^\infty N(tr_k, 0)\, K(t, 1, \beta_k)\, dt, \tag{11}$$

$$K(t, r, \beta) = \frac{1}{\pi}\, \frac{r\sin\beta}{t^2 + r^2 - 2rt\cos\beta}.$$

Пусть q — некоторое число, такое, что $(B/A)^{1/\rho} < q < 1$ при $0 < \rho \leqslant \frac{1}{2}$ и $0 < q < 1$ при $\rho = 0$, а σ и R — числа такие, что $0 < \sigma < \frac{1}{2}$, $2 < R < \infty$. При $\sigma \leqslant t \leqslant R$

$$\frac{V(rt)}{V(r)\, t^{l(r)}} \to 1, \; r \to \infty, \tag{12}$$

равномерно относительно $t \in [\sigma, R]$ (см. [1, стр. 91]). Так как при $q \leqslant t \leqslant 1$ и $k \geqslant k_1$ выполняется

$$\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)t^{l(r_k)}-B>Aq^{\rho}-B>0,$$

то из (12) следует, что при $k\geqslant k_2$ и $q\leqslant t\leqslant 1$ выполняется

$$\frac{(A+\varepsilon)V(r_kt)-BV(r_k)}{V(r_k)}=(A+\varepsilon)\frac{V(r_kt)}{V(r_k)t^{l(r_k)}}t^{l(r_k)}-B>Aq^{\rho}-B.$$

Из (8), (9) и (11) следует, что

$$T(r_k, f)\leqslant T\left(r_k, \overset{\vee}{f}\right)\leqslant\left(\int_0^q+\int_1^{\infty}\right)(A+\varepsilon)V(r_kt)K(t, 1, \beta_k)\,dt+$$

$$+\int_q^1 BV(r_k)K(t, 1, \beta_k)\,dt=\int_0^{\infty}(A+\varepsilon)V(r_kt)K(t, 1, \beta_k)\,dt-$$

$$-\int_q^1\{(A+\varepsilon)V(r_kt)-BV(r_k)\}K(t, 1, \beta_k)\,dt.$$

При $k\geqslant k_2$ имеем

$$(1+o(1))V(r_k)\leqslant(A+\varepsilon)\left(\int_0^{\delta}+\int_{\sigma}^{R}+\int_R^{\infty}\right)V(r_kt)K(t, 1, \beta_k)\,dt-$$

$$-V(r_k)(Aq^{\rho}-B)\int_q^1 K(t, 1, \beta_k)\,dt. \qquad (13)$$

Здесь и ниже через $o(1)$ обозначаем величину, которая стремится к 0 при $k\to\infty$. Элементарный подсчет дает

$$\int_q^1 K(t, 1, \beta_k)\,dt=\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{1-q}{(1+q)\operatorname{tg}\frac{\beta_k}{2}}>\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{1-q}{1+q}=Q>0. \qquad (14)$$

Учитывая (12), имеем

$$\int_{\sigma}^{R}V(r_kt)K(t, 1, \beta_k)\,dt\leqslant(1+o(1))V(r_k)\int_{\sigma}^{R}t^{l(r_k)}K(t, 1, \beta_k)\,dt<$$

$$<(1+o(1))V(r_k)\int_0^{\infty}t^{l(r_k)}K(t, 1, \beta_k)\,dt.$$

С помощью теории вычетов, учитывая, что $l(r_k)\leqslant\frac{1}{2}+o(1)$, легко находим, что

$$\int_0^{\infty}t^{l(r_k)}K(t, 1, \beta_k)\,dt=\frac{\sin l(r_k)(\pi-\beta_k)}{\sin l(r_k)\pi}\leqslant 1+o(1).$$

Таким образом,

$$\int_{\sigma}^{R}V(r_kt)K(t, 1, \beta_k)\,dt\leqslant(1+o(1))V(r_k). \qquad (15)$$

Легко видеть, что при $r \geqslant r'$ функция $V(t)\sqrt{t}$ является возрастающей и $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant r} V(t)\sqrt{t} = V(r)\sqrt{r}$. Тогда при $r_k \geqslant r'$

$$\int_0^\sigma V(r_k t) K(t, 1, \beta_k)\, dt \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^\sigma V(r_k t)\frac{dt}{(t-1)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{\pi}\int_0^\sigma V(r_k t)\, dt = \frac{4}{\pi}\int_0^\sigma \{V(r_k t)(r_k t)^{1/2}\}(r_k t)^{-1/2} dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{\pi}\int_0^\sigma V(r_k) r_k^{1/2}(r_k t)^{-1/2} dt = \frac{8}{\pi} V(r_k)\sqrt{\sigma}. \tag{16}$$

Функция $V(r) r^{-\rho_1}$, $\rho < \rho_1 < 1$, является убывающей при $r \geqslant r''$. Поэтому при $r_k \geqslant r''$

$$\int_P^\infty V(r_k t) K(t, 1, \beta_k)\, dt \leqslant \frac{1}{\pi}\int_R^\infty V(r_k t)\frac{dt}{(t-1)^2} \leqslant \frac{4}{\pi}\int_R^\infty V(r_k t)\frac{dt}{t^2} =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_R^\infty \frac{V(r_k t)}{(r_k t)^{\rho_1}}(r_k t)^{\rho_1}\frac{dt}{t^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{\pi}\int_R^\infty \frac{V(r_k)}{r_k^{\rho_1}}(r_k t)^{\rho_1}\frac{dt}{t^2} = \frac{4}{\pi}\frac{V(r_k)}{1-\rho_1} R^{\rho_1 - 1}. \tag{17}$$

Подставляя (14—17) в (13) и устремляя k к ∞, получим

$$A \leqslant (A+\varepsilon)\left\{\frac{8}{\pi}\sqrt{\sigma} + 1 + R^{\rho_1-1}\frac{4}{\pi(1-\rho_1)}\right\} - (Aq^\rho - B)Q.$$

Устремим в этом неравенстве σ к 0 и R к ∞. Тогда получим

$$0 < (Aq^\rho - B)Q \leqslant \varepsilon.$$

Так как ε может быть выбрано сколь угодно малым, мы получаем противоречие. Таким образом, показано, что из (3) следует (4).

Покажем теперь, что из (4) следует (3). Как и раньше, не уменьшая общности, можно считать, что $a = 0$, $f(0) = 1$, $f(z) \neq 0$ при $|z| \leqslant 2$. Найдем асимптотическое выражение для $\check{f}(z)$. Соответствующие выкладки аналогичны проведенным в [1, стр. 92—94]. В случае, когда $l(r) \in L_\rho^+$, можно было бы ограничиться ссылкой на [1, стр. 92—94] и на лемму, которую мы используем при доказательстве теоремы 2.

Пусть $0 < \delta < \pi$. Возьмем в области $\{\delta < \arg z < 2\pi - \delta\} \cup \cup \{|z| < 2\}$ ту ветвь $\ln \check{f}(z)$, для которой $\ln \check{f}(0) = 0$. Для нее имеется представление [1, стр. 296, (4.17)]

$$\ln \check{f}(z) = -z\int_0^\infty N(t, 0)\frac{dt}{(t-z)^2}. \tag{18}$$

Используя теорию вычетов, нетрудно показать, что ($z = re^{i\varphi}$, $0 < \varphi < 2\pi$)

$$- zA \int_0^\infty \frac{t^{l(r)} dt}{(t-z)^2} = A \frac{\pi l(r)}{\sin \pi l(r)} e^{i(\varphi - \pi) l(r)} V(r). \tag{19}$$

Не уменьшая общности, можно считать, что для всех $r \geqslant 0$ выполняется $N(r, 0) \leqslant (A + \varepsilon) V(r)$, $\varepsilon > 0$. Покажем, что при $\delta < \varphi < 2\pi - \delta$

$$I(r, \varphi) = \left| \ln \check{f}(re^{i\varphi}) - A \frac{\pi l(r)}{\sin \pi l(r)} e^{i(\varphi-\pi) l(r)} V(r) \right| = $$
$$= o(V(r)), \quad r \to \infty. \tag{20}$$

Пусть $0 < a < 1 < b < \infty$. Запишем

$$I(r, \varphi) = \left| -z \int_0^\infty N(t, 0) \frac{dt}{(t-z)^2} + zA \int_0^\infty \frac{t^{l(r)} dt}{(t-z)^2} \right| =$$
$$= r \left| \int_0^{ar} \frac{N(t, 0)\, dt}{(t-z)^2} + \int_{br}^\infty \frac{N(t, 0)\, dt}{(t-z)^2} + \int_{ar}^{br} \frac{N(t, 0) - AV(t)}{(t-z)^2} dt + \right.$$
$$\left. + A \int_{ar}^{br} \frac{t^{l(t)} - t^{l(r)}}{(t-z)^2} dt - A \int_0^{ar} \frac{t^{l(r)} dt}{(t-z)^2} - A \int_{br}^\infty \frac{t^{l(r)} dt}{(t-z)^2} \right|.$$

Учитывая, что при $\delta < \varphi < 2\pi - \delta$ выполняется $|t - z| \geqslant (t + r) \sin \frac{\delta}{2}$, получаем

$$I(r, \varphi) \leqslant r \operatorname{cosec}^2 \frac{\delta}{2} \left\{ \int_1^{ar} \frac{N(t, 0)\, dt}{(t+r)^2} + \int_{br}^\infty \frac{N(t, 0)\, dt}{(t+r)^2} + \right.$$
$$+ \int_{ar}^{br} \frac{|N(t, 0) - AV(t)|}{(t+r)^2} dt + A \int_{ar}^{br} \frac{|t^{l(t)} - t^{l(r)}|}{(t+r)^2} dt + A \int_0^{ar} \frac{t^{l(r)} dt}{(t+r)^2} +$$
$$\left. + A \int_{br}^\infty \frac{t^{l(r)} dt}{(t+r)^2} \right\} = r \operatorname{cosec}^2 \frac{\delta}{2} \sum_{j=1}^6 I_j(r, \varphi). \tag{21}$$

Будем обозначать через $o(1)$ величину, стремящуюся к 0 при $r \to \infty$. Тогда, учитывая (12), имеем

$$I_1(r, \varphi) \leqslant \int_1^{ar} \frac{N(ar, 0)\, dt}{(t+r)^2} \leqslant N(ar, 0) \frac{a}{r} \leqslant (A + o(1)) V(ar) \frac{a}{r} =$$
$$= (A + o(1)) V(r) a^{l(r)+1} \frac{1}{r} \leqslant (A + o(1)) V(r) \frac{a}{r}. \tag{22}$$

Далее

$$I_2(r, \varphi) \leqslant (A + o(1)) \int_{br}^{\infty} t^{l(t)-2} dt = (A + o(1)) \frac{(br)^{l(br)-1}}{1 - l(br)} \leqslant$$

$$\leqslant (2A + o(1)) V(br) \frac{1}{br} = (2A + o(1)) V(r) \frac{b^{l(r)-1}}{r} \leqslant$$

$$\leqslant (2A + o(1)) V(r) \frac{1}{r\sqrt{b}}. \tag{23}$$

Здесь мы учли, что

$$\int_{r}^{\infty} t^{l(t)-2} dt = (1 + o(1)) \frac{r^{l(r)-1}}{1 - l(r)}.$$

Это легко проверяется применением правила **Лопиталя.**

Из (4) и (12) следует, что

$$I_3(r, \varphi) \leqslant o(1) \int_{ar}^{br} \frac{V(t)\, dt}{(t+r)^2} = o\left(\frac{1}{r}\right) \int_{a}^{b} \frac{V(tr)\, dt}{(1+t)^2} \leqslant$$

$$\leqslant o\left(\frac{V(r)}{r}\right) \int_{a}^{b} \frac{t^{l(r)} dt}{(1+t)^2} \leqslant o\left(\frac{V(r)}{r}\right) \int_{0}^{\infty} \frac{t^{l(r)} dt}{(1+t)^2} =$$

$$= o\left(\frac{V(r)}{r}\right) \frac{\pi\, l(r)}{\sin \pi l(r)} = o\left(\frac{V(r)}{r}\right). \tag{24}$$

Из (12) следует также, что

$$I_4(r, \varphi) = \frac{A}{r} \int_{a}^{b} \frac{\left| (tr)^{l(tr)} - (tr)^{l(r)} \right|}{(1+t)^2} dt =$$

$$= o(1) \frac{A}{r} \int_{a}^{b} \frac{(tr)^{l(r)}}{(1+t)^2} dt = o\left(\frac{V(r)}{r}\right) \int_{a}^{b} \frac{t^{l(r)}}{(1+t)^2} dt = o\left(\frac{V(r)}{r}\right). \tag{25}$$

Далее

$$I_5(r, \varphi) \leqslant A \int_{0}^{ar} \frac{V(r)\, dt}{(t+r)^2} \leqslant AV(r) \frac{a}{r} \tag{26}$$

и так же, как при выводе (23), получаем

$$I_6(r, \varphi) \leqslant A \int_{br}^{\infty} t^{l(r)-2} dt \leqslant (2A + o(1)) \frac{V(r)}{r\sqrt{b}}. \tag{27}$$

Из (21—27) находим

$$\varlimsup_{r \to \infty} \sup_{\varphi \in (\delta,\, 2\pi - \delta)} I(r, \varphi) / V(r) \leqslant 2A \left(a + \frac{1}{\sqrt{b}}\right) \operatorname{cosec}^2 \frac{\delta}{2}.$$

Так как число a можно выбирать сколь угодно малым, а число b сколь угодно большим, то получаем соотношение (20). Из (20) следует, что

$$\ln\left|\overset{\vee}{f}(re^{i\varphi})\right| = AV(r)\frac{\pi l(r)}{\sin\pi l(r)}\cos l(r)(\varphi-\pi)+o(V(r)),\ \delta<\varphi<2\pi-\delta.$$

Отсюда получаем

$$T\left(r,\overset{\vee}{f}\right)\leqslant\ln\left|\overset{\vee}{f}(-r)\right| = AV(r)\frac{\pi l(r)}{\sin\pi l(r)}+o(V(r))=O(V(r))$$

и, используя теорему 7.4 из гл. 1 в [1] и замечание 1 к ней, находим, что

$$T\left(r,\overset{\vee}{f}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\left|\overset{\vee}{f}(re^{i\varphi})\right|d\varphi=\frac{A}{2}V(r)\frac{l(r)}{\sin\pi l(r)}\int_0^{2\pi}\cos l(r)(\varphi-$$

$$-\pi)\,d\varphi+o(V(r))=AV(r)+o(V(r)).$$

Так как $N(r,0)\leqslant T(r,f)\leqslant T\left(r,\overset{\vee}{f}\right)$, то выполняется (3). Теорема 1 доказана.

Замечание. Если (4) выполняется при $a=0$ с $l(r)\in L_\rho$, где $\rho<1$, то формула (20) остается в силе и мы получаем

$$T\left(r,\overset{\vee}{f}\right)=AB(l(r))V(r)+o(V(r)),$$

где $B(x)=1$ при $0\leqslant x\leqslant {}^1/_2$, $B(x)=\operatorname{cosec}\pi x$ при ${}^1/_2\leqslant x<1$.

Доказательство теоремы 2. Теорема 2 сразу следует из теоремы 1 и следующей леммы.

Лемма. *Пусть $l(r)\in L_\rho^+$, $0<\rho<\infty$. Для того чтобы выполнялось (4), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось (5).*

Если $l(r)=\rho(r)$ — уточненный порядок, $\rho(r)\to\rho$, то лемма хорошо известна [10]. В общем случае доказательство проводится по тому же плану. Для доказательства достаточности устанавливаем с помощью правила Лопиталя, что

$$\int_1^r\{1+o(1)\}\,t^{l(t)-1}l(t)\,dt=(1+o(1))\,V(r).$$

Докажем необходимость. Пусть $\gamma=\gamma(r)$ — функция такая, что $\gamma(r)\downarrow 0$ при $r\to\infty$ и

$$|N(r,a)-AV(r)|\leqslant\gamma^2(r)\,V(r),$$

$$\left|\frac{(rt)^{l(rt)}}{(rt)^{l(r)}}-1\right|\leqslant\gamma^2(r),\ {}^1/_2\leqslant t\leqslant 2.$$

Существование такой функции $\gamma(r)$ очевидно.

Так как

$$\frac{1-\gamma}{\gamma}\int_{r-\gamma r}^{r}\frac{n(t,a)}{t}dt\leqslant n(r,a)\leqslant\frac{1+\gamma}{\gamma}\int_r^{r+\gamma r}\frac{n(t,a)}{t}dt,$$

$$\frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{N(r,a)-N(r-\gamma r,a)}{Al(r)V(r)} \leqslant \frac{n(r,a)}{Al(r)V(r)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1+\gamma}{\gamma}\frac{N(r+\gamma r,a)-N(r,a)}{Al(r)V(r)},$$

то нам достаточно показать, что $(\gamma=\gamma(r))$

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{1+\gamma}{\gamma}\frac{N(r+\gamma r,a)-N(r,a)}{Al(r)V(r)}=1 \tag{28}$$

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{N(r,a)-N(r-\gamma r,a)}{Al(r)V(r)}=1. \tag{29}$$

Докажем соотношение (28), а (29) доказывается аналогично. При достаточно больших r

$$\gamma_1=\gamma_1(r)=\gamma\{r(1+\gamma(r))\}\leqslant\gamma=\gamma(r)\leqslant\frac{1}{2},$$

$$\frac{1+\gamma}{\gamma}\frac{N(r+\gamma r,a)-N(r,a)}{Al(r)V(r)}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1+\gamma}{\gamma}\frac{V\{r(1+\gamma)\}\left(A+\gamma_1^2\right)-V(r)(A-\gamma^2)}{Al(r)V(r)}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1+\gamma}{\gamma}\frac{\{r(1+\gamma)\}^{l(r)}(A+\gamma^2)(1+\gamma^2)-V(r)(A-\gamma^2)}{Al(r)V(r)}=$$
$$=(1+\gamma)\frac{(1+\gamma)^{l(r)}(A+\gamma^2)(1+\gamma^2)-A+\gamma^2}{\gamma Al(r)}=$$
$$=(1+\gamma)\frac{Al(r)\gamma+0(\gamma^2)}{Al(r)\gamma}\underset{r\to\infty}{\to}1.$$

Мы учитываем здесь то обстоятельство, что $l(r)$ ограничено сверху *и снизу положительными постоянными.*

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Гольдберг, И. В. Островский. Распределение значений мероморфных функций. Изд-во «Наука», 1970.

2. G. Valiron. Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulière. Ann. fac. sci. Univ. Toulouse, 5 (1914), 117—257.

3. J. M. Anderson, J. Clunie. Slowly growing meromorphic functions. Comment. math. helv. 40 (1966), 267—280.

4. D. Drasin, D. F. Shea. On the Valiron deficiencies of integral functions. Bull. London, Math., Soc., 1 (1969), 174—178.

5. S. K. Singh, K. Manjanathaian. On the growth of a class of entire functions. Revue fac. sci. univ. Istanbul, Ser. A. 26 (1961), 9—13.

6. S. M. Shah. Entire functions with no finite deficient value. Arch. Rat. Mech. Analysis, 26 (1967), 179—187.

7. S. M. Shah. Meromorphic functions with one deficient value. J. Austral. Math. Soc., 10 (1969), 355—358.

8. А. Ф. Гришин. О функциях, голоморфных внутри угла и имеющих там нулевой порядок. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 1, 1965, 41—56.

9. В. С. Азарин. О регулярности роста целых функций. ДАН СССР, **200** (1971), 511—512.

10. S. K. Singh. Exceptional values of entire functions. Duke Math. J., **23** (1956), 527—531.

11. A. Baernstein. A nonlinear Tauberian theorem in function theory. Trans. Amer. Math. Soc., **146** (1969), 87—104.

Поступила 14 ноября 1970 г.