О РЕШЕНИИ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА ОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ

Н. В. Говоров

1. В статье [7] была рассмотрена в классе ограниченных функций следующая краевая задача Римана с бесконечным индексом:

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t), \quad 1 < t < \infty, \tag{1}$$

где выполнялись такие предположения:

1. $\arg G(t) = 2\pi\varphi(t)\,t^\rho,\ 0 < \rho < \infty,$ (2)

$$\varphi(t) \in H(\mu_0)^*,\ \varphi(\infty) = \lambda > 0, \tag{3}$$

$$-1 < \varphi(1) \leqslant 0; \tag{4}$$

2. $\ln|G(t)| \in H(\mu)^*,\ 0 < \mu \leqslant 1;$ (5)

3. $\max\{0,\ (2\rho - 1)/(2\rho + 1)\} < \mu_0 \leqslant 1.$ (6)

Точку $t = \infty$, в которой $\arg G(t)$ обращается в бесконечность, мы называем точкой завихрения.

В настоящей работе рассмотрим задачу (1) в более узком классе функций, отыскивая ограниченные решения вполне регулярного роста (в. р. р.) порядка меньше, чем $\min\left(\rho, \frac{1}{2}\right)$.

2. Введем некоторые понятия и определения. Обозначим через L луч (контур): $\{1 \leqslant t \leqslant \infty\}$, а через D — область с границей L. Классом B назовем класс функций, аналитических в D и ограниченных в каждой конечной части плоскости (но, может быть, неограниченных в D). Подкласс класса $\tilde{B}$, состоящий из функций, ограниченных в D, обозначим через B.

Углы $\alpha < \arg z < \beta$ и $\alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta$ будем соответственно обозначать через $(\widehat{\alpha, \beta})$ и $[\widehat{\alpha, \beta}]$.

Порядок функции внутри угла всюду в дальнейшем понимается в смысле одного из следующих определений [6, стр. 153].

Определение 1. *Пусть внутри угла* $(\widehat{\alpha, \beta})$ *задана аналитическая функция* $f(z) \not\equiv 0$, *непрерывная в* $[\widehat{\alpha, \beta}]$, *и пусть при некотором* $\mu > 0$ *имеет место асимптотическая оценка*

$$\max_{\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta} |f(re^{i\theta})| < \exp(r^\mu),\ r > R(\mu). \tag{7}$$

* Принадлежность классу Гельдера ($f(t) \in H$ или $f(t) \in H(\mu)$) означает здесь, что $|f(t_1) - f(t_2)| \leqslant A\left|t_1^{-1} - t_2^{-1}\right|^\mu$.

Тогда точная нижняя граница ρ множества чисел $\{\nu\}$, для которых

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-\nu} \ln |f(re^{i\theta})| \equiv 0 \quad (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta),\ \nu > 0, \tag{8}$$

называется порядком функции $f(z)$ в угле $(\widehat{\alpha, \beta})$, а функция

$$h_f(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-\rho} \ln |f(re^{i\theta})| \tag{9}$$

называется ее индикатором.

Если (7) не верно ни при каком $\mu > 0$, то полагаем $\rho = \infty$.

Определение 2. (Е. Титчмарш, [4, стр. 209]). *Порядком функции $f(z)$, регулярной в $(\widehat{\alpha, \beta})$ и непрерывной в $[\widehat{\alpha, \beta}]$*, называется точная нижняя граница для всех чисел $\nu > 0$, для которых равномерно по θ выполняется стремление к верхнему пределу в (8).*

Подробный анализ этих определений и доказательство их равносильности дается в [6]. Подчеркнем, что для случая целой функции каждое из этих определений равносильно общепринятому. В случае функции, заданной внутри угла, определения 1 и 2 удобны тем, что могут характеризовать убывание ограниченной функции (при $z \to \infty$). Напомним, что такая функция для случая задания ее в $[\widehat{0, 2\pi}]$ не может иметь порядка больше $\frac{1}{2}$.

Любое число $\mu \geqslant \rho_f$, где ρ_f — порядок функции $f(z)$ в $(\widehat{\alpha, \beta})$, будем называть формальным порядком этой функции. Из определения 1 следует, что для любого формального порядка μ, большего ρ_f, справедливо асимптотическое неравенство

$$\max_{\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta} \ln |f(re^{i\theta})| < r^{\mu}, \tag{10}$$

а для формального индикатора $h_f^{(\mu)}(\theta)$ при $\mu > \rho_f$ справедливо тождество

$$h_f^{(\mu)}(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-\mu} \ln |f(re^{i\theta})| \equiv 0 \quad (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta). \tag{11}$$

В силу сделанного выше замечания мы можем считать число $\frac{1}{2}$ формальным порядком (в области D) любой функции класса B.

Функцию $f(z)$, регулярную и порядка $\sigma > 0$ (или формального порядка $\sigma > 0$) в $(\widehat{\alpha, \beta})$, будем, как обычно, называть функцией конечного типа, если асимптотически

$$\sup_{|z|=r,\ \alpha<\arg z<\beta} \ln |f(z)| < Kr^{\sigma},\ K = \text{const}.$$

* В определении Е. Титчмарша здесь добавлено требование непрерывности в $[\widehat{0, 2\pi}]$. Если его снять в обоих определениях, то они останутся равносильными.

Условимся в дальнейшем (ср. [3, стр. 182, 127]) называть слабым пределом такой предел:

$$\lim_{x \to +\infty} {}^* \varphi(x) = a,$$

когда $x \to +\infty$, пробегая все значения, за исключением некоторого множества нулевой относительной меры.

Определение 3. *Функция $f(z)$, регулярная порядка $\sigma > 0$ (формального порядка σ) и конечного типа в $(\alpha, \widehat{\ }\beta)$ и непрерывная в $[\alpha, \widehat{\ }\beta]$, называется функцией в. р. р. в замкнутом угле $[\alpha, \widehat{\ }\beta]$, если стремление к слабому пределу*

$$\lim_{r \to \infty} {}^* r^{-\sigma} \ln |f(re^{i\theta})| = h_f(\theta), \quad \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, \tag{12}$$

равномерно по θ, причем исключительное множество E — общее для всех θ. (Здесь $h_f(\theta)$ означает индикатор функции $f(z)$).

Класс функций $f(z) \in B$ порядка $\sigma > 0$ (формального порядка σ), имеющих в. р. р. в $[0, \widehat{\ }2\pi]$, обозначим через $\overline{B}_\sigma$ (соответственно через $\overline{B}^*_\sigma$).

Определение 4. *Функция $f(z)$, регулярная и порядка $\sigma > 0$ (формального порядка $\sigma > 0$) в $(\alpha, \widehat{\ }\beta)$, называется функцией в. р. р. в открытом угле $(\alpha, \widehat{\ }\beta)$, если она конечного типа в $(\alpha, \widehat{\ }\beta)$ и имеет в. р. р. в каждом угле вида $[\alpha + \varepsilon, \widehat{\ }\beta - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$.*

Если $f(z) \in B$ и имеет в. р. р. порядка $\sigma > 0$ (формального порядка $\sigma > 0$) в $[0, \widehat{\ }2\pi]$, то будем говорить, что $f(z) \in B_\sigma$ (соответственно, $f(z) \in B^*_\sigma$).

Поскольку (см. [5], [6]) для функции $f(z) \in B$

$$\overline{\lim_{r \to \infty}}\, r^{-\nu} \ln |f(re^{i\theta})| \equiv 0 \tag{13}$$

при любом $\nu > \frac{1}{2}$, то классы B_σ определены только при $0 < \sigma < \frac{1}{2}$.

Из важного результата У. Хеймана [5] вытекает следующая теорема (объясняющая значение функций в. р. р. для нашей работы).

Теорема 1. *Всякая функция класса B является функцией в. р. р. в $[0, \widehat{\ }2\pi]$, если за ее формальный порядок принять $\frac{1}{2}$.*

Из теоремы следует, что $B^*_{1/2} = \overline{B}^*_{1/2} = B$. Очевидно, $B_\sigma \subset B^*_\sigma$, $\overline{B}_\sigma \subset \overline{B}^*_\sigma$, но знак включения нельзя заменить знаком равенства: например, $f_0(z) = \exp(-z^\sigma e^{-i\sigma\pi}) \in B^*_{1/2}$, если $\sigma < 1/2$, но $f_0(z) \overline{\in} B_{1/2}$.

В работе [7] задача (1) решалась в классе B, т. е. в классе $B_{1/2}$. Здесь мы рассмотрим ту же задачу в классах B_σ и B^*_σ при

$\sigma < \min(\rho, {}^1/_2)$*. Решение в этом классе отличается от рассмотренного ранее ($\sigma = {}^1/_2$) методом исследования (связанным с дополнительными трудностями) и формой результатов. Условия этих задач отличаются: вместо (6) на μ_0 налагается такое ограничение:

$$\max\{0, (\rho - \sigma)/(\rho + \sigma)\} < \mu_0 \leqslant 1. \tag{6'}$$

Очевидно, ограничение (6') более тяжелое, чем (6).

Всюду впредь классы B_σ, $\overline{B}_\sigma$, B_σ^*, $\overline{B}_\sigma^*$ будут рассматриваться только при $0 < \sigma \leqslant {}^1/_2$.

3. Сформулируем некоторые результаты работы [7], которые потребуются нам в дальнейшем. Поскольку (6) заведомо выполняется при выполнении (6'), эти результаты сохраняют силу и при предположениях (2)—(5), (6').

Теорема 2. *Общее решение однородной задачи (1) в классе $\widetilde{B}$ выражается формулой*

$$\Phi(z) = F(z)\,X(z), \tag{14}$$

где $F(z)$ — произвольная целая функция, а $X(z)$ — так называемая каноническая функция

$$X(z) = \exp\left[\frac{z^{q+1}}{2\pi i}\int\limits_1^\infty \frac{\ln G(x)}{x(x-z)}\,dx\right], \quad q = [\rho]. \tag{15}$$

Теорема 3. *Если $\Phi(z) \in B$ — решение задачи (1), то порядок ρ_F соответствующей целой функции $F(z)$ не превосходит ρ, причем,* если $\rho > {}^1/_2$, $\rho_F = \rho$.

Теорема 4. *Если $\Phi(z)$ — функция класса B, то ряд*

$$\sum_{n=1}^\infty r_n^{-1/2}\sin\frac{\theta_n}{2} \quad (0 < \theta_n < 2\pi), \tag{16}$$

составленный по корням $z_n = r_n e^{i\theta_n} \neq 0$ этого решения, сходится.

Далее будем обозначать через $\widetilde{n}_\Phi(r)$ число нулей функции $\Phi(z)$ в кольце $0 < |z| \leqslant r$.

Теорема 5. *Если $\Phi(z) \in B_\sigma^*$ — решение задачи (1), то существует конечный неотрицательный предел*

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\sigma}\int\limits_0^r \frac{dt}{t}\int\limits_0^t\left[\frac{1}{2\pi}\arg G(x) - \widetilde{n}_\Phi(x)\right]\frac{dx}{x} = -\frac{1}{2\pi\sigma}\int\limits_0^{2\pi} h_\Phi(\theta)\,d\theta \geqslant 0, \tag{17}$$

где $h_\Phi(\theta)$ — индикатор функции $\Phi(z)$ при формальном порядке σ.

Следствие 1. *При предположениях теоремы 5 и $\sigma < \min(\rho, {}^1/_2)$ множество корней $\Phi(z)$ бесконечно.*

---

* В [6] показано, что в случае $\rho < {}^1/_2$ ограниченных решений порядка $\sigma > \rho$ не существует; значит, и для $\rho < {}^1/_2$ нет решений класса B_σ при $\sigma > \rho$.

С л е д с т в и е 2. *При предположениях теоремы* 5 *и* $\rho > {}^1/_2$ *множество корней решения* $\Phi(z)$ *бесконечно.*

Теорема 6. *Если решение* $\Phi(z) \in B_\sigma$, *то при любом* $r > 0$ *справедливо равенство**

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\Phi(re^{i\theta})|\,d\theta = \int_0^r \left[\tilde{n}_\Phi(x) - \frac{1}{2\pi}\arg G(x)\right]\frac{dx}{x} + C_\Phi(r), \tag{18}$$

$$C_\Phi(r) = \ln\{r^k (k!)^{-1} |\Phi^{(k)}(0)|\}, \tag{19}$$

где k — *кратность корня* $\Phi(z)$ *при* $z = 0$.

Теорема 7. *Если* $\Phi(z)$ — *функция класса* B^*_σ, *то при всяком* $\varepsilon > 0$ *равномерно по* θ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ *имеет место асимптотическая оценка***

$$\int_1^r \ln|\Phi(te^{i\theta})|\frac{dt}{t} > \frac{r^\sigma}{\sigma}[h^*_\Phi(\theta) - \varepsilon], \text{ где } h^*_\Phi(\theta) = \begin{cases} h_\Phi(\theta), & 0 < \theta < 2\pi, \\ h_\Phi(+0), & \theta = 0, \\ h_\Phi(2\pi - 0), & \theta = 2\pi. \end{cases}$$

Лемма 1. Если комплекснозначная функция $\psi(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant \infty)$, *тождественно равная нулю при достаточно малых* x, *такова, что интеграл*

$$\int_0^\infty \operatorname{Re}\psi(x)\frac{dx}{x^2} \tag{20}$$

сходится, а

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant \infty} |\operatorname{Im}\psi(x)| < M = \text{const}, \tag{21}$$

и при некотором σ, $0 < \sigma < 1$ *существует предел*

$$\lim_{r\to\infty} \sigma^2 r^{-\sigma}\int_0^r \frac{dt}{t}\int_0^t \operatorname{Re}\psi(x)\frac{dx}{x} = \gamma \neq \infty, \tag{22}$$

то функция

$$\Omega(z) = \exp\left[z\int_0^\infty \frac{\psi(x)\,dx}{x(x-z)}\right] \tag{23}$$

при любом θ, $0 < \theta < 2\pi$ *удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\sigma}\ln|\Omega(re^{i\theta})| = -\frac{\pi\gamma}{\sin\sigma\pi}\cos\sigma(\theta - \pi), \tag{24}$$

причем стремление к пределу в каждом из углов $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, *где* $0 < \varepsilon < \pi$, *равномерно по* θ.

* В действительности теорема 6 справедлива для значительно более широкого класса функций.

** Если $h(\theta)$ тригонометрически выпукла и ограничена сверху в $(\widehat{\alpha, \beta})$, то существуют конечные односторонние пределы $h(\alpha + 0)$ и $h(\beta - 0)$.

Теорема 8. *Если $\Phi(z)$ — решение задачи (1) в классе B, то: 1) интеграл*

$$\omega(z) \equiv \int_0^\infty \left[(2\pi i)^{-1} \ln G(x) - \tilde{n}_\Phi(x)\right] \frac{dx}{x(x-z)} \tag{25}$$

равномерно (но, может быть, неабсолютно) сходится в любой области D_0, лежащей строго внутри D;

2) взятое по всем отличным от нуля корням $\Phi(z)$ бесконечное произведение

$$b(z) = \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)\left(1 - \frac{z}{|z_n|}\right)^{-1} \tag{26}$$

абсолютно и равномерно сходится в любой области D^*, лежащей строго внутри D и не содержащей точек z_n.

Произведение вида (26) будем называть произведением типа Бляшке.

Замечание. В доказательстве второй части теоремы 8 используется только сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^\infty r_n^{-1/2} \sin \frac{\theta_n}{2}.$$

Это замечание потребуется нам в дальнейшем.

Теорема 9. *Если $\Phi(z)$ — решение задачи (1) в классе B_σ, то функция*

$$\Omega(z) = \exp\left[z \int_0^\infty \frac{(2\pi i)^{-1} \ln G(x) - n_\Phi(x)}{x(x-z)} dx\right]$$

удовлетворяет соотношению

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\sigma} \ln|\Omega(re^{i\theta})| = -\frac{\pi\gamma}{\sin\sigma\pi} \cos\sigma(\theta - \pi) \ (0 < \theta < 2\pi), \tag{27}$$

где

$$\gamma = \lim_{r\to\infty} \sigma^2 r^{-\sigma} \int_0^r \frac{dt}{t} \int_0^t \left[\frac{1}{2\pi} \arg G(x) - \tilde{n}_\Phi(x)\right] \frac{dx}{x} \geqslant 0. \tag{28}$$

Теорема 10. *Общее решение задачи (1) в классе B представимо в форме*

$$\Phi(z) = Cz^m \prod_{n=1}^{n_0} \frac{1 - \frac{z}{z_n}}{1 - \frac{z}{r_n}} \exp\left[\frac{z}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\ln G(x) - 2\pi i \tilde{n}_\Phi(x)}{x(x-z)} dx\right] \tag{29}$$

$$(n_0 \leqslant \infty,\ C = \text{const},\ z_n = r_n e^{i\theta_n} \neq 0),$$

где $m \geqslant 0$ — целое число, а последовательность $\{z_n\}$, совпадающая со множеством отличных от нуля корней $\Phi(z)$, удовлетворяет следующим требованиям:

1) $0 < r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots;$
2) *сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-1/2} \sin 0{,}5\theta_n; \tag{30}$$

3) *существует конечный неотрицательный предел*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{4\sqrt{r}} \int_0^r \frac{dt}{t} \int_0^t \left[\frac{1}{2\pi} \arg G(x) - \tilde{n}_\Phi(x)\right] \frac{dx}{x} = \gamma \geqslant 0; \tag{31}$$

4) *сходится интеграл*

$$\int_0^{\infty} [\ln G(x) - 2\pi i \tilde{n}_\Phi(x)]\, x^{-2} dx; \tag{32}$$

5) *на контуре L предельная функция $\Phi^+(t)$ ограничена или, что равносильно, имеет место асимптотическая оценка $(t \neq r_n)$:*

$$m \ln t + \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left|\frac{t - z_n}{t - r_n}\right| + \frac{t}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\arg G(x) - 2\pi \tilde{n}_\Phi(x)}{x(x-t)}\, dx < \text{const}. \tag{33}$$

Индикатор решения $\Phi(z)$ при формальном порядке $1/2$ выражается формулой

$$h_\Phi(\theta) \equiv \overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1/2} \ln |\Phi(re^{i\theta})| = -\pi\gamma \sin\frac{\theta}{2} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi). \tag{34}$$

4. Итак, пусть выполнены условия (2)—(5), (6′). Требуется установить формулу общего решения задачи (1) в классах B_σ и B_σ^*, где $0 < \sigma < \min(\rho, 1/2)$. Поскольку $B_\sigma \subset B_\sigma^* \subset B$, то общее решение в классах B_σ и B_σ^* также запишется формулой (29), однако нули решения должны не только удовлетворять требованиям (30)—(33), но и обладать особыми дополнительными свойствами. Приступим к отысканию этих свойств. Одно из них сформулировано в теореме 5, дающей ценную информацию о распределении нулей решения по их модулям. В интересах большей четкости введем

Определение 5. *Если функция нулей $n_\Phi(x)$ некоторого решения $\Phi(z)$ задачи (1) такова, что существует конечный предел,*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\sigma^2}{r^\sigma} \int_0^r \frac{dt}{t} \int_0^t \left[\tilde{n}_\Phi(x) - \frac{1}{2\pi} \arg G(x)\right] \frac{dx}{x} = l, \tag{35}$$

то будем называть этот предел модульной σ-плотностью (или просто модульной плотностью) множества нулей решения $\Phi(z)$.

Тогда теорема 5 может быть перефразирована в таком виде.

Теорема 11. *Множество нулей всякого решения задачи (1) в классе B_σ^* имеет неположительную модульную плотность.*

5. Перейдем к вопросу о распределении корней функции $\Phi(z) \in B_\sigma^*$ по их аргументам. Для этого нам прежде всего потребуется

Теорема 12. *Если $\Phi(z)$ есть решение задачи (1) в классе B_σ^*, то существуют пределы*

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\sigma} \int_0^{\pm\pi} \ln|\Phi(re^{i\theta})|\sin\theta d\theta = \int_0^{\pm\pi} h_\Phi(\theta)\sin\theta d\theta. \tag{36}$$

При доказательстве будем считать, что

$$|\Phi|(z)| \leqslant 1, \tag{37}$$

так как иначе мы перешли бы к рассмотрению функции $\Phi_0(z) = \Phi(z)\left[\sup_{z\in D}|\Phi(z)|\right]^{-1}$ (также являющейся решением однородной задачи (1)). Предварительно докажем лемму.

Лемма 2. *Если $\Phi(z)$ — решение задачи (1) в классе B_σ^*, то существуют слабые пределы*

$$\lim_{r\to\infty}{}^* r^{-\sigma} \int_0^{\pm\pi} \ln|\Phi(re^{i\theta})|\sin\theta d\theta = \int_0^{\pm\pi} h_\Phi(\theta)\sin\theta d\theta. \tag{38}$$

Доказательство. Для любых ε, $\delta > 0$ можно найти такое положительное $r_{\varepsilon,\delta}$, что при $t > r_{\varepsilon,\delta}$ будет

$$\ln|\Phi(te^{i\theta})| < \begin{cases} 0, & |\theta| < \delta, \\ [h_\Phi(\theta)+\varepsilon]t^\sigma, & \delta \leqslant \theta \leqslant 2\pi-\delta \end{cases} \tag{39}$$

равномерно по θ. (Равномерность второй оценки вытекает из известного свойства индикатора, см. [3, стр. 97]). Обозначив теперь

$$\varphi(r) = \int_0^{\pi} \ln|\Phi(re^{i\theta})\sin\theta d\theta$$

и опираясь на (39), получим

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-\sigma}\varphi(r) \leqslant \int_0^{\pi} h_\Phi(\theta)\sin\theta d\theta. \tag{40}$$

Отсюда, в свою очередь, нетрудно найти, что для любого $a > 0$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-\sigma}\int_a^r \varphi(t)\frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{\sigma}\int_0^{\pi} h_\Phi(\theta)\sin\theta d\theta. \tag{41}$$

С другой стороны, используя теорему 6, легко найти, что

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\sigma}\int_a^r \varphi(t)\,\frac{dt}{t} =$$

$$=\lim_{r\to\infty} r^{-\sigma}\int_0^\pi \sin\theta\int_a^r \ln|\Phi(te^{i\theta})|\,\frac{dt}{t} \geqslant \frac{1}{\sigma}\int_0^\pi h_\Phi(\theta)\sin\theta\,d\theta. \tag{42}$$

Но [3, стр. 194] из (43) и (40) следует (38) — для случая знака плюс. Случай, соответствующий знаку минус, доказывается совершенно аналогично. Лемма доказана.

Замечание. Перемена порядка интегрирования в (42) законна, так как из представления (14) легко показать, что $\ln|\Phi(z)|$ может иметь в $|z|\leqslant r$ только конечное число особенностей, притом интегрируемых.

В доказательстве теоремы 12 ограничимся случаем $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, т. е. установим справедливость равенства

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\sigma}\int_0^\pi \ln|\Phi(re^{i\theta})|\sin\theta d\theta = \int_0^\pi h_\Phi(\theta)\sin\theta d\theta. \tag{43}$$

Обращаясь к (40), видим, что достаточно доказать соотношение

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\sigma}\int_0^\pi \ln|\Phi(re^{i\theta})|\sin\theta d\theta \geqslant \int_0^\pi h_\Phi(\theta)\sin\theta d\theta. \tag{44}$$

Допустив противное, найдем такие $\varepsilon_0>0$ и $r_n\to\infty$, что

$$\int_0^\pi \ln|\Phi(re^{i\theta})|\sin\theta d\theta < r_n^\sigma\left[\int_0^\pi h_\Phi(\theta)\sin\theta d\theta-\varepsilon_0\right]. \tag{45}$$

Не нарушая общности, можно предполагать, что

$$\max_{0\leqslant\theta\leqslant\pi} |\ln|\Phi(r_n e^{i\theta})|| = M_n \neq \infty \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{46}$$

Рассмотрим теперь в полукруге $K=(\operatorname{Im} z>0)\cap(|z|<1)$ последовательность субгармонических функций

$$u_n(z)=\ln|\Phi(zr_n)|. \tag{47}$$

Поставим им в соответствие последовательность гармонических функций $u_n^*(z)$, каждая из которых ограничена в K и определена через свои граничные значения следующим образом:

$$u_n^*(e^{i\theta}) = u_n(e^{i\theta});\ \ 0<\theta<\pi, \tag{48}$$

$$u_n^*(t)=0,\ -1<t<1. \tag{49}$$

Тогда [10, стр. 466] согласно (49) и (46)

$$\sup_{z\in K}|u_n^*(z)|\leqslant M_n. \tag{50}$$

Из определения $u_n^*(z)$ и неравенства (37) следует, что

$$\overline{\lim_{z\to\zeta}}\,[u_n(z)-u_n^*(z)]\leqslant 0$$

для любой точки ζ, лежащей на границе C области K, кроме, быть может, точек $\zeta=\pm 1$, в которых

$$\overline{\lim_{\zeta\to\pm 1}}\,[u_n(z)-u_n^*(z)]<\infty.$$

Но тогда [10, стр. 466] всюду в K

$$u_n(z)\leqslant u_n^*(z). \tag{51}$$

Теперь гармонически продолжим нечетным образом функцию $u_n^*(z)$ в нижнюю половину круга $|z|<1$, полагая

$$u_n^*(te^{i\theta})=-u_n^*(te^{i\theta})\quad (0\leqslant t<1,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi). \tag{52}$$

Следовательно, [10, стр. 445] в $|z|<1$ имеет место разложение

$$u_n^*(te^{i\theta})=\sum_{k=1}^{\infty}a_{k,n}t^k\sin k\theta\quad (0\leqslant t<1). \tag{53}$$

Отсюда, используя (51), находим

$$\int_0^{\pi}u_n(te^{i\theta})\sin\theta d\theta\leqslant\int_0^{\pi}u_n^*(te^{i\theta})\sin\theta d\theta=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}u_n^*(te^{i\theta})\sin\theta d\theta=\frac{\pi}{2}a_{1,n}t. \tag{54}$$

Учитывая, что второй интеграл непрерывен по t, перейдем в последнем равенстве к пределу при $t\to 1$. Опираясь затем на (48), получим

$$\frac{\pi}{2}a_{1,n}=\int_0^{\pi}u_n(e^{i\theta})\sin\theta d\theta. \tag{55}$$

Сделаем подстановку из (55) в (54)

$$\int_0^{\pi}u_n(te^{i\theta})\sin\theta d\theta\leqslant t\int_0^{\pi}u_n(e^{i\theta})\sin\theta d\theta. \tag{56}$$

После этого, принимая во внимание (47) и (45), будем иметь

$$\int_0^{\pi}\ln\Phi(tr_ne^{i\theta})|\sin\theta d\theta<t^{1-\sigma}(tr_n)^{\sigma}\left[\int_0^{\pi}h_{\Phi}(\theta)\sin\theta d\theta-\varepsilon_0\right]$$

и далее

$$(tr_n)^{-\sigma}\int_0^{\pi}\ln|\Phi(tr_ne^{i\theta})|\sin\theta d\theta<$$

$$<\int_0^{\pi}h_{\Phi}(\theta)\sin\theta d\theta-\varepsilon_0+(t^{1-\sigma}-1)\left[\int_0^{\pi}h_{\Phi}(\theta)\sin\theta d\theta-\varepsilon_0\right]. \tag{57}$$

Выберем теперь постоянное t_0, $0 < t_0 < 1$, так, чтобы при $t_0 \leqslant t < 1$ последнее слагаемое в (57) было меньше $\frac{\varepsilon_0}{2}$. Тогда при любом r, взятом в промежутке $t_0 r_0 \leqslant r \leqslant r_n$, будет

$$r^{-\sigma}\int_0^{\pi} \ln|\Phi(re^{i\theta})|\sin\theta d\theta < \int_0^{\pi} h_\Phi(\theta)\sin\theta d\theta - \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Это, однако, противоречит лемме 2. Тем самым теорема 12 доказана.

Возьмем теперь столь малое $a < 1$, что в круге $|z| < a$ нет корней $z_n \neq 0$ решения $\Phi(z)$. Введем в рассмотрение такие функции $(z_n = r_n e^{i\theta_n})$:

$$\tau^+(r) = \sum_{\substack{a \leqslant r_n \leqslant r \\ \operatorname{Im} z > 0}} r_n \sin\theta_n, \quad \tau^-(r) = \sum_{\substack{a \leqslant r_n \leqslant r \\ \operatorname{Im} z < 0}} r_n \sin\theta_n, \tag{58}$$

$$\tau(r) = \tau^+(r) + \tau^-(r), \quad \sigma^\pm(r) = \tau^\pm(r) - l^\pm(r), \tag{59}$$

$$l^\pm(r) = \pm\frac{1}{2\pi}\int_a^r \ln|\Phi^\pm(x)\Phi(-x)|dx, \quad l(r) = l^+(r) + l^-(r), \tag{60}$$

где знаки $\pm$ берутся соответственно.

Заметим сразу же, что из (1) следует,

$$l(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^r \ln|G(x)|dx. \tag{61}$$

Лемма 3. Если $\Phi(z) \in B_\sigma$ есть решение задачи (1), то существуют конечные пределы

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\tau^\pm(r) - l^\pm(r)}{r^{1+\sigma}} = \pm\frac{\sigma - 1}{2\pi}\int_0^{\pm\pi} h_\Phi(\theta)\sin\theta d\theta, \tag{62}$$

где знаки плюс и минус берутся соответственно.

Доказательство. Будем считать выполненным условие (37). Запишем для функции $\Phi(z)$ формулу Карлемана [3, стр. 291]

$$\sum_{a \leqslant r_n \leqslant r}\left(\frac{1}{r_n} - \frac{r_n}{r^2}\right)\sin\theta_n = \frac{1}{\pi r}\int_0^{\pi}\ln|\Phi(re^{i\theta})|\sin\theta d\theta +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_a^r\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{r^2}\right)\ln|\Phi^+(x)\Phi(-x)|dx + A_a(\Phi, r), \tag{63}$$

где

$$A_a(\Phi, r) = -\operatorname{Im}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\Phi(ae^{i\theta})\left(\frac{ae^{i\theta}}{r^2} - \frac{e^{-i\theta}}{a}\right)d\theta.$$

(Можно проверить, что даже и для функций класса $\tilde{B}$ и являющихся решениями задачи (1) формула Карлемана имеет место). Перепишем (63), используя обозначения (58)—(60),

$$\int_a^r \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{r^2}\right) d\sigma^+(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \ln|\Phi(re^{i\theta})|\sin\theta d\theta + A_a(\Phi, r). \quad (64)$$

Учитывая, что $l^+(a) = \tau^+(a) = 0$, после интегрирования по частям найдем

$$\int_a^r \frac{\sigma^+(x)}{x^3} dx = \frac{1}{2\pi r}\int_0^\pi \ln|\Phi(re^{i\theta})|\sin\theta d\theta + \frac{1}{2}A_a(\Phi, r). \quad (65)$$

Заменив теперь r на rk, где $0 < k < 1$, и вычитая полученные равенства, найдем*

$$\int_{rk}^r \sigma^+(x)x^{-3}dx = \frac{1}{2\pi r}\int_0^\pi \ln|\Phi(re^{i\theta})|\sin\theta d\theta -$$

$$-\frac{1}{2\pi rk}\int_0^\pi \ln|\Phi(rke^{i\theta})|\sin\theta d\theta + \frac{as(1-k^2)}{4\pi r^2k^2}, \quad (66)$$

где

$$s = \operatorname{Im}\int_0^\pi e^{i\theta}\ln\Phi(ae^{i\theta})d\theta = \text{const}.$$

Но в силу предположения (62) и того, что $\sin\theta_n \geqslant 0$, функция $\sigma^+(x)$ монотонно возрастает. Поэтому

$$\sigma^+(rk)\int_{rk}^r x^{-3}dx \leqslant \int_{rk}^r \sigma^+(x)x^{-3}dx \leqslant \sigma^+(r)\int_{rk}^r x^{-3}dx \ (0 < k < 1).$$

Принимая во внимание эти неравенства, из (66) получим

$$\sigma^+(rk) \leqslant \frac{rk}{(1-k^2)\pi}\left[k\int_0^\pi \ln|\Phi(re^{i\theta})|\sin\theta d\theta\right] -$$

$$-\int_0^\pi \ln|\Phi(rke^{i\theta})|\sin\theta d\theta + \frac{as(1-k^2)}{2kr} \leqslant \sigma^+(r). \quad (67)$$

Отсюда, используя теорему 12, находим

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\sigma^+(r)}{r^{1+\sigma}} = \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\sigma^+(rk)}{(rk)^{1+\sigma}} \leqslant \frac{k^{1-\sigma}-1}{(1-k^2)\pi}\int_0^\pi h_\Phi(\theta)\sin\theta d\theta,$$

* Этот метод заимствован мною у А. А. Гольдберга.

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{\sigma^+(r)}{r^{1+\sigma}}\geqslant\frac{k^{1+\sigma}(k^{1-\sigma}-1)}{(1-k^2)\pi}\int_0^\pi h_\Phi(\theta)\sin\theta d\theta,$$

а устремляя $k\to 1$, получаем

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\sigma^+(r)}{r^{1+\sigma}}=\frac{\sigma-1}{2\pi}\int_0^\pi h_\Phi(\theta)\sin\theta d\theta. \tag{68}$$

Таким образом, соотношение (61), соответствующее знаку плюс, доказано. Что же касается случая знака минус, то он получается из доказанного переходом к функции $f(z)=\Phi(-z)$, так как тогда

$$\tau_f^+(r)=-\tau_\Phi^-(r),\quad l_f^+(r)=-l_\Phi^-(r),\quad h_f(\theta)=h_\Phi(\theta+\pi),$$

и, следовательно,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\tau_\Phi^-(r)-l_\Phi^-(r)}{r^{1+\sigma}}=\frac{1-\sigma}{2\pi}\int_0^\pi h_\Phi(\theta+\pi)\sin\theta d\theta=$$

$$=\frac{1-\sigma}{2\pi}\int_0^{-\pi} h_\Phi(\theta)\sin\theta d\theta. \tag{69}$$

Лемма полностью доказана.

Следствие. *В предположениях леммы 3 существует предел*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\tau(r)}{r^{1+\sigma}}\equiv\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r^{1+\sigma}}\sum_{0<r_n\leqslant r} r_n\sin\theta_n=\frac{\sigma-1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h_\Phi(\theta)\sin\theta d\theta. \tag{70}$$

Следствие получается тотчас же после почленного сложения равенств (68) и (69), если учесть, что в соответствии с (60) и тем, что $|\ln|G(x)||<\text{const}$:

$$\lim_{r\to\infty}\frac{l(r)}{r^{1+\sigma}}=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi r^{1+\sigma}}\int_0^r\ln|G(x)|dx=0. \tag{71}$$

Лемма 4. *Если $\Phi(z)$ — решение задачи (1) в классе B_σ и $z_n=r_ne^{i\theta_n}\neq 0$ — его корни, то существуют пределы*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r^\sigma}\left[\sum_{\substack{0<\theta_n<\pi\\0<r_n\leqslant r}}\sin\theta_n-\frac{1}{2\pi}\int_a^r\ln|\Phi^+(x)\,\Phi(-x)|\frac{dx}{x}\right]=$$

$$=\frac{\sigma^2-1}{2\pi\sigma}\int_0^\pi h_\Phi(\theta)\sin\theta d\theta,$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r^{\sigma}}\left[\sum_{\substack{\pi<\theta_n<2\pi\\ 0<r_n\leqslant r}}\sin\theta_n-\frac{1}{2\pi}\int_a^r \ln|\Phi^-(x)\,\Phi(-x)|\frac{dx}{x}\right]=$$

$$=\frac{\sigma^2-1}{2\pi\sigma}\int_{-\pi}^{0} h_\Phi(\theta)\sin\theta\,d\theta, \qquad (72)$$

где круг $|z|\leqslant a$ не содержит нулей $\overset{*}{z}_n$.

Докажем первое из равенств. Используя обозначения (58) и (60) и вводя интеграл Стилтьеса, запишем левую часть в виде

$$T=\lim_{r\to\infty} r^{-\sigma}\int_0^r \frac{1}{x}\,d\,[\tau^+(x)-l^+(x)]=$$

$$=\lim_{r\to\infty} r^{-\sigma}\left[\frac{\tau^+(r)-l^+(r)}{r}-\frac{\tau^+(a)-l^+(a)}{a}+\int_a^r\frac{\tau^+(x)-l^+(x)}{x^2}\,dx\right]. \quad (73)$$

Но так как по лемме 3

$$\tau^+(r)-l^+(r)=cr^{1+\sigma}+o\,(r^{1+\sigma}),$$

где

$$c=\frac{\sigma-1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h_\Phi(\theta)\sin\theta\,d\theta,$$

то из (73) легко получить равенство

$$T=c+\frac{c}{\sigma}=\frac{\sigma^2-1}{2\pi}\int_0^{\pi} h_\Phi(\theta)\sin\theta\,d\theta.$$

Второе из соотношений (72) устанавливается аналогично. Лемма доказана.

Следствие. *В предположениях леммы 4 существует предел*

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\sigma}\sum_{\substack{0<r_n\leqslant r\\ 0<\theta_n\leqslant 2\pi}}\sin\theta_n=\frac{\sigma^2-1}{2\pi\sigma}\int_0^{2\pi} h_\Phi(\theta)\sin\theta\,d\theta.$$

Следствие получается после почленного сложения равенств (72), если учесть, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi r^{\sigma}}\int_0^r \ln|G(x)|\frac{dx}{x}=0.$$

---

* Впрочем, ясно, что если лемма верна хотя бы при одном $a>0$, то она верна и при любом $a>0$.

Введем теперь основную функцию, характеризующую распределение нулей функции $\Phi(z) \in B_\sigma$ по их аргументам.

Пусть в области D дана последовательность точек $\{z_n\} = \{r_n e^{i\theta_n}\}$, сходящаяся к бесконечности (или конечная). Пусть θ и η таковы, что

$$-2\pi < \theta < 2\pi, \quad -2\pi < \eta < 2\pi, \quad \theta < \eta, \quad |\theta - \eta| \leqslant 2\pi.$$

Обозначив через (θ, η, r) сектор $(0 < |z| \leqslant r) \cap (\theta < \arg z \leqslant \eta)$, положим

$$a(r, \theta, \eta) = \sum_{z_n \in (\theta, \eta, r)} \theta_n, \quad \theta < \theta_n \leqslant \eta. \tag{74}$$

При $\theta > \eta$ или $|\theta - \eta| > 2\pi$ примем по определению

$$a(r, \theta, \eta) = -a(r, \eta, \theta); \quad a(r, \theta, \eta) = a(r, \theta, 0) + a(r, 0, \eta)$$

и будем считать также

$$a(r, \theta, \theta) \equiv 0.$$

Определение 6. *Если для всех* $\theta_1, \theta_2 \neq 0$, *взятых в интервале* $-2\pi < \theta < 2\pi$*, *за исключением, быть может, некоторого счетного множества* N, *существует конечный предел*

$$\lim_{r \to \infty} \frac{a(r, \theta_1, \theta_2)}{r^\sigma} = \nu(\theta_1, \theta_2) \tag{75}$$

и при $r \to \infty$ *выполняется асимптотическая оценка*

$$\sum_{z_n \in (-\pi, \pi, r)} |\theta_n| = O(r^\sigma)^{**}, \tag{76}$$

то будем говорить, что последовательность (или множество) $\{z_n\}$ *имеет в области* D *аргументную* σ*-плотность.*

При этом аргументной σ-плотностью назовем функцию

$$\nu(\psi) = \nu(\psi_0, \psi) \tag{77}$$

при надлежаще фиксированном значении первого аргумента (а именно, при $\psi_0 \bar{\in} N$). Очевидно, $\nu(\psi)$ определена с точностью до некоторой аддитивной постоянной. Чтобы избежать неопределенности, всюду в дальнейшем условимся доопределять функцию $\nu(\psi)$ в точках множества $N: \psi_1, \psi_2, \ldots$ по непрерывности справа

$$\nu(\psi_n) = \lim_{\psi \to \psi_n + 0} \nu(\psi).$$

* Определение не изменилось бы по существу, если бы вместо интервала $-2\pi < \theta < 2\pi$ взять интервал вида $-\pi - \varepsilon < \theta < \pi + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

** Заметим, что (76) не вытекает из (75).

Понятие аргументной плотности тесно связано с введенным Б. Я. Левиным и А. Пфлюгером понятием угловой плотности $\Delta(\psi)$ [3, стр. 119]:

$$\Delta(\theta,\ \eta) = \lim_{r\to\infty} r^{-\sigma} n(r,\ \theta,\ \eta), \tag{78}$$

где $n(r,\ \theta,\ \eta)$ есть число точек z_n данного множества (или нулей данной функции) в секторе $(\theta,\ \eta,\ r)$. Эта связь особенно наглядна, если (78) записать в виде

$$\Delta(\theta,\ \eta) = \lim_{r\to\infty} r^{-\sigma} \sum_{z_n \in (\theta,\ \eta,\ r)} 1. \tag{79}$$

Ниже мы покажем, что во всяком угле $[\widehat{\theta,\ \eta}]$ $(\theta,\ \eta \overline{\in} N)$, не содержащем контура L ни внутри себя, ни на границе, аргументная плотность выражается через угловую с помощью формулы

$$\nu(\theta,\ \eta) = \int_{\theta}^{\eta} \psi d\Delta(\psi). \tag{80}$$

Однако при $\theta < 0 < \eta$ эта формула, вообще говоря, не имеет места, так как существуют примеры таких функций $\Phi(z) \in B_\sigma$, для которых $\Delta(-\pi, -\varepsilon) = \Delta(\varepsilon, \pi) = 0$, $\Delta(-\varepsilon, \varepsilon) = +\infty$ при любом ε, $0 < \varepsilon < \pi$, но $\nu(-\pi,\ 0)$ и $\nu(0,\ \pi)$ отличны от нуля и конечны.

Заметим, что величину $\sum\limits_{|z_n| \leqslant r} \sin\theta_n$, родственную сумме (74), рассматривал Р. Неванлинна [11].

Ниже мы установим, что у функции класса B_σ существует аргументная σ-плотность, и что индикатор этой функции выражается через аргументную и модульную плотности ее нулей.

6. Доказательству только что отмеченных свойств предпошлем несколько лемм.

Лемма 5. *Если* $\Phi(z) \in B_\sigma$ *есть решение задачи* (1), *а* $z_n = r_n e^{i\theta_n} \neq 0$ — *его корни, то при* $r > 0$ *имеет место оценка*

$$\sum_{z_n \in (-\pi,\ \pi,\ r)} |\theta_n| < K_\Phi r^\sigma, \tag{81}$$

где K_Φ — *некоторая постоянная, не зависящая от* r.

Доказательство. Будем по-прежнему предполагать, что

$$|\Phi(z)| \leqslant 1. \tag{82}$$

Тогда из (72) следует, что асимптотически

$$\sum_{z_n \in (-\pi,\ \pi,\ r)} \sin|\theta_n| < K_1 r^\sigma, \quad K_1 = \text{const}. \tag{83}$$

Отсюда и подавно при достаточно больших r

$$0 \leqslant \sum_{z_n \in \left(0,\, \frac{\pi}{2},\, r\right)} \theta_n \leqslant \frac{\pi}{2} \sum_{z_n \in \left(0,\, \frac{\pi}{2},\, r\right)} \sin \theta_n < K_2 r^{\sigma}. \tag{84}$$

По теореме, доказанной Б. Я. Левиным и А. Пфлюгером [3, стр. 199], для множества нулей функции $\Phi(z)$ в. р. р. порядка σ в угле (α, β) существует конечный предел (см. (78)):

$$\lim_{r \to \infty} r^{-\sigma} n_{\Phi}(r, \theta_1, \theta_2) = \Delta(\theta_1, \theta_2), \quad \alpha < \theta_1 < \theta_2 < \beta, \tag{85}$$

для всех $\theta_k \overline{\in} N$, где N не более чем счетно, причем θ_k лежат строго внутри $\left(\widehat{\alpha, \beta}\right)$. Отсюда можно утверждать, что асимптотически

$$\sum_{z_n \in \left(\frac{\pi}{2},\, \pi,\, r\right)} \theta_n \leqslant \pi \tilde{n}_{\Phi}\left(r, \frac{\pi}{2}, \pi\right) \leqslant K_3 r^{\sigma}. \tag{86}$$

Но тогда из (84) и (85) следует

$$\sum_{z_n \in (0,\, \pi,\, r)} \theta_n < K' r^{\sigma}, \quad K' = \mathrm{const}. \tag{87}$$

Совершенно аналогично доказывается асимптотическое неравенство

$$\sum_{z_n \in (-\pi,\, 0,\, r)} |\theta_n| < K'' r^{\sigma}, \quad K'' = \mathrm{const}. \tag{88}$$

Из (87) и (88) следует, что при достаточно больших r выполняется оценка (81). Увеличив в случае необходимости постоянную K_{Φ}, получим, что (81) верно при всех $r > 0$. Лемма доказана.

Лемма 6. *При условиях леммы 5 для любого δ, $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, справедлива оценка*

$$\sum_{z_n \in (-\delta,\, \delta,\, r)} |\theta_n - \sin \theta_n| < P \delta^2 r^{\sigma}, \tag{89}$$

где постоянная P не зависит от δ и r.

Действительно, заметив сначала, что при

$$|x| \leqslant \frac{\pi}{2} \quad |x - \sin x| < P_0 x^3,$$

где P_0 — некоторая абсолютная постоянная, используем затем лемму 5:

$$\sum_{z_n \in (-\delta,\, \delta,\, r)} |\theta_n - \sin \theta_n| < P_0 \delta^2 \sum_{(-\delta,\, \delta,\, r)} |\theta_n| < P_0 K_{\Phi} \delta^2 r^{\sigma}. \tag{90}$$

Лемма доказана.

Лемма 7. *Если для множества* $\{z_n\} = \{r_n e^{i\theta_n}\} \subset D$ *в* $(\widehat{0,\ 2\pi})$ *существует угловая* σ*-плотность* $\Delta(\alpha,\ \beta)$, *то в* $(\widehat{0,\ 2\pi})$ *и* $(\widehat{-2\pi,\ 0})$ *существует аргументная* σ*-плотность* $\nu(\alpha,\ \beta)$ *и имеет место формула*

$$\nu(\alpha,\ \beta) = \lim_{r\to\infty} \frac{a(r,\ \alpha,\ \beta)}{r^\sigma} = \int_\alpha^\beta \psi d\Delta(\psi),\quad \Delta(\psi) = \Delta(\psi_0,\ \psi), \tag{91}$$

для всех $\alpha,\ \beta$, *подчиненных одному из неравенств*

$$-2\pi < \alpha < \beta < 0 \text{ или } 0 < \alpha < \beta < 2\pi \tag{92}$$

и не принадлежащих некоторому не более чем счетному множеству N.

Доказательство. Пусть для определенности $0 < \alpha < \beta < 2\pi$. Возьмем α и β такими, чтобы существовал предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r,\ \alpha,\ \beta)}{r^\sigma} = \Delta(\alpha,\ \beta).$$

Этот предел существует при $\alpha \overline{\in} N$, $\beta \overline{\in} N$, где N — не более чем счетно [3, стр. 199]. Разобьем $[\widehat{\alpha,\ \beta}]$ точками

$$\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha s = \beta,$$

так, что $\alpha_k \overline{\in} N$ $(k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ s)$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{s} \alpha_{k-1} n(r,\ \alpha_{k-1},\ \alpha_k) \leqslant \sum_{z_n \in (\alpha,\ \beta,\ r)} \theta_n \leqslant \sum_{k=1}^{s} \alpha_k n(r,\ \alpha_{k-1},\ \alpha_k).$$

Отсюда

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-\sigma} \sum_{(\alpha,\ \beta,\ r)} \theta_n \leqslant \sum_{k=1}^{s} \alpha_k [\Delta(\alpha_k) - \Delta(\alpha_{k-1})],$$

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-\sigma} \sum_{(\alpha,\ \beta,\ r)} \theta_n \geqslant \sum_{k=1}^{s} \alpha_{k-1} [\Delta(\alpha_k) - \Delta(\alpha_{k-1})].$$

Измельчая дробление и переходя к пределу при $\max\limits_{0\leqslant k\leqslant s-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \to 0$, получим

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-\sigma} \sum_{(\alpha,\ \beta,\ r)} \theta_n \leqslant \int_\alpha^\beta \psi d\Delta(\psi) \leqslant \underline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-\sigma} \sum_{(\alpha,\ \beta,\ r)} \theta_n,$$

откуда и следует требуемое. Лемма доказана.

Следствие. *Если* z_n — *нули решения* $\Phi(z) \in B_\sigma$ *задачи* (1), *то для всех* α *и* β, *подчиненных условию* (92) *и таких, что существуют производные* $h'_\Phi(\alpha)$ *и* $h'_\Phi(\beta)$, *имеет место соотношение* (91).

Следствие вытекает из доказанного, если принять во внимание теорему Б. Я. Левина и А. Пфлюгера [3, стр. 199], ибо по этой теореме множество N, упомянутое в доказательстве леммы 7, может состоять лишь из точек, в которых не существует производной $h_\Phi^{*}(\alpha)$. Множество же последних точек не более чем счетно [3, стр. 78].

Лемма 8. В предположениях леммы 5 для всех α_1, α_2, удовлетворяющих условиям

$$-2\pi < \alpha_1 < 0 < \alpha_2 < 2\pi, \quad |\alpha_1 - \alpha_2| \leqslant 2\pi, \tag{93}$$

$$h_\Phi'(\alpha_k - 0) = h_\Phi'(\alpha_k + 0), \quad k = 1, 2, \tag{94}$$

существует конечный предел

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\sigma} \sum_{z_n \in (\alpha_1,\, \alpha_2,\, r)} \sin\theta_n.$$

Доказательство. По теореме о функциях в. р. р. [3, стр. 199] нули z_n, лежащие вне угла $\alpha_1 < \arg z \leqslant \alpha_2$, имеют угловую σ-плотность. Тогда [3, стр. 120] построенная по этим нулям целая функция

$$f_0(z) = \prod_{\theta_n \overline{\in} \left(\overset{\wedge}{\alpha_1,\, \alpha_2}\right)} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$$

имеет в. р. р. порядка не выше σ. Рассмотрим функцию $\varphi(z) = \Phi(z)[f_0(z)]^{-1}$. Легко видеть, что

1) $\varphi(z)$ регулярна в D и принадлежит классу B_σ^{*};
2) $\varphi^+(t) \mid \varphi^-(t) = \Phi^+(t) \mid \Phi^-(t) = G(t)$;
3) множество нулей $\varphi(z)$ в области D совпадает с множеством нулей $\Phi(z)$ в угле $\left(\overset{\wedge}{\alpha_1,\, \alpha_2}\right)$.

Тогда, применяя к функции $\varphi(z)$ следствие леммы 4, найдем

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\sigma} \sum_{z_n \in (\alpha_1,\, \alpha_2,\, r)} \sin\theta_n = \frac{\sigma^2 - 1}{2\pi\sigma} \int_0^{2\pi} h_\varphi(\theta) \sin\theta d\theta.$$

Лемма 8 доказана.

Теорема 13. *Множество нулей всякого решения $\Phi(z)$ задачи* (1) *в классе B_σ^{*} имеет аргументную σ-плотность.*

Доказательство. Возьмем любые α_1 и α_2, подчиненные условиям (93) и (94). Затем выберем $\delta > 0$ так, что

$$\delta < \min(|\alpha_1|, \alpha_2), \quad h_\Phi'(\delta - 0) = h_\Phi'(\delta + 0), \quad h_\Phi'(-\delta - 0) = h_\Phi'(-\delta + 0).$$

Применяя леммы 6 и 8 и следствие леммы 7, найдем

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} r^{-\sigma} \sum_{(\alpha_1,\,\alpha_2,\,r)} \theta_n \leqslant \lim_{r\to\infty} r^{-\sigma} \sum_{(\alpha_1,\,\alpha_2,\,r)} \sin\theta_n +$$

$$+ \overline{\lim_{r\to\infty}} r^{-\sigma} \sum_{(-\delta,\,\delta,\,r)} (\theta_n - \sin\theta_n) + \lim_{r\to\infty} r^{-\sigma} \left[\sum_{(\alpha_1,\,-\delta,\,r)} \theta_n + \sum_{(\delta,\,\alpha_2,\,r)} \theta_n \right] \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{r\to\infty} r^{-\sigma} \sum_{(-\delta,\,\delta,\,r)} \sin\theta_n + P\delta^2 + \int_{\alpha_1}^{-\delta} \psi d\Delta(\psi) + \int_{\delta}^{\alpha_2} \psi d\Delta(\psi). \qquad (95)$$

Совершенно аналогично получаем

$$\underline{\lim_{r\to\infty}} \sum_{(\alpha_1,\,\alpha_2,\,r)} \theta_n \geqslant \lim_{r\to\infty} r^{-\sigma} \sum_{(-\delta,\,\delta,\,r)} \sin\theta_n - P\delta^2 +$$

$$+ \int_{\alpha_1}^{-\delta} \psi d\Delta(\psi) + \int_{\delta}^{\alpha_2} \psi d\Delta(\psi). \qquad (96)$$

Из (95) и (96) в обозначениях (74) имеем

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} r^{-\sigma} a(r,\ \alpha_1,\ \alpha_2) - \underline{\lim_{r\to\infty}} r^{-\sigma} a(r,\ \alpha_1,\ \alpha_2) \leqslant 2P\delta^2, \qquad (97)$$

и значит, поскольку левая часть не зависит от δ, существует предел

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\sigma} a(r,\ \alpha_1,\ \alpha_2) = \nu(\alpha_1,\ \alpha_2), \quad (\alpha_1 < 0 < \alpha_2).$$

Пусть теперь $\alpha_1,\ \alpha_2 \neq 0$ имеют одинаковые знаки, удовлетворяют неравенствам $-2\pi < \alpha_k < 2\pi$ и подчинены условию (94). Тогда по следствию леммы 7 существует предел

$$\nu(\alpha_1,\ \alpha_2) = \lim_{r\to\infty} r^{-\sigma} a(r,\ \alpha_1,\ \alpha_2) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \psi d\Delta(\psi).$$

Таким образом, мы доказали, что для всех $\alpha_1,\ \alpha_2 \neq 0$, взятых в интервале $-2\pi < \alpha < 2\pi$ и таких, что существуют производные

$$h'_{\Phi}(\alpha_k - 0) = h'_{\Phi}(\alpha_k + 0) \quad (k = 1,\ 2), \qquad (98)$$

заведомо существует предел

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\sigma} a(r,\ \alpha_1,\ \alpha_2) = \nu(\alpha_1,\ \alpha_2). \qquad (99)$$

Множество же тех α_k, при которых (98) не выполняется, не более чем счетно. Далее, в лемме 5 доказано, что

$$a(r,\ 0,\ \pi) + |a(r,\ -\pi,\ 0)| = O(r^{\sigma}). \qquad (100)$$

Но все это означает, что у нулей $\Phi(z)$ существует аргументная σ-плотность. Теорема 13 доказана.

Теперь результаты теорем 13 и 11 можно объединить.

Теорема 14. *Множество нулей всякого решения задачи* (1) *в классе B_σ имеет модульную и аргументную плотности.*

Подчеркнем, что модульная плотность есть постоянное число, а аргументная плотность — некоторая кусочно-монотонная функция углового аргумента.

7. Как указывалось выше, решение класса B_σ представимо в виде (29). Покажем теперь, что обе компоненты этого представления также имеют в. р. р. порядка σ.

Теорема 15. *Если последовательность $\{z_n\}$, $z_n \to \infty$ имеет в области D аргументную σ-плотность, то соответствующее произведение типа Бляшке*

$$b(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)\Big/\left(1 - \frac{z}{r_n}\right) \tag{101}$$

сходится и имеет во всяком угле $[\eta, 2\pi - \eta]$, $\eta > 0$, в. р. р. *формального порядка σ со следующим индикатором:*

$$h_b(\theta) = \frac{\pi}{\sin \pi\sigma} \int_{-\pi}^{\pi} \mu(\psi, \theta)\, d\nu(\psi) \quad (0 < \theta < 2\pi), \tag{102}$$

где $\nu(\psi)$ — аргументная плотность нулей функции $b(z)$, а

$$\mu(\psi, \theta) = \begin{cases} \psi^{-1}\,[\cos\sigma(|\theta - \psi| - \pi) - \cos\sigma(\theta - \pi)], & 0 < \psi \leqslant \pi, \\ \psi^{-1}\,[\cos\sigma(|\theta - \psi - 2\pi| - \pi) - \cos\sigma(\theta - \pi)], & -\pi \leqslant \psi < 0, \\ \sigma \sin\sigma(\theta - \pi), & \psi = 0. \end{cases} \tag{103}$$

Доказательство. Покажем сначала сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-1/2} \sin 0{,}5\theta_n < \infty \quad (z_n = r_n e^{i\theta_n},\ 0 < \theta_n < 2\pi). \tag{104}$$

В самом деле, так как согласно лемме 5

$$a^*(r) \equiv \sum_{z_n \in (-\pi,\, \pi,\, r)} |\theta_n| = O(r^\sigma), \tag{105}$$

причем $a^*(r) \equiv 0$ при малых r и $0 < \sigma < 1/2$, то

$$\sum_{z_n \in (-\pi,\, \pi)} r_n^{-1/2} \sin\frac{\theta_n}{2} \leqslant \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{da^*(x)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{4}\int_0^{\infty} \frac{a^*(x)}{x^{3/2}}\,dx < \infty. \tag{106}$$

Но тогда произведение $b(z)$ абсолютно сходится (см. замечание к теореме 7).

Теперь докажем следующие леммы.

Лемма 9. Пусть вещественная функция $f(x)$ суммируема в каждом промежутке вида $[0, R]$, $R < \infty$, и пусть существует предел

$$\lim_{x \to +\infty} x^{-\sigma} f(x) = c \neq \infty, \quad 0 < \sigma < 1. \tag{107}$$

Тогда функция

$$Q(z) = \exp\left[iz \int_0^\infty \frac{f(x)\,dx}{(x-z)^2}\right] \tag{108}$$

имеет во всяком угле $[\eta, 2\pi-\eta]$, $\eta > 0$, *в. р. р. формального порядка* σ *со следующим индикатором:*

$$h_Q(\theta) \equiv \lim_{r\to\infty} r^{-\sigma} \ln |Q(re^{i\theta})| = \frac{\pi c\sigma}{\sin \pi\sigma} \sin \sigma(\theta - \pi), \quad 0 < \theta < 2\pi,$$

причем при фиксированном η *стремление к пределу равномерно по* θ.

Доказательство. На основании (107) имеем представление

$$f(x) = cx^\sigma + \mu(x)\,x^\sigma, \quad \lim_{x\to\infty} \mu(x) = 0. \tag{109}$$

Опираясь теперь на интегрирование по частям и производя необходимые вычисления, запишем

$$\ln Q(z) = izc\sigma \int_0^\infty \frac{x^{\sigma-1}}{x-z}\,dx + iz \int_0^\infty \frac{x^\sigma \mu(x)}{(x-z)^2}\,dx \equiv -\frac{\pi c\sigma i}{\sin \sigma\pi} e^{-i\sigma\pi} + I_2(z). \tag{110}$$

Взяв любое $\varepsilon > 0$, найдем такое $t > 0$, что $|\mu(x)| \leqslant \varepsilon$ при $x > t$. Теперь легко найти

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-\sigma} \max_{\eta\leqslant\theta\leqslant 2\pi-\eta} |I_2(re^{i\theta})| \leqslant \varepsilon \overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{1-\sigma} \int_t^\infty \frac{x^\sigma\,dx}{|x - re^{i\eta}|^2} =$$

$$= \varepsilon \lim_{r\to\infty} r^{1-\sigma} \int_0^\infty \frac{x^\sigma dx}{|x - re^{i\eta}|^2} = \varepsilon \int_0^\infty \frac{u^\sigma du}{|u - e^{i\eta}|^2},$$

и так как ε произвольно мало, то исходный верхний предел равен нулю. После этого из (110) следует то, что требовалось доказать.

Лемма 10. *Пусть даны произвольные комплексные числа* $z = re^{i\theta}$ *и* $z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \neq 0$, *удовлетворяющие условиям*

$$\eta \leqslant |\theta| \leqslant \pi, \quad 0 < \eta < \pi/2, \quad |\theta_0| \leqslant \delta < \eta/5. \tag{111}$$

Тогда справедливо представление

$$\ln\left(1 - \frac{z}{z_0}\right) \Big/ \left(1 - \frac{z}{r_0}\right) = \frac{iz\theta_0}{r_0 - z}\,[1 + \beta(z, z_0)], \tag{112}$$

где равномерно относительно z *и* z_0

$$|\beta(z, z_0)| < \delta/\eta. \tag{113}$$

Доказательство. Имеем

$$\ln\frac{1-\frac{z}{z_0}}{1-\frac{z}{r_0}}=\ln\frac{r_0-re^{i(\theta-\theta_0)}}{r_0-re^{i\theta}}=ir\int_0^{\theta_0}\frac{e^{i(\theta-\alpha)}\,d\alpha}{r_0-re^{i(\theta-\alpha)}}=$$

$$=ir\int_0^{\theta_0}\left[\frac{e^{i(\theta-\alpha)}}{r_0-re^{i(\theta-\alpha)}}-\frac{e^{i\theta}}{r_0-re^{i\theta}}\right]d\alpha+\frac{ir\theta_0e^{i\theta}}{r_0-re^{i\theta}}=$$

$$=\frac{ir\theta_0e^{i\theta}}{r_0-re^{i\theta}}[1+\beta(z,z_0)],$$

где положено

$$\beta(z,z_0)=\frac{r_0}{\theta_0}\int_0^{\theta_0}\frac{e^{i(\theta-\alpha)}-e^{i\theta}}{r_0-re^{i(\theta-\alpha)}}d\alpha. \tag{114}$$

Но

$$|e^{i(\theta-\alpha)}-e^{i\theta}|=\left|2\sin\frac{\alpha}{2}\right|\leqslant|\alpha|, \tag{115}$$

и

$$|r_0-re^{i(\theta-\alpha)}|\geqslant\begin{cases}r_0\sin|\theta-\alpha|, & \text{если } |\theta-\alpha|<\frac{\pi}{2},\\ r_0, & \text{если } \frac{\pi}{2}\leqslant|\theta-\alpha|<\pi.\end{cases}$$

Следовательно, в любом случае

$$|r_0-re^{i(\theta-\alpha)}|\geqslant r_0\sin\frac{4}{5}\eta\geqslant\frac{8r_0\eta}{5\pi}. \tag{116}$$

Поэтому из (114) — (116) и (111) следует

$$|\beta(z,z_0)|\leqslant\frac{5\pi}{8\eta|\theta_0|}\int_0^{|\theta_0|}\alpha d\alpha=\frac{5\pi|\theta_0|}{16\eta}<\frac{\delta}{\eta},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Лемма 10, очевидно, справедлива и при $\eta\leqslant\theta\leqslant\leqslant 2\pi-\eta$.

Лемма 11. *Пусть выполнены условия теоремы 15, а δ и η удовлетворяют условиям (111), причем существует предел*

$$\lim_{r\to\infty}r^{-\varrho}a(r,-\delta,\delta)=\nu(-\delta,\delta).$$

Тогда функция

$$b_\delta(z)=\prod_{-\delta<\theta_n\leqslant\delta}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\Big/\left(1-\frac{z}{r_n}\right) \tag{117}$$

в угле $[\hat{\eta}, 2\pi - \eta]$ представима в виде

$$b_\delta(z) = b_{\delta,1}(z)\, b_{\delta,2}(z), \tag{118}$$

при этом равномерно по θ, $\eta \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \eta$, выполняется соотношение

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\sigma} \ln |b_{\delta,1}(re^{i\theta})| = \frac{\pi\sigma[\nu(\delta) - \nu(-\delta)]}{\sin \sigma\pi} \sin \sigma(\theta - \pi), \tag{119}$$

и при $r > 0$ справедливо неравенство

$$\max_{\eta \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \eta} |\ln |b_{\delta,2}(re^{i\theta})|| < N_\eta \delta r^\sigma, \tag{120}$$

причем постоянная N_η не зависит от r и δ.

Доказательство. На основании леммы 10 (после замены z_0 на $z_n = r_n e^{i\theta_n}$) имеем представление (118), где положено

$$\ln b_{\delta,1}(z) = iz \sum_{-\delta < \theta_n \leqslant \delta} \frac{\theta_n}{r_n - z}, \quad \ln b_{\delta,2}(z) = iz \sum_{-\delta < \theta_n \leqslant \delta} \frac{\theta_n \beta(z, z_n)}{r_n - z}. \tag{121}$$

Соотношение (119) вытекает из леммы 9 и такого представления

$$\ln b_{\delta,1}(z) = iz \int_0^\infty \frac{da(x, -\delta, \delta)}{x - z} = iz \int_0^\infty \frac{a(x, -\delta, \delta)}{(x - z)^2} dx.$$

Теперь обозначим

$$\varphi_*(R) = \sum_{-\delta < \theta_n \leqslant \delta,\, r_n \leqslant R} \theta_n \beta(z, r_n, e^{i\theta_n}).$$

На основании (76) и леммы 10 можно написать

$$|\varphi_*(R)| \leqslant \frac{\delta}{\eta} \sum_{r_n \leqslant R} |\theta_n| \leqslant \frac{\delta K}{\eta} R^\sigma.$$

Далее

$$|\ln b_{\delta,2}(z)| = r \left| \int_0^\infty \frac{d\varphi_*(x)}{x - z} \right| \leqslant r \int_0^\infty \frac{|\varphi_*(x)|}{|x - z|^2} dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r\delta K}{\eta} \int_0^\infty \frac{x^\sigma dx}{|x - re^{i\eta}|^2} \leqslant N_\eta \delta r^\sigma, \text{ где } N_\eta = \frac{K}{\eta} \int_0^\infty \frac{u^\sigma du}{|u - e^{i\eta}|^2}.$$

Лемма доказана.

Лемма 12. *Если выполнены условия теоремы 15 и $\delta > 0$ таково, что существует предел*

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\sigma} a(r, \delta, 2\pi - \delta) = \nu(\delta, 2\pi - \delta), \tag{122}$$

то функция

$$b_{\delta,0}(z) = \prod_{\delta<\theta_n<2\pi-\delta} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \Big/ \left(1 - \frac{z}{r_n}\right) \tag{123}$$

имеет в $(0, \widehat{2\pi})$ *в. р. р. формального порядка* σ *со следующим индикатором:*

$$h_{b_{\delta,0}}(\theta) = \frac{\pi}{\sin \pi\sigma} \left[\int_{\delta}^{\pi} \mu(\psi, \theta)\, d\nu(\psi) + \int_{-\pi}^{-\delta} \mu(\psi, \theta)\, d\nu(\psi)\right]. \tag{124}$$

Доказательство. Поскольку существует предел (122), то по лемме 7

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\sigma} n(r, \delta, 2\pi - \delta).$$

Отсюда [3, стр. 199] множество нулей z_n, лежащих в $(\delta, \widehat{2\pi - \delta})$, имеет угловую σ-плотность. Но тогда бесконечные произведения

$$b^{*}_{\delta,0}(z) = \prod_{(\delta,\, 2\pi-\delta)} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right),\quad b^{**}_{\delta,0}(z) = \prod_{(\delta,\, 2\pi-\delta)} \left(1 - \frac{z}{r_n}\right),$$

сходятся и являются целыми функциями в. р. р. формального порядка [3, стр. 120], а так как все нули $b^{**}_{\delta,0}(z)$ лежат на полуоси $0 < t < \infty$, то $b_{\delta,0}(z)$ имеет в $(0, \widehat{2\pi})$ также в. р. р. Используя теперь формулу Левина—Пфлюгера [3, стр. 133], найдем

$$h_{b_{\delta,0}}(\theta) = \frac{\pi}{\sin \pi\sigma} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \cos \sigma(|\theta - \psi| - \pi)\, d\Delta(\psi) - \frac{\pi}{\sin \pi\sigma} \cos \sigma(\theta - \pi) \times$$

$$\times \int_{\delta}^{2\pi-\delta} d\Delta(\psi) = \frac{\pi}{\sin \pi\sigma} \int_{-\pi}^{-\delta} [\cos \sigma(|\theta - \psi| - \pi) - \cos \sigma(\theta - \pi)]\, d\Delta(\psi) +$$

$$+ \frac{\pi}{\sin \pi\sigma} \int_{0}^{\pi} [\cos \sigma(|\theta - \psi| - \pi) - \cos \sigma(\theta - \pi)]\, d\Delta(\psi),\quad 0 < \theta < 2\pi.$$

Далее, применяя тот же метод, что в доказательстве леммы 7, получим

$$h_{b_{\delta,0}}(\theta) = \frac{\pi}{\sin \pi\sigma} \left\{\int_{-\pi}^{-\delta} \frac{1}{\psi} [\cos \sigma(|\theta - \psi - 2\pi| - \pi) - \cos \sigma(\theta - \pi)]\, d\nu(\psi) +\right.$$

$$\left. + \int_{\delta}^{\pi} \frac{1}{\psi} [\cos \sigma(|\theta - \psi| - \pi) - \cos \sigma(\theta - \pi)]\, d\nu(\psi)\right\}.$$

Лемма доказана.

Лемма 13. Если функции $b_{\delta, k}(z)$ определяются равенствами (118) *и* (123), *то для их индикаторов справедливо равенство*

$$\lim_{\delta\to 0}\left[h_{b_{\delta,0}}(\theta)+h_{b_{\delta,1}}(\theta)-\frac{\pi}{\sin\sigma\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mu(\psi,\theta)\,d\nu(\psi)\right]=0, \tag{125}$$

причем стремление к пределу равномерно по θ *на отрезке* $0\leqslant\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

Доказательство. Обозначим

$$\tau_\delta(\theta)=\frac{\pi}{\sin\pi\sigma}\left\{\int_{-\pi}^{-\delta}\mu(\psi,\theta)\,d\nu(\psi)+\int_{\delta}^{\pi}\mu(\psi,\theta)\,d\nu(\psi)+\right.$$

$$\left.+\sigma[\nu(\delta)-\nu(-\delta)]\sin\sigma(\theta-\pi)-\int_{-\pi}^{\pi}\mu(\psi,\theta)\,d\nu(\psi)\right\}. \tag{126}$$

Нам нужно доказать, что равномерно по θ

$$\lim_{\delta\to 0}\tau_\delta(\theta)=0.$$

Обозначив скачок аргументной плотности $\nu(\psi)$ при $\psi=0$

$$\nu_0=\nu(+0)-\nu(-0), \tag{127}$$

положим

$$\nu^*(\psi)=\begin{cases}\nu(\psi), & -\pi\leqslant\psi\leqslant 0,\\ \nu(\psi)-\nu_0, & 0<\psi\leqslant\pi.\end{cases}$$

Тогда, учитывая, что по определению

$$\mu(0,\theta)=\mu\sigma\sin\sigma(\theta-\pi),$$

можно (126) записать в такой форме:

$$\tau_\delta(\theta)=\frac{\pi}{\sin\pi\sigma}\left\{\sigma[\nu(\delta)-\nu(-\delta)-\nu_0]\sin\sigma(\theta-\pi)-\int_{-\delta}^{\delta}\mu(\psi,\theta)\,d\nu^*(\psi)\right\}. \tag{128}$$

Оценим интеграл Стилтьеса

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta}\mu(\psi,\theta)\,d\nu^*(\psi)\right|<\operatorname*{Var}_{-\delta\leqslant\psi\leqslant\delta}\nu^*(\psi)\max_{-\delta\leqslant\psi\leqslant\delta}|\mu(\psi,\theta)|. \tag{129}$$

Из равенства (103) при $0<\theta<2\pi$ и $-2\pi<\psi<2\pi$ найдем

$$\mu(\psi,\theta)=\begin{cases}\frac{2}{\psi}\sin\frac{\sigma\psi}{2}\sin\sigma\left(\theta-\pi-\frac{\psi}{2}\right), & 0<\psi<\theta \text{ или } \theta-2\pi\leqslant\psi<0,\\ \frac{2}{\psi}\sin\sigma\left(\frac{\psi}{2}-\pi\right)\sin\sigma\left(\theta-\frac{\psi}{2}\right), & \theta\leqslant\psi<2\pi,\\ \frac{2}{\psi}\sin\sigma\left(\theta-2\pi-\frac{\psi}{2}\right)\sin\sigma\left(\pi+\frac{\psi}{2}\right), & -2\pi\leqslant\psi\leqslant\theta-2\pi,\\ \sigma\sin\sigma(\theta-\pi); & \psi=0.\end{cases} \tag{130}$$

Но так как

$$\left|\theta-\frac{\psi}{2}\right|\leqslant\frac{\psi}{2} \text{ при } \theta\leqslant\psi<2\pi,$$
$$\left|\theta-2\pi-\frac{\psi}{2}\right|\leqslant\frac{\psi}{2} \text{ при } -2\pi\leqslant\psi\leqslant\theta-2\pi, \tag{131}$$

то с учетом неравенства $\left|\sin\frac{\sigma\psi}{2}\right|\leqslant\frac{\sigma|\psi|}{2}$ найдем

$$|\mu(\psi, \theta)|\leqslant\sigma \tag{132}$$

при любых ψ и θ, подчиненных вышеуказанным условиям.

Так как $\nu^*(\psi)$ непрерывна при $\psi=0$, то

$$\lim_{\delta\to 0}\operatorname*{Var}_{-\delta\leqslant\psi\leqslant\delta}\nu^*(\psi)=0.$$

Поэтому в силу неравенств (129) и (132)

$$\int_{-\delta}^{\delta}\mu(\psi, \theta)\,d\nu^*(\psi)=o(\delta). \tag{133}$$

Из (128) и (133) найдем $\max\limits_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}\tau_\delta(\theta)=o(\delta)$, что и требовалось доказать.

Теперь завершим доказательство теоремы Fо. Фиксируем произвольно малое $\eta>0$. Задавшись любым $\varepsilon>0$, выберем столь малое δ, чтобы выполнялись такие условия:

$$0<\delta<\min\left(\frac{\eta}{5}, \frac{\varepsilon}{4}N_\eta^{-1}\right), \tag{134}$$

где N_η — постоянная в смысле леммы 11,

$$\max_{\eta\leqslant\theta\leqslant 2\pi-\eta}\left[h_{b_{\delta,0}}(\theta)+h_{b_{\delta,1}}(\theta)-\frac{\pi\sigma}{\sin\pi\sigma}\int_{-\pi}^{\pi}\mu(\psi, \theta)\,d\nu(\psi)\right]\leqslant\frac{\varepsilon}{4} \tag{135}$$

и существует предел

$$\lim_{r\to\infty}r^{-\sigma}a(r, -\delta, \delta)=\nu(-\delta, \delta).$$

После этого, исходя из равенств (118), (123), запишем

$$b(z)=b_{\delta,0}(z)\,b_{\delta,1}(z). \tag{136}$$

На основании лемм 11 и 12 функции $b_{\delta,0}(z)$ и $b_{\delta,1}(z)$ имеют в угле $[\eta, 2\pi-\eta]$ в. р. р., а $b_{\delta,2}(z)$ удовлетворяет оценке (120). Следовательно, найдется множество $E_\varepsilon\subset[0, \infty]$ относительной меры нуль такое, что

$$\sup_{r\overline{\in}E_\varepsilon,\ \eta\leqslant\theta\leqslant 2\pi-\eta}\left[r^{-\sigma}\ln|b_{\delta,0}(re^{i\theta})|-h_{\delta,0}(\theta)\right]<\frac{\varepsilon}{4}, \tag{137}$$

$$\sup_{r\overline{\in}E_\varepsilon,\ \eta\leqslant\theta\leqslant 2\pi-\eta}\left[r^{-\sigma}\ln|b_{\delta,1}(re^{i\theta})|-h_{\delta,1}(\theta)\right]<\frac{\varepsilon}{4}, \tag{138}$$

$$\sup_{r\in \overline{E}_\varepsilon,\ \eta\leqslant\theta\leqslant 2\pi-\eta} |r^{-\sigma}\ln|b_{\delta,2}(re^{i\theta})|| < N_\eta\delta < \frac{\varepsilon}{4}. \qquad (139)$$

Из (135) — (139) следует, что

$$\sup_{r\in \overline{E}_\varepsilon,\ \eta\leqslant\theta\leqslant 2\pi-\eta}\left[r^{-\sigma}\ln|b(re^{i\theta})| - \frac{\pi\sigma}{\sin\pi\sigma}\int_{-\pi}^{\pi}\mu(\psi,\theta)\,d\nu(\psi)\right] < \varepsilon.$$

Но тогда по известному свойству функций, аналитических внутри угла [3, стр. 186], $b(z)$ имеет в. р. р. в угле $[\eta, 2\pi-\eta]$, и ее индикатор выражается формулой (102). Теорема доказана.

8. Установим теперь основную теорему нашей работы.

Теорема 16. *Общее решение в классе* B_σ, $0<\sigma<\min\left(\rho, \frac{1}{2}\right)$, *однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом*

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) \qquad (1)$$

в предположениях (2) — (5), (6′) *выражается формулой*

$$\Phi(z) = Cz^m \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-\dfrac{z}{z_n}}{1-\dfrac{z}{r_n}}\exp\left[\frac{z}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{\ln G(x) - 2\pi i\tilde{n}_\Phi(x)}{x(x-z)}\,dx\right], \qquad (140)$$

$$\left(C = \text{const},\ z_n = r_n e^{i\theta_n},\ 0 < r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots\right),$$

где $m \geqslant 0$ — *целое число, а бесконечная последовательность* $\{z_n\}$, $z_n \to \infty$, *совпадающая с множеством отличных от нуля корней* $\Phi(z)$, *удовлетворяет следующим требованиям:*

1. *Множество* $\{z_n\}$ *имеет аргументную* σ*-плотность.*

2. *Существует конечный предел (модульная плотность):*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\sigma^2}{r^\sigma}\int_0^r\frac{dt}{t}\int_0^t\left[\tilde{n}_\Phi(x) - \frac{1}{2\pi}\arg G(x)\right]\frac{dx}{x} = -\gamma \leqslant 0, \qquad (141)$$

где $\tilde{n}_\Phi(r)$ — *число точек* z_n *в кольце* $0<|z|\leqslant r$. *При этом, если* $\gamma = 0$, *то при любом* $\varepsilon > 0$ *выполняется соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} r^{\varepsilon-\sigma}\int_0^r\left[\frac{1}{2\pi}\arg G(x) - \tilde{n}_\Phi(x)\right]\frac{dx}{x} = +\infty. \qquad (142)$$

3. *Сходится интеграл*

$$\int_0^\infty\left[\ln G(x) - 2\pi i\tilde{n}_\Phi(x)\right]\frac{dx}{x^2}. \qquad (143)$$

4. *На контуре L функция $\Phi^+(t)$ ограничена, или, что равносильно, выполняется асимптотическая оценка*

$$m \ln t + \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left| \frac{t - z_n}{t - r_n} \right| + t \int_0^{\infty} \frac{\frac{1}{2\pi} \arg G(x) - \tilde{n}_{\Phi}(x)}{x(x-t)} dx < \text{const}. \quad (144)$$

При этом индикатор решения выражается формулой

$$h_{\Phi}(\theta) = \frac{\pi}{\sin \sigma\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \mu(\psi, \theta)\, d\nu(\psi) - \gamma \cos \sigma(\theta - \pi) \right] \quad (0 < \theta < 2\pi), \quad (145)$$

где $\mu(\psi, \theta)$ *определяется равенством* (103), а $\nu(\psi)$ — *аргументная плотность множества нулей.*

Доказательство. Пусть $\Phi(z) \in B_\sigma$, где $0 < \sigma < \min\left(\rho, \frac{1}{2}\right)$. Тогда по определению класса B_σ имеем $\Phi \in B$ и, следовательно, по теореме 10 $\Phi(z)$ представимо в виде (140) и выполняются условия 3 и 4. Условия 1 и 2 вытекают из теоремы 14, а равенство (142) установлено в теореме 5. Далее, согласно теоремам 15 и 9 функции

$$b(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{z}{z_n}}{1 - \frac{z}{r_n}}, \quad \Omega(z) = \exp\left[z \int_0^{\infty} \frac{\frac{1}{2\pi i} \ln G(x) - \tilde{n}_{\Phi}(x)}{x(x-z)} dx \right]$$

имеют в. р. р. формального порядка σ и соответственно следующие индикаторы:

$$h_b(\theta) = \frac{\pi}{\sin \sigma\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mu(\psi, \theta)\, d\nu(\psi), \quad h_{\Omega}(\theta) = -\frac{\pi\gamma}{\sin \sigma\pi} \cos \sigma(\theta - \pi).$$

Отсюда получаем соотношение (145) [3, стр. 208]. Наконец, множество $\{z_n\}$ по следствию I теоремы 5 является бесконечным.

Пусть теперь, обратно, дана функция $\Phi_*(z)$ вида (140), где последовательность $\{z_n\}$ подчинена условиям 1—4 и $0 < \sigma < \min\left(\rho, \frac{1}{2}\right)$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-1/2} \sin \frac{\theta_n}{2}$ сходится (см. (106)).

Предел (141) при $\sigma = 1/2$ равен нулю. Поэтому по теореме 10 $\Phi_*(z)$ ограничена и удовлетворяет краевому условию $\Phi_*^+(t) = G(t)\Phi_*^-(t)$. В силу теоремы 15 и леммы 1 $\Omega(z)$, $b(z) \in B_\sigma^*$. Отсюда $\Phi_* \in B_\sigma^*$. Остается доказать, что $\Phi_* \in B_\sigma$. Из теоремы 6 при любом $\varepsilon > 0$ следует

$$\gamma = \lim_{r \to \infty} r^{-\sigma} \int_1^r \frac{dt}{t} \int_0^t \left[\frac{1}{2\pi} \arg G(x) - \tilde{n}_{\Phi}(x) \right] \frac{dx}{x} =$$

$$= -\lim_{r \to \infty} \frac{1}{2\pi r^\sigma} \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^r \ln |\Phi_*(te^{i\theta})| \frac{dt}{t}. \quad (146)$$

(После перемены порядка интегрирования). Допустим, что порядок функции $\Phi_*(z)$ равен $\sigma-\varepsilon_0<\sigma$. Рассмотрим случай $\gamma>0$. По определению 1 имеем

$$h_{\Phi}^{(\sigma)}(0)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-\sigma}\ln|\Phi_*(re^{i\theta})|\equiv 0\quad(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi).$$

Тогда на основании теоремы 7 для всякого $\varepsilon>0$ равномерно по θ

$$-\int_1^r \ln|\Phi_*(te^{i\theta})|\frac{dt}{t}<\varepsilon r^{\sigma}\ \text{при}\ r>r_\varepsilon.$$

Это в сопоставлении с (146) дает $\gamma<\varepsilon$, и значит, $\gamma=0$, ибо ε как угодно мало. Но это невозможно, так как $\gamma>0$.

Пусть теперь $\gamma=0$. Тогда по определению 2 для каждого ε, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, найдется последовательность $\{r_{\varepsilon,n}\}\to\infty$, что равномерно по θ

$$\lim_{h\to\infty} r_{\varepsilon,n}^{\varepsilon-\sigma}\ln|\Phi(r_{\varepsilon,n}e^{i\theta})|=0,\ r_{\varepsilon,n}\to\infty.$$

Отсюда, применив теорему 7, получаем

$$\lim_{h\to\infty} r_{\varepsilon,n}^{\varepsilon-\sigma}\int_0^{r_{\varepsilon,n}}\left[n_\varphi(x)-\frac{1}{2\pi}\arg G(x)\right]\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\lim_{h\to\infty} r_{\varepsilon,n}^{\varepsilon-\sigma}\int_0^{2\pi}\ln|\Phi(r_{\varepsilon,n}e^{i\theta})|\,d\theta=0,$$

что, однако, противоречит условию (142). Таким образом, порядок функции $\Phi_*(z)$ точно равен σ. Теорема 16 полностью доказана.

Замечание. Условие (142) выполняется и при $\gamma=0$ и при $\gamma>0$, но необходимость в его использовании возникает только при $\gamma>0$.

Непосредственно из доказательства теоремы 16 вытекает

Теорема 17. *Общее решение однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом (1) в классе* B_σ^*, $0<\sigma<\min(\rho,\frac{1}{2})$, *выражается формулой (140), где бесконечная последовательность* $\{z_n\}$, *совпадающая со множеством отличных от нуля корней* $\Phi(z)$, *удовлетворяет требованиям (141), (143) и (144).*

Индикатор решения (при формальном порядке σ) выражается формулой (145).

Замечание 1. Задача (1) имеет бесконечно много линейно независимых решений класса B_σ. Приведем простейший пример:

$$\Phi_0(z) = \exp\left[\frac{z}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{\ln G(x) - 2\pi i \tilde{n}(x)}{x(x-z)}\,dx\right],$$

$$\tilde{n}(x) = \max\left\{0, \left[\max_{0 \leqslant x \leqslant t}\{\psi(x)x^\rho - \tau x^\sigma\}\right]\right\},$$

где $0 < \sigma < \min\left(\rho, \frac{1}{2}\right)$, а τ — произвольное положительное число.

Замечание 2. Можно показать, что условие (6′) является существенным: например, в классе B_σ задача (1) неразрешима при следующих предположениях:

$$\arg G(t) = \psi(t)t^\rho,\ \psi(t) = 1 + t^{-\alpha}\sin t^{\rho-\sigma} - 2t^{-\rho},$$

$$\frac{1}{2} < \rho < \infty,\ 0 < \sigma \leqslant \frac{1}{2},\ 0 < \alpha < \rho - \sigma,\ |G(t)| \equiv 1.$$

В данном случае условия (2) — (5) выполнены, но (6′) нарушено.

На доказательствах фактов, сформулированных в последних замечаниях, мы здесь не останавливаемся.

В заключение автор выражает глубокую благодарность профессорам Б. Я. Левину, Ф. Д. Гахову, И. В. Островскому и А. А. Гольдбергу за постоянный интерес к работе и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Д. Гахов. Краевые задачи. Физматгиз, 1963.
2. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные управления. Физматгиз, 1962.
3. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. Гостехиздат, 1956.
4. Е. Титчмарш. Теория функций. Гостехиздат, 1951.
5. A. Pfluger. Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analitischer Funktionen, I, II, Comm. Math. Helv. 12, 1939.
6. Н. В. Говоров. Краевая задача Римана с бесконечным индексом степенного порядка меньше $\frac{1}{2}$. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 6. Изд-во Харьковск. ун-та, 1968.
7. Н. В. Говоров. Об ограниченных решениях однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом степенного порядка. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 11. Изд-во Харьковск. ун-та, 1969.
8. Н. В. Говоров. Об ограниченных решениях краевой задачи Римана с бесконечным индексом степенного порядка. ДАН СССР, т. 182, № 4, 1968.
9. Н. В. Говоров. Об однородной краевой задаче Римана с бесконечным индексом. Изв. АН БССР, № 1, 1964.
10. А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций. Гостехиздат, 1950.

11. R. N e v a n l i n n a. Über die Eigenschaften meromorpher Funktionen in einem Winkelraum, Acta Soc., Sci. Fenn. 50, № 12, 1925.

12. Н. В. Г о в о р о в. Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом, ДАН СССР, т. 159, № 5, 1969.

Поступила 25 ноября 1970 г.