О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФИШЕРА—ФРОБЕНИУСА

И. С. Иохвидов

1. В 1911 г. в связи с известной проблемой Каратеодори в теории степенных рядов (см., например, [1, гл. 9] или [2, статья 1, гл. 2]) Э. Фишер [3] предложил замечательное линейное преобразование комплексного n-мерного пространства. Работа Фишера вышла непосредственно вслед за статьей О. Теплица [4], содержавшей решение проблемы Каратеодори в терминах эрмитовых форм

$$\sum_{p,\, q=0}^{n-1} c_{p-q} x_p \bar{x}_q \quad (c_{-p} = \bar{c}_p,\ p = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{1}$$

коэффициенты которых c_p определенным образом связаны с некоторым степенным рядом (формы (1) в дальнейшем получили название *теплицевых*). Э. Фишер дал другое решение той же проблемы в терминах ганкелевых форм

$$\sum_{i,\,k=0}^{n-1} s_{i+k} y_i \bar{y}_k \left(s_k = \bar{s}_k,\ k = 0, 1, \ldots, 2n-2\right), \tag{2}$$

опять-таки связанных с изучаемым степенным рядом. Он также нашел неособенное линейное преобразование, переводящее построенную им форму (2) в рассмотренную ранее Теплицем форму (1), чем по-новому (в отличие от Теплица, чисто алгебраически) обосновал и решение, найденное Теплицем.

Заметим, что специальные формы (1) и (2), фигурирующие в решении проблемы Каратеодори, неотрицательны. В одном из своих последних мемуаров Г. Фробениус [5] показал, что преобразование Фишера (вернее, обратное ему) переводит л ю б у ю (а не только рассматривавшуюся в [3] специальную) неотрицательную форму (1) в некоторую ганкелеву форму (2). Изложим вкратце его результат, поскольку это необходимо для дальнейшего.

2. Интересующее нас преобразование Фробениус [5] записывает в несколько более общем, чем у Фишера, виде, а именно:

$$x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \ldots + x_{n-1}\varepsilon^{n-1} \equiv$$
$$\equiv \left(a + \bar{a}\varepsilon\right)^{n-1} y_0 + \left(a + \bar{a}\varepsilon\right)^{n-2}\left(b + \bar{b}\varepsilon\right) y_1 + \ldots + \left(b + \bar{b}\varepsilon\right)^{n-1} y_{n-1}. \tag{Ф.—Ф.}$$

Поясним, что здесь a и b — произвольные, отличные от нуля, фиксированные комплексные числа, а ε — переменная величина. Тождество (Ф.—Ф.) двух многочленов, если сравнить коэффициенты при одинаковых степенях ε, определяет величины x_0, $x_1, \ldots, x_{n-1}$ как линейные формы от $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$:

$$x_p = \sum_{j=0}^{n-1} \xi_{pj} y_j \quad (p = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{3}$$

Формулы (3) и задают искомое линейное преобразование комплексных переменных $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ в комплексные переменные $(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$. Первоначально предложенное Фишером [3] преобразование получается из (Ф.—Ф.) при частных значениях $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{i}{2}$.

Как показывает Фробениус, при дополнительном требовании $a\bar{b} - \bar{a}b \neq 0$ (которое, как видим, у Фишера выполнено) преобразование (3) — неособенное. В самом деле, при сделанном предположении имеют смысл взаимно-обратные дробно-линейные подстановки

$$\vartheta = \frac{b + \bar{b}\varepsilon}{a + \bar{a}\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{a\vartheta - b}{\bar{b} - \bar{a}\vartheta},$$

в силу которых (Ф.—Ф.) можно переписать в виде

$$(a\bar{b} - \bar{a}b)^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \vartheta^j y_j \equiv \sum_{p=0}^{n-1} (\bar{b} - \bar{a}\vartheta)^{n-1-p} (a\vartheta - b)^p x_p. \qquad \text{(Ф. —Ф.)—bis.}$$

Ясно, что, сравнивая здесь коэффициенты при одинаковых степенях ϑ, мы получим соотношения

$$y_j = \sum_{p=0}^{n-1} \eta_{jp} x_p \quad (j = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{4}$$

являющиеся обращением линейного преобразования (3).

Легко видеть из (Ф.—Ф.), что условие $a\bar{b} - \bar{a}b \neq 0$ не только достаточно, но и необходимо для обратимости преобразования (3). Это особенно очевидно при $n = 2$, когда (3) записывается как

$$x_0 = ay_0 + by_1; \quad x_1 = \bar{a}y_0 + \bar{b}y_1.$$

При $n > 2$ явные формулы усложняются. Например, при $n = 3$

$$x_0 = a^2 y_0 + ab y_1 + b^2 y_2,$$
$$x_1 = 2a\bar{a} y_0 + (a\bar{b} + \bar{a}b) y_1 + 2b\bar{b} y_2,$$
$$x_3 = \bar{a}^2 y_0 + \bar{a}\bar{b} y_1 + \bar{b}^2 y_2$$

и т. д.

Нетрудно проверить, что при любом $n \, (n > 1)$ коэффициенты преобразования (3) обладают свойством

$$\xi_{pj} = \bar{\xi}_{n-1-p,\, j} \quad (p, j = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{5}$$

3. Упоминавшееся в п. 1 свойство преобразования (Ф.—Ф.) Фишера—Фробениуса в случае неотрицательности (в остальном произвольной) теплицевой формы (1) получается (см. [5]) немедленно, если вспомнить, что при этом условии последовательность $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ (так называемая *ненегативная* последовательность) допускает «тригонометрическое моментное представление» (см. [2] или [6]):

$$c_p = \sum_{k=1}^{m} r_k \varepsilon_k^p, \quad r_k > 0, \quad |\varepsilon_k| = 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Но тогда из (1) и (Ф.—Ф.) имеем

$$\sum_{p,\,q=0}^{n-1} c_{p-q} x_p \bar{x}_q = \sum_{p,\,q=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{m} r_k \varepsilon_k^{p-q} x_p \bar{x}_q =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{p=0}^{n-1} x_p \varepsilon_k^p \sum_{q=0}^{n-1} \bar{x}_q \bar{\varepsilon}_k^q = \sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{p,\,q=0}^{n-1} (a + \bar{a}\varepsilon_k)^{n-1-p} \times$$

$$\times (b + \bar{b}\varepsilon_k)^p (\bar{a} + \bar{a}\bar{\varepsilon}_k)^{n-1-q} (в + b\bar{\varepsilon}_k)^q y_p y_q = \sum_{p,\,q=0}^{n-1} s_{pq} y_p \bar{y}_q,$$

где для всех $p, q = 0, 1, \ldots, n-1$

$$s_{pq} = \sum_{k=1}^{m} r_k \bar{\varepsilon}_k^{n-1} (a + \bar{a}\varepsilon_k)^{2n-2-(p+q)} (b + \bar{b}\varepsilon_k)^{p+q},$$

т. е. каждый коэффициент $s_{pq} \equiv s_{p+q}$ зависит только от суммы $p+q$ индексов p и q и, как легко видеть, есть вещественное число. Впрочем (это в [5] не отмечено), последнее сразу видно из формул (5) (для любых форм (1), а не только для неотрицательных). В самом деле, внося (3) в (1), имеем

$$\sum_{p,\,q=0}^{n-1} c_{p-q} \bar{x}_p \bar{x}_q = \sum_{p,\,q=0}^{n-1} c_{p-q} \sum_{j=0}^{n-1} \xi_{pj} y_j \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\xi}_{qk} \bar{y}_k = \sum_{j,\,k=0}^{n-1} s_{jk} y_j \bar{y}_k,$$

где

$$s_{jk} = \sum_{p,\,q=0}^{n-1} c_{p-q} \xi_{pj} \bar{\xi}_{qk} \quad (j, k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{6}$$

Отсюда, учитывая (5), получаем

$$s_{jk} = \sum_{p,\,q=0}^{n-1} \bar{c}_{p-q} \bar{\xi}_{pj} \xi_{qk} = \sum_{p,\,q=0}^{n-1} c_{q-p} \xi_{n-1-p,\,j} \bar{\xi}_{n-1-q,\,k} =$$

$$= \sum_{\mu,\,\nu=0}^{n-1} c_{\mu-\nu} \xi_{\mu j} \bar{\xi}_{\nu k} = s_{jk} \quad (j, k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

4. Ганкелева форма (2), полученная преобразованием (3) из неотрицательной формы (1), разумеется, снова неотрицательна. Фробениус в [5] не выясняет, получаются ли на этом пути при фиксированных a и b и всевозможных формах (1) все неотрицательные ганкелевы формы. Однако утвердительный ответ на этот вопрос сразу следует из того, что коэффициенты всякой неотрицательной ганкелевой формы (2) допускают «степенное моментное представление» (см. [2] или [6]):

$$s_k = \sum_{\nu=1}^{m} r_\nu \vartheta_\nu^k, \quad r_\nu > 0, \quad \vartheta_\nu = \bar{\vartheta}_\nu \neq 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, m).$$

Внося эти выражения в (2) и учитывая (Ф.—Ф.)—bis, получаем

$$\sum_{j,\,k=0}^{n-1} s_{j+k} y_j \bar{y}_k = \sum_{j,\,k=0}^{n-1} \sum_{\nu=1}^{m} r_\nu \vartheta_\nu^{j+k} y_j \bar{y}_k = \sum_{\nu=1}^{m} r_\nu \sum_{j=0}^{n-1} y_j \vartheta_\nu^j \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{n-1} \bar{y}_k \vartheta_\nu^k = \frac{1}{(a\bar{b}-\bar{a}b)^{2n-2}} \sum_{\nu=1}^{m} r_\nu \sum_{p=0}^{n-1} (\bar{b}-\bar{a}\vartheta_\nu)^{n-1-p} (a\vartheta_\nu - b)^p \times$$

$$\times x_p \sum_{q=0}^{n-1} (b-a\vartheta_\nu)^{n-1-q} (\bar{a}\vartheta_\nu - \bar{b})^q \bar{x}_q = \sum_{p,\,q=0}^{n-1} c_{pq} x_p \bar{x}_q,$$

где

$$c_{pq} = \frac{(-1)^{p-q}}{a\bar{b}-\bar{a}b^{2n-2}} \sum_{\nu=1}^{m} r_\nu (a\vartheta_\nu - b)^{n-1+(p-q)} (\bar{a}\vartheta_\nu - \bar{b})^{n-1-(p-q)}.$$

Отсюда видно, что $c_{qp} = \bar{c}_{pq}$ и $c_{pq} = c_{p-q}$ зависят только от разности $p-q$ индексов p и q.

Таким образом, *при любых фиксированных* a и b *с определителем* $a\bar{b}-\bar{a}b \neq 0$ *преобразование* (Ф.—Ф.) *переводит все неотрицательные эрмитовы теплицевы формы в неотрицательные эрмитовы ганкелевы формы и обратно.*

5. В приведенном выше (и по существу давно известном, хотя и не сформулированном так полно) результате удивляет требование неотрицательности форм, существенно используемое в доказательстве, но никак не гармонирующее с характером утверждения о том, что некоторое линейное преобразование «перестраивает» теплицевы формы в ганкелевы и обратно. И, действительно, как показано ниже, это свойство преобразования (Ф.—Ф.) и соответствующее свойство обратного преобразования остаются в силе и для индефинитных форм.

Чтобы убедиться в этом, заметим, что преобразование (3) переводит произвольную форму (1) в форму с коэффициентами s_{jk}, вычисляемыми по правилу (6). Таким образом, s_{jk} суть линейные формы от переменных $c_0, c_{\pm 1}, c_{\pm 2}, \ldots, c_{\pm(n-1)}$ $(j, k = 0, 1, \ldots, n-1)$. Зафиксируем все эти переменные (т. е. коэффициенты формы (1)) кроме c_0, а c_0 выберем столь большим положительным, чтобы все последовательные главные миноры

$$\Delta_0 = c_0,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} c_0 & c_{-1} \\ c_1 & c_0 \end{vmatrix},\ \ldots,\ \Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} c_0 & c_{-1} & \ldots & c_{-n+1} \\ c_1 & c_0 & \ldots & c_{-n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \ldots & c_0 \end{vmatrix}$$

формы (1) были положительными. Это осуществимо, поскольку $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$ суть многочлены от c_0 со старшими коэффициентами, равными единице. Тогда, в силу доказанного выше, для полученной положительно определенной формы (1) вещественные числа s_{jk} (см. (6)) зависят только от суммы индексов $j+k$, т. е.

$$s_{jk}=s_{j+1,\,k-1}=s_{j+2,\,k-2}=\ldots=s_{j+k-1,\,1}=s_{j+1,\,0}=s_{j-k,\,k+1}=$$
$$=s_{j-2,k+2}=\ldots=s_{1,\,k+j-1}=s_{0,\,k+j}\quad (j,\,k=0,\,1,\,\ldots,\,n-1).$$

Но ясно, что эти равенства между линейными функциями от c_0, справедливые при всех достаточно больших положительных c_0, сохраняются тождественно при любых c_0, т. е. для любых форм (1).

Применим теперь обратное по отношению к (3) преобразование (4) к произвольной ганкелевой форме (2):

$$\sum_{j,\,k=0}^{n-1} s_{j+k}y_j\bar{y}_k=\sum_{j,\,k=0}^{n-1} s_{j+k}\sum_{p=0}^{n-1}\eta_{jp}x_p\sum_{q=0}^{n-1}\bar{\eta}_{kq}\bar{x}_q=\sum_{p,\,q=0}^{n-1} c_{pq}x_p\bar{x}_q,$$

где

$$c_{pq}=\sum_{j,\,k=0}^{n-1} s_{j+k}\eta_{jp}\bar{\eta}_{kq}\quad (p,\,q=0,\,1,\,\ldots,\,n-1).$$

Отсюда видно, что матрица $\|c_{pq}\|_{p,\,q=0}^{n-1}$ эрмитова:

$$\bar{c}_{qp}=c_{pq}\quad (p,\,q=0,\,1,\,\ldots,\,n-1),$$

а ее элементы — линейные формы от переменных $s_0,\,s_1,\,\ldots,\,s_{2n-2}$. При этом нам известно, что в случае неотрицательности формы (2)

$$c_{pq}=c_{p-1,\,q-1}=c_{p-2,\,q-2}=\ldots=c_{p-q,\,0}\,(p,q=0,1,\ldots,n-1).\quad (7)$$

Зафиксируем коэффициенты $s_1,\,s_3,\,\ldots,\,s_{2n-3}$, а коэффициентами $s_0,\,s_2,\,\ldots,\,s_{2n-2}$ распорядимся так, чтобы форма (2) сделалась положительно определенной. Именно, выберем сперва $(\Delta_0=)\ s_0>0$. Поскольку

$$\Delta_1\begin{vmatrix} s_0s_1 \\ s_1s_2\end{vmatrix}=s_0s_2-s_1^2,$$

то $\Delta_1>0$ при достаточно большом (положительном) s_2. Зафиксировав теперь $s_0,\ s_2$, перейдем к

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2\\ s_1 & s_2 & s_3\\ s_2 & s_3 & s_4\end{vmatrix}=s_4\Delta_1+\ldots$$

и выберем положительное s_4 настолько большим, чтобы $\Delta_2>0$. Повторяя этот прием, получим $\Delta_0>0,\ \Delta_1>0,\ \ldots,\ \Delta_{n-1}>0$ при некоторых достаточно больших $s_0,\,s_2,\,\ldots,\,s_{2n-2}$, причем ясно, что такие наборы $s_0,\,s_2,\,\ldots,\ s_{2n-2}$ могут быть выбраны бесконечным множеством способов. Но для этих наборов справедливы равенства (7). А поскольку входящие в (7) величины суть (при фиксированных $s_1,\ s_3,\ \ldots,\ s_{2n-3}$) линейные функции от $s_0,\,s_2,\,\ldots,$

s_{2n-2}, то равенства (7) выполняются тождественно относительно этих переменных, и потому справедливы для любых форм (2).

Таким образом установлена

Теорема. *Тождество* (Ф.—Ф.) *при любых фиксированных комплексных* a и b с $a\bar{b}-\bar{a}b\neq 0$ *определяет неособенное линейное преобразование* (3) *и обратное преобразование* (4) *со следующими свойствами: любая эрмитова теплицева форма* (1) *преобразуется с помощью* (3) *в ганкелеву форму* (2). *Обратно, всякая ганкелева форма* (2) *преобразованием* (4) *переводится в теплицеву форму* (1).

6. Бросается в глаза окольный характер доказательства приведенной теоремы (с использованием уже известного результата для неотрицательных форм). Ясно, что прямое (чисто калькулятивное) доказательство упирается в необходимость иметь для коэффициентов индефинитных теплицевых и ганкелевых форм некоторые представления, аналогичные «моментным представлениям» в случае позитивных форм. Оказывается, что такие представления существуют и из них действительно получается прямое (но отнюдь не более простое) доказательство той же теоремы.

Рассмотрим снова произвольную эрмитову форму

$$\sum_{p,\,q=0}^{n-1} c_{p-q}x_p\bar{x}_q.$$

Конечная последовательность $c_0=\bar{c}_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, как показано в [7] и [8], всегда может быть продолжена до бесконечной последовательности $\{c_p\}_0^\infty$ *конечного ранга*. Последнее означает, что все эрмитовы формы $\sum\limits_{p,\,q=0}^{m-1} c_{p-q}x_p\bar{x}_q$ при достаточно больших m имеют один и тот же ранг ρ (разумеется, не меньший ранга формы (1). Но тогда (см. [7, теорема 5. 7])

$$c_p=\sum_{j=1}^{\nu} Q_j(ip)\,\alpha_j^p \quad (p=0,\ \pm1,\pm2,\ \ldots), \tag{8}$$

где 1) $Q_j(\lambda)$ $(j=1, 2, \ldots, \nu)$ — некоторые многочлены, степени которых m_j-1 $(j=1, 2, \ldots, \nu)$ удовлетворяют условию $\sum\limits_{j=1}^{\nu} m_j = \rho$; 2) α_j $(j=1, 2, \ldots, \nu)$ — некоторые различные комплексные числа; 3) каждому индексу j из набора $(1, 2, \ldots, \nu)$ отвечает индекс j^* из того же набора такой, что

$$\alpha_{j^*}=\bar{\alpha}_j^{-1},\quad Q_{j^*}(\lambda)=\overline{Q}_j(\lambda)\quad (j=1, 2, \ldots, \nu)$$

(черта сверху в $\overline{Q}_j$ означает переход к многочлену с комплексно сопряженными коэффициентами).

Проверим теперь, что форма (1), в которой коэффициенты представлены формулами (8), преобразованием (Ф.—Ф.) переводится в ганкелеву форму. Для этой цели прежде всего заметим, что упомянутый в свойстве 3) представления (8) индекс j^* может в отдельных случаях совпадать с индексом j. Это влечет за собой для таких j равенства $\alpha_j = \bar{\alpha}_j^{-1}$ $(|\alpha_j| = 1)$ и $Q_j(\lambda) = \bar{Q}_j(\lambda)$, т. е. $Q_j(\lambda)$ — многочлен с вещественными коэффициентами. Предположим, что сказанное относится к индексам $j = 1, 2, \ldots, \mu$ $(\leqslant \nu)$ и только к ним (при этом не исключено, что таких j может и не быть вовсе).

В представлении формы (1)

$$\sum_{p,\,q=0}^{n-1} c_{p-q} x_p \bar{x}_q = \sum_{j=1}^{\nu} \left(\sum_{p,\,q=0}^{n-1} Q_j(i(p-q))\, \alpha_j^{p-q} x_p \bar{x}_q \right) \tag{9}$$

выделим первые μ слагаемых, т. е. форму

$$\sum_{j=1}^{\mu} \left(\sum_{p,\,q=0}^{n-1} Q_j(i(p-q))\, \alpha_j^{p-q} x_p \bar{x}_q \right) \quad (|\alpha_j| = 1,\ j = 1, 2, \ldots, \mu) \tag{10}$$

Заметим, что здесь

$$Q_j(\lambda) = a_0^{(j)} \lambda^{m_j - 1} + a_1^{(j)} \lambda^{m_j - 2} + \ldots + a_{m_j-2}^{(j)} \lambda + a_{m_j - 1}$$

$(j = 1, 2, \ldots, \mu)$ — многочлен с вещественными коэффициентами, а

$$\alpha_j = e^{i\sigma_j} \quad (\sigma_j = \bar{\sigma}_j,\ j = 1, 2, \ldots, \mu).$$

Поэтому

$$Q_j(i(p-q))\, \alpha_j^{p-q} = Q_j(i(p-q))\, e^{i\sigma_j(p-q)} =$$

$$= \left\{ a_0^{(j)} \frac{d^{m_j-1}}{d\theta^{m_j-1}} + a_1^{(j)} \frac{d^{m_j-2}}{d\theta^{m_j-2}} + \ldots + a_{m_j-2}^{(j)} \frac{d}{d\theta} + a_{m_j-1}^{(j)} \right\} \times$$

$$\times \left[e^{i\theta(p-q)} \right] \Big|_{\theta=\sigma_j} \equiv L_j \left[e^{i\theta(p-q)} \right] \Big|_{\theta=\sigma_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, \mu),$$

где через L_j обозначены стоящие в фигурных скобках линейные дифференциальные операторы с постоянными вещественными коэффициентами. В этих обозначениях

$$\sum_{j=1}^{\mu} \sum_{p,\,q=0}^{n-1} Q_j(i(p-q))\, \alpha_j^{p-q} x_p \bar{x}_q = \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{p,\,q=0}^{n-1} L_j \left[e^{i\theta(p-q)} \right] \Big|_{\theta=\sigma_j} x_p \bar{x}_q =$$

$$\ldots = \sum_{j=1}^{\mu} L_j \left[\sum_{p,\,q=0}^{n-1} e^{i\theta(p-q)} x_p \bar{x}_q \right] \Bigg|_{\theta=\sigma_j}$$

Но в п. 3 было показано, что всякая положительная форма, в том числе стоящая здесь в квадратных скобках, преобразованием (Ф.—Ф.) переводится в ганкелеву форму с вещественными коэффициентами. А так как коэффициенты всех операторов L_j также вещественны $(j = 1, 2, \ldots, \mu)$, то и вся форма (10) преобразуется в ганкелеву форму с вещественными коэффициентами.

Займемся теперь теми слагаемыми в правой части формулы (9), которые отвечают оставшимся индексам $j = \mu+1, \mu+2, \ldots, \mu+\varkappa_1 = \nu$. Из свойства 3) представления (8) следует, что $\varkappa_1 = 2\varkappa\,(\geqslant 0)$ — четное число и, стало быть, результат вычитания формы (10) из (9) может быть (с учетом (3)) записан после очевидного изменения нумерации многочленов Q_j и чисел α_j в виде

$$\sum_{j=1}^{\varkappa}\sum_{p,\,q=0}^{n-1}\left[Q_j(i(p-q))\,\alpha_j^{p-q}+\overline{Q}_j(i(p-q))\,\overline{\alpha}_j^{-(p-q)}\right]x_p\overline{x}_q. \tag{11}$$

Введем, как выше, соответствующие многочленам Q_j и $\overline{Q}_j$ линейные дифференциальные операторы z_j и $\overline{z}_j$, соответственные коэффициенты которых будут теперь комплексно сопряженными числами и положим

$$\alpha_j = r_j e^{i\sigma_j}\ (r_j>0,\ \sigma_j=\overline{\sigma}_j,\ j=1,2,\ldots,\varkappa).$$

Тогда форма (11) перепишется в виде

$$\sum_{j=1}^{\varkappa}\left\{\sum_{p,\,q=0}^{n-1} r_j^{p-q}L_j\left[e^{i\theta(p-q)}\right]\Big|_{\theta=\sigma_j}x_p\overline{x}_q+\sum_{p,\,q=0}^{n-1} r^{-(p-q)}\overline{L}_j\times\right.$$
$$\left.\times\left[e^{i\theta(p-q)}\right]\Big|_{\theta=\sigma_j}x_p\overline{x}_q\right\}. \tag{12}$$

Применим при фиксированном j ($j=1,2,\ldots,\varkappa$) преобразование (Ф.—Ф.) к первой из двух форм, стоящих в (12) в фигурных скобках:

$$\sum_{p,\,q=0}^{n-1} r_j^{p-q}L_j\left[e^{i\theta(p-q)}\right]\Big|_{\theta=\sigma_j}x_p\overline{x}_q = L_j\left[\sum_{q=0}^{n-1}(r_je^{i\theta})^p x_q\sum_{q=0}^{n-1}(r_j^{-1}e^{i\theta})^q x_q\right]\Bigg|_{\theta=\sigma_j}=$$
$$=L_j\left[\sum_{p=0}^{n-1}(a+\overline{a}r_je^{i\theta})^{n-1-p}(b+\overline{b}r_je^{i\theta})^p y_p\sum_{q=0}^{n-1}(\overline{a}+ar_j^{-1}e^{-i\theta})^{n-1-q}\times\right.$$
$$\left.\times(\overline{b}+br_j^{-1}e^{-i\theta})^q\,\overline{y}_q\right]\Bigg|_{\theta=\sigma_j}=L_j\left[r_j^{-(n-1)}e^{-i\theta(n-1)}\sum_{p,\,q=0}^{n-1}(a+\right.$$
$$\left.+\overline{a}r_je^{i\theta})^{2n-2-(p+q)}(b+\overline{b}r_je^{i\theta})^{p+q}y_p\overline{y}_q\right]\Bigg|_{\theta=\sigma_j}\quad (j=1,2,\ldots,\varkappa). \tag{13}$$

Мы видим в итоге, что коэффициенты всех полученных $\varkappa$ форм зависят только от суммы $p+q$ индексов p и q.

Совершенно аналогичное преобразование второй формы внутри фигурных скобок в (12) дает

$$\sum_{p,\,q=0}^{n-1} r_j^{-(p-q)}\overline{L}_j\left[e^{i\theta(p-q)}\right]\Big|_{\theta=\sigma_j}x_p\overline{x}_q=\overline{L}_j\left[r_j^{-(n-1)}e^{i\theta(n-1)}\sum_{p,\,q=0}^{n-1}(\overline{a}+\right.$$
$$\left.+ar_je^{-i\theta})^{2n-2-(p+q)}(\overline{b}+br_je^{-i\theta})^{p+q}y_p\overline{y}_q\right]\Bigg|_{\theta=\sigma_j}\quad (j=1,2,\ldots,\varkappa).$$

Поскольку внутри квадратных скобок в (13) и (14) (т. е. под знаками дифференциальных операторов L_l и $\overline{L}_l$ соответственно) стоят комплексно сопряженные выражения, а соответствующие коэффициенты операторов L_l и $\overline{L}_l$ также комплексно сопряжены, то в сумме (12), представляющей форму (11) после преобразования (Ф.—Ф.), коэффициенты при $y_p\overline{y}_q$ оказываются вещественными числами и притом зависящими только от суммы $p+q$ индексов p и q, т. е. первое утверждение теоремы доказано.

Остается заметить, что и для коэффициентов бесконечных ганкелевых форм конечного ранга (см. [9, гл. XVI, § 10]) можно получить представления, аналогичные (8), а затем, опираясь на теоремы о продолжениях из [10], распространить их на конечные последовательности $s_0, s_1, \ldots, s_{2n-2}$. После этого доказательство теоремы нетрудно завершить с помощью рассуждений, аналогичных только что приведенным.

ЛИТЕРАТУРА

1. У. Гренандер, Г. Сеге. Теплицевы формы и их приложения. М., ИЛ., 1961.
2. Н. И. Ахиезер, М. Г. Крейн. О некоторых вопросах теории моментов. ГОНТИ, Харьков, 1938.
3. E. Fischer. Über das Caratheodory'sche Problem, Potenzreihen mit positiven reelen Feil bettrefend, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, XXXII (1911), 240—256.
4. O. Töplitz. Über die Fourier'sche Entwicklung positiver Funktionen, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, XXXII (1911), 191—192.
5. G. Frobenius. Ableitung eines Satzes' von Caratheodory aus einer Formel von Kronecker, Sitzungsber. d. Königl. Preuss'. Ak. d. Wiss., I Halbband (1912), 16—31.
6. Н. И. Ахиезер. Классическая проблема моментов. Физматгиз, М., 1961.
7. И. С. Иохвидов, М. Г. Крейн. Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой. II. Труды Московск. матем. о-ва, 8, 1959, 413—496.
8. И. С. Иохвидов. О рангах теплицевых матриц. Матем. сб., 76 (118), 1968, 26—38.
9. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. Изд-во «Наука», 1967.
10. И. С. Иохвидов. О ганкелевых матрицах и формах. Матем. сб., 80 (122), 241—252.

Поступила 2 сентября 1970 г.