ОБ ОДНОЙ АППРОКСИМАЦИОННОЙ ЛЕММЕ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯХ

Ю. А. Брудный

1°. Указанная в заголовке лемма трактует о скорости аппроксимации произвольной функции из $L_p(Q)$, где Q — n-мерный куб, с помощью элементов соболевского пространства W_p^k. Для ее формулировки напомним, что k-модулем непрерывности функции $f \in L_p(Q)$ называется величина

$$\omega_k(f;\ \tau) = \sup_{|h| \leqslant \tau} \| \Delta_h^k f \|_{L_p}. \tag{1}$$

Здесь $\Delta_h^k = \Delta_h(\Delta_h^{k-1})$, где $\Delta_h f = f(x+h) - f(x)$, $|h|$ есть эвклидова длина вектора $h \in R^n$ и L_p-норма справа взята по множеству определения функции Δ_h^k.

Лемма. *Существует семейство линейных операторов*

$J_\rho : L_p(Q) \longrightarrow W^k_p(Q)$, $0 < \rho \leqslant \frac{\operatorname{diam} Q}{\kappa}$, *таких, что*

$$\| f - J_\rho f \|_{L_p} k^{-\kappa} \leqslant A\omega(\rho), \tag{2}$$

$$\sup_{|\alpha| = \kappa} \| \partial^\alpha J_\rho f \|_{L_p} \leqslant A\rho^{-\kappa}\omega(\rho).$$

Здесь $\omega(\rho)$ есть κ-модуль непрерывности функции f и $A = A(\kappa, n)$. (1)*

Доказательство этой леммы будет проведено ниже, в 2°, а в последующих пунктах будут указаны приложения этой леммы. Для случая функций одной переменной все результаты этой статьи, исключая теоремы пункта 4°, получены в [1].

2°. Приступим к доказательству леммы. Без потери общности можно считать, что $Q = [0,1]^n$. Воспользуемся теперь следующим фактом, доказанным в [2].

Существует семейство операторов $S_\rho : L_p(0,1) \longrightarrow W_p^k(0,1)$, $0 < \rho \leqslant \frac{1}{3} k$, такое, что

$$\| f - S_\rho f \|_{L_p} \leqslant A\omega_k(\rho), \tag{3}$$

$$\| (S_\rho f)^{(m)} \|_{L_p} \leqslant A\rho^{-m}\omega_m(\rho), \quad 0 \leqslant m \leqslant k,$$

где $\omega_m(\rho)$ есть m-модуль непрерывности функции f из $L_p(0,1)$ и $A = A(k)$.

Оператор S_ρ определяется в [2] формулой (29), а второе из неравенств (3) доказано лишь для $m = k$, однако случай $m < k$ требует тривиальных изменений приведенного там доказательства.

Определим теперь оператор $S_\rho^i : L_p(Q) \longrightarrow L_p(Q)$ как результат применения оператора S_ρ по переменной x_i к функциям $f(x) = f(x_1,\ldots,x_n)$ из $L_p(Q)$. В силу теоремы Фубини оператор $S^{(i)}_\rho$ определен корректно, причем в силу (3) имеем

$$\| f - S^{(i)}_\rho f \|_{L_p} \leqslant A\omega^{(i)}_k(\rho),$$

$$\| \partial_i^m (S^{(i)}_\rho f) \|_{L_p} \leqslant A\rho^{-m}\omega^{(i)}_m(\rho), \quad 0 \leqslant m \leqslant k. \tag{4}$$

Здесь A то же, что и в (3), и $\omega^{(i)}_m$ есть m-модуль непрерывности функции $f \in L_p(Q)$ по переменной x_i**.

---

* Как обычно, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ целочисленный вектор, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$, где $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

** Он определяется той же формулой (1) (при κ равном m), в которой, однако, sup взят лишь по h, $|h| \leqslant \tau$, коллинеарным вектору l_i; $l_1 = (1,0,\ldots,0), \ldots$, $l_n = (0,\ldots,0,1)$ — стандартный базис в R^n.

Положим $\sigma_\rho = S^{(1)}_\rho \dots S^{(n)}_\rho$ и пусть Δ^α_h есть смешанная разность порядка α, т. е.

$$\Delta^\alpha_h = \Delta^{\alpha_1}_{h_1 l_1} \dots \Delta^{\alpha_n}_{h_n l_n}.$$

Так как операторы $S^{(i)}_\rho$, $1 \leqslant i \leqslant n$ коммутируют друг с другом и с операторами ∂_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, то, последовательно применяя второе неравенство (4), получим для $|\alpha| \leqslant \kappa$

$$\| \partial^\alpha \sigma_\rho f \|_{L_p(Q)} \leqslant A^n \rho^{-|\alpha|} \sup \| \Delta^\alpha_h f \|_{L_p}, \tag{5}$$

где L_p-норма справа взята по области определения функции $\Delta^\alpha_h f$, верхняя грань взята по всем h, $0 < h_i \leqslant \rho$, $i = 1,2,\dots, n$ и константа A та же, что и в (3).

В работе [1] (см. также [3]) доказано, что для стоящей справа в (5) верхней грани справедливо неравенство

$$\sup \| \Delta^\alpha_h f \|_{L_p} \leqslant B \omega_{|\alpha|}(f; \rho), \tag{6}$$

где $B = B(k, n)$.

Поэтому из (5) и (6) окончательно получаем

$$\sup_{|\alpha| = k} \| \partial^\alpha \sigma_\rho f \| \leqslant A' \rho^{-\kappa} \omega_k(f; \rho). \tag{7}$$

Далее в силу очевидного неравенства

$$\| f - \sigma_\rho f \| \leqslant (\| S_\rho \|_{L_p \to L_p})^n \sum_{i=1}^{n} \| f - S^{(i)}_\rho f \|,$$

получаем из первого неравенства (4)

$$\| f - \sigma_\rho f \| \leqslant A'' \sum_{i=1}^{n} \omega^{(i)}_\kappa (f; \rho) \leqslant n A'' \omega_k(f; \rho), \tag{8}$$

где $A'' = A''(k, n)$.

Напомним, что параметр ρ меняется от 0 до $\frac{1}{3}k$, поэтому, если положить $J_\rho = \sigma_{\bar\rho}$, где $\bar\rho = \frac{\rho}{3\sqrt{n}}$, $0 < \rho \leqslant \frac{\sqrt{n}}{k} = \frac{\operatorname{diam} Q}{k}$ и из (7) и (8) получим, что для J_ρ выполняются неравенства (2).

Лемма доказана.

Замечание 1. Из приведенного доказательства следует, что лемма справедлива и в более общей ситуации, именно, можно L_p заменить на любую банахову решетку B функций на R^n (по поводу определения банаховой решетки см. [4]); нужно лишь, чтобы норма этой решетки была инвариантна относительно сдвигов. Еще одно очевидное, но полезное обобщение получим, если будем рассматривать векторно-значные функции со значениями в банаховом пространстве.

Замечание 2. Лемма верна также и в случае, когда мы вместо $L_p(Q)$ рассматриваем $L_p(R^n)$ или $L_p(T^n)$, где T^n — n-мерный тор.

Построение оператора S_ρ (см. формулу (29) статьи [2]) в этом случае лишь упрощается.

Замечание 3. Имеется и другой вариант леммы, полезный в некоторых приложениях. Приведем его формулировку.

Существует семейство линейных операторов $J_h : L_p(Q) \to L_p(Q)$, $0 < h_i \leqslant \frac{l_i}{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, n$, таких, что

$$\| f - J_h f \| \leqslant A \sum_{i=1}^{n} \omega_{\alpha_i}^{(i)} (f;\ h_i), \tag{9}$$

$$\left\| \partial_i^{\alpha_i} J_h f \right\| \leqslant A h_i^{-\alpha_i} \omega_{\alpha_i}^{(i)} (f;\ h_i),\ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Здесь

$$Q = \prod_{i=1}^{n} [a_i,\ b_i],\ l_i = b_i - a_i \ \text{ и } A = A(\alpha).$$

Доказательство проводится так: обозначим рассмотренный выше оператор $S_\rho : L_p(0,\ 1) \to W_p^k(0,\ 1)$ через $S_\rho(k)$ и положим

$$\sigma_h = S_{h_1}^{(1)}(\alpha_1) \ \ldots \ S_{h_n}^{(n)}(\alpha_n).$$

Затем полагаем $J_h = \sigma_{\bar{h}}$, где $\bar{h} = \frac{1}{3} h$, тогда $0 < h_i \leqslant \frac{l_i}{\alpha_i}$.

Доказательство неравенств (9) для J_h проводится аналогично.

3°. Приведем общую аппроксимационную теорему.

Теорема 1. *Пусть оператор H, действующий из $L_p(Q)$ в банахово пространство X, обладает следующими свойствами:*

а) $\| H(f+g) \|_X \leqslant c_1 \{ \| Hf \|_X + \| Hg \|_X \}$;

б) $\| Hf \|_X \leqslant c_2 \| f \|_{L_p(Q)}$;

в) если $f \in W_p^k(Q)$, *то* $\| Hf \|_X \leqslant c_3 \sup\limits_{|\alpha|=k} \| \partial^\alpha f \|_{L_p(Q)}$.

Тогда для любой $f \in L_p(Q)$ и заданного ρ, $0 < \rho \leqslant \frac{\operatorname{diam} Q}{k}$, справедливо неравенство

$$\| Hf \|_X \leqslant A c_1 \{ c_2 + c_3 \rho^{-k} \} \omega_k (f;\ \rho). \tag{10}$$

Здесь $A = A(k,\ n)$.

Доказательство. Полагая $f_\rho = J_\rho f$, имеем, используя а) — в),

$$\| Hf \|_X \leqslant c_1 \{ \| H(f - f_\rho) \|_X + \| Hf_\rho \|_X \} \leqslant$$
$$\leqslant c_1 \{ c_2 \| f - f_\rho \|_{L_p(Q)} + c_3 \sup_{|\alpha|=k} \| \partial^\alpha f_\rho \|_{L_p(Q)} \}.$$

Для завершения доказательства осталось применить лемму к оценке слагаемых правой части.

Пример. Положим Hf равным f минус алгебраический многочлен степени s, наименее уклоняющийся от f в $L_p(Q)$. Тривиально проверяется выполнение условия а) (с $c_1 = 1$) и б) (с $c_2 = 1$)

теоремы 1. Для проверки условия в) напомним следующий хорошо известный факт. Если $f \in W^k_p(Q)$ и $s \geqslant k-1$, то для наилучшего приближения $E_s(f)$ функции f алгебраическими многочленами степени s имеем

$$E_s(f) \leqslant B\left(\frac{\operatorname{diam} Q}{s+1}\right)^k \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_{L_p(Q)}.$$

Здесь $B = B(k, n)$.

Из этого неравенства следует выполнение для оператора H условия в) теоремы 1 с $c_3 = B\left(\frac{\operatorname{diam} Q}{s+1}\right)^k$. Применяя теперь к H неравенство (10) теоремы 1 с $\rho = \frac{\operatorname{diam} Q}{s+1} \leqslant \frac{\operatorname{diam} Q}{k}$, получаем следующий результат.

Обобщенная теорема Джексона. *Если $f \in L_p(Q)$, k — заданное натуральное число и $s \geqslant k-1$, то*

$$E_s(f) \leqslant A\,\omega_k\left(f;\ \frac{\operatorname{diam} Q}{s+1}\right), \tag{11}$$

где $A = A(k, n)$.

Замечание 1. Обычная форма теоремы Джексона получится из (11) с помощью легко проверяемого неравенства

$$\omega_k(f;\ \tau) \leqslant A\tau^l \sup_{|\alpha|=l} \omega_{k-l}(\partial^\alpha f;\ \tau), \tag{12}$$

где $A = A(n, l)$.

Замечание 2. При $s = k-1$ неравенство (11) дает n-мерный аналог теоремы Уитни [5]. Отметим, что существенно используемое в доказательстве леммы неравенство (6) получено в [1] (см. также [3]) как следствие указанного выше аналога теоремы Уитни. В настоящее время имеется независимое доказательство неравенства (6), по крайней мере, для случая $f \in L_p(R^n)$ или $f \in L_p(T^n)$ (см. работу М. Ф. Тимана [6]).

Замечание 3. Впервые теорема, подобная теореме 1, получена в частной ситуации пространства $C(0, 1)$ и $k = 2$ в работе Фрейда [7].

4°. Рассмотрим некоторые применения леммы к нахождению промежуточных пространств между $L_p(Q)$ и $W^k_p(Q)$. Для этого приведем (в несколько менее общей форме) определение интерполяционной конструкции Петре (см., например, [8]).

Пусть B_0, B_1 — два банаховых пространства, образующие интерполяционную пару, т. е. непрерывно вложенные в некоторое топологическое векторное пространство V. Для каждого элемента $x \in B_0 + B_1$ определим «функцию Петре»

$$p(x;\ \tau) = \inf\{\|x_0\|_{B_0} + \tau\|x_1\|_{B_1}\}, \tag{13}$$

где inf берется по всем x_0, x_1 таким, что $x_0 \in B_0$, $x_1 \in B_1$ и $x_0 + x_1 = x$.

С помощью (13) определим семейство «промежуточных» пространств

$$[B_0, B_1]_\varphi = \left\{ x \in B_0 + B_1 : \sup_{\tau>0} \frac{p(x; \tau)}{\varphi(\tau)} < +\infty \right\}. \qquad (14)$$

В качестве нормы в этом пространстве возьмем sup, стоящий в предикате (14)*. Тривиальным следствием определения является

Теорема интерполяции. *Если линейный оператор T действует непрерывно из B_i в C_i и имеет норму M_i, $i=0, 1$, то он действует непрерывно из $[B_0, B_1]_\varphi$ в $[C_0, C_1]_\varphi$ и его норма не превышает* $\sup(M_0, M_1)$.

Замечание 1. В случае $\varphi(\tau) = \tau^\lambda$, $0 < \lambda < 1$ норма не превышает $M_0^{1-\lambda} M_1^\lambda$ (см. [8]).

Пусть теперь $P : L_p(Q) \to P_{k-1}$ — линейный проектор на пространство многочленов (от n переменных) степени $k-1$ и пусть $\tilde{L}_p(Q) = P^{-1}(0)$ дополнительное к P_{k-1} подпространство $L_p(Q)$. Обозначим далее через $\tilde{W}_p^k(Q)$ пересечение $\tilde{L}_p(Q)$ с $W_p^k(Q)$; в качестве нормы в пространстве возьмем величину $\sup\limits_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_{L_p(Q)}$. То, что приведенная величина эквивалентна норме, индуцированной из $W_p^k(Q)$, следует из хорошо известного факта (см. [9]), что величина $\|Pf\|_{L_p(Q)} + \sup\limits_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_{L_p(Q)}$ эквивалентна исходной норме $W_p^k(Q)$.

Теорема 2. *Функция Петре интерполяционной пары $\tilde{L}_p(Q)$, $\tilde{W}_p^k(Q)$ эквивалентна величине $\omega_k\left(f; \sqrt[k]{\tau}\right)$***.

Доказательство. Пусть для краткости B_0 есть $\tilde{L}_p(Q)$, $\|f\|_0$ есть $\|f\|_{L_p(Q)}$, B_1 есть $\tilde{W}_p^k(Q)$ и $\|f\|_1 = \sup\limits_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|$. Тогда для $\rho = \sqrt[k]{\tau}$ и произвольного $f_1 \in B_1$ имеем

$$\omega_k(f; \rho) \leqslant \omega_k(f - f_1; \rho) + \omega_k(f_1; \rho) \leqslant 2^k \|f - f_1\|_0 + $$
$$+ A(k, n) \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f_1\|_0 \leqslant A(k, n) \{\|f_0\|_0 + \tau \|f_1\|_1\},$$

где $f_0 \in B_0$ определяется из равенства $f_0 + f_1 = f$. Взяв в этом неравенстве inf по всем таким f_0, f_1, получим в силу (13)

$$\omega_k\left(f; \sqrt[k]{\tau}\right) \leqslant A(k, n)\, p(f; \tau).$$

---

* Можно было бы взять и любую другую монотонную функциональную норму.

** То есть имеет место двустороннее неравенство с постоянными, зависящими только от k и n.

Для доказательства обратного неравенства для заданного $f \in B_0$ положим $f_\rho = J_\rho f$ (см. лемму), где $\rho = \sqrt[k]{\tau}$.

Тогда $f_\rho \in B_1$ и в силу леммы

$$p(f;\ \tau) \leqslant \|f - f_\rho\|_0 + \tau \|f_\rho\|_1 \leqslant A(k,\ n)\,\omega_k(f;\ \rho) \times$$

$$\times (1 + \tau\rho^k) = 2A\omega_k\left(f;\ \sqrt[k]{\tau}\right).$$

Теорема доказана.

Замечание 2. В случае пространства $L_p(R^n)$ единственным многочленом, содержащимся в этом пространстве, есть ноль. Поэтому $\omega_k\left(f;\ \sqrt[k]{\tau}\right)$ эквивалентен функции Петре пары $L_p(R^n)$, $W_p^k(R^n)$.

Замечание 3. Используя вариант леммы, приведенный в замечании 3 пункта 2 (см. (9)), можно найти функцию Петре пары $\tilde{L}_p(Q)$, $\tilde{W}_p^\alpha(Q)$. Здесь $W_p^\alpha(Q)$ пространство функций из $L_p(Q)$ с конечной полунормой $\sum_{i=1}^{n} \|\partial_i^{\alpha_i} f\|_{L_p(Q)}$ и $\tilde{L}_p(Q)$ есть дополнение в $L_p(Q)$ пространства многочленов степени $\alpha_i - 1$ по переменной x_i, $i = 1, \ldots, n$.

Теорема 2. *Функция Петре пары* $\tilde{L}_p(Q)$, $\tilde{W}_p^\alpha(Q)$ *эквивалентна величине* $\sum_{i=1}^{n} \omega_{\alpha_i}^{(i)}\left(f;\ \sqrt[\alpha_i]{\tau}\right)$.

Доказательство есть тривиальное повторение приведенного выше с использованием (9) вместо (2).

Теперь использование приведенной выше теоремы интерполяции позволяет с помощью теоремы 2 найти промежуточные пространства между $L_p(Q)$ и $W_p^k(Q)$. В качестве примера приведем

Следствие 1. *Пусть линейный оператор T непрерывно действует в пространствах $L_p(Q)$ и $W_p^k(Q)$ и имеет нормы M_0 и M_1 соответственно; пусть, кроме того, T коммутирует с некоторым проектором $P: L_p(Q) \to P_{k-1}$. Тогда T непрерывно действует в пространстве $H_p^k(\varphi)$ и его норма не превышает $A \sup(M_0,\ M_1)$, где $A = A(k,\ n)$.*

Указанное в формулировке пространство $H_p^k(\varphi)$ состоит из тех $f \in L_p(Q)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_p} + \sup_{\tau > 0} \frac{\omega_k(f;\ \tau)}{\varphi(\tau)}.$$

В частности, при $\varphi(\tau) = \tau^\lambda$, $0 < \lambda < k$ пространство $H_p^k(\varphi)$ изоморфно пространству Никольского H_p^λ (см. [10]), которое, таким образом, является промежуточным (в смысле теории интерполяции) между $L_p(Q)$ и $W_p^k(Q)$.

Замечание 4. Аналогично используя теорему 2, получим, что пространства $H_p^{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}$, $\lambda_i = c\alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$, $0 < c < 1$ являются промежуточными между $L_p(Q)$ и $W_p^{\alpha}(Q)$.

5°. Пусть теперь $N_\varepsilon(W;\ B)$ обозначает минимальную мощность ε-сети множества W, лежащего в банаховом пространстве B, $H_\varepsilon(W;\ B)$ обозначает $\log_2 N_\varepsilon(W;\ B)$. Покажем, что приведенная в пункте 1° лемма позволяет получить оценку ε-энтропии функциональных компактов, заданных скоростью убывания k-модуля непрерывности. Нам понадобятся следующие предложения.

Предложение 1. *Пусть* $W_{M,N}^k$ *обозначает компакт.*

$$\{f \in L_p(Q) : \|f\|_{L_p} \leqslant N, \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_{L_p} \leqslant M\}.$$

Тогда

$$H_\varepsilon(W_{M,N}^k;\ L_p) \leqslant A\left(\frac{M}{\varepsilon}\right)^{n/k},$$

где $A = A(k,\ n,\ N)$.

Доказательство легко получается методами работы [11].

Предложение 2. *Пусть* W_ρ; $0 < \rho \leqslant \rho_0$, *семейство компактов из банахова пространства* B *и пусть для заданного компакта* W *имеем* $\sup_{f\in W} \inf_{g\in W_\rho} \|f - g\| \leqslant \varphi(\rho)$, *где* φ *монотонно убывает к нулю вместе с* ρ.

Тогда

$$N_{2\varepsilon}(W;\ B) \leqslant N_\varepsilon(W_\rho;\ B),$$

где $\rho = \rho(\varepsilon) = \sup\{\tau : \varphi(\tau) \leqslant \varepsilon\}$.

Доказательство. Пусть $\rho = \rho(\varepsilon)$ и g_i, $1 \leqslant i \leqslant N_\varepsilon$ есть ε-сеть компакта W_ρ; тогда множество $\{g_i\}$ образует 2ε-сеть для W. Действительно, для любого $f \in W$ найдется в силу условий предложения 2 такое $g \in W_\rho$, $\rho = \rho(\varepsilon)$, для которого

$$\|f - g\| \leqslant \varphi(\rho) = \varphi(\rho(\varepsilon)) \leqslant \varepsilon.$$

Подбирая элемент g_i, ε-отстоящий от g, получим, что этот элемент 2ε-отстоит от f. Предложение доказано.

Пусть теперь $W(\varphi)$ есть компакт из $L_p(Q)$, состоящий из тех f, для которых

$$\|f\|_{L_p(Q)} \leqslant 1, \quad \omega_k(f;\ \tau) \leqslant \varphi(\tau). \tag{15}$$

Здесь φ задана на $[0,\ +\infty)$ и монотонно убывает к нулю вместе с τ.

Теорема 3. *Имеет место неравенство*

$$H_\varepsilon(W(\varphi);\ L_p) \leqslant B[\varphi^{-1}(c\varepsilon)]^{-n},$$

где $\varphi^{-1}(\tau) = \sup\{\lambda : \varphi(\lambda) \leqslant \tau\}$, $B = B(k,\ n)$ *и* $c = c(k,\ n)$.

Доказательство. Пусть W_ρ обозначает компакт $W^k_{M,N}$ (см. предложение 1) при $M = M(\rho) = A\rho^{-k}\varphi(\rho)$ и $N = 2^k A + 1$. Здесь и ниже $A = A(k, n)$ постоянная из леммы пункта 1°. Покажем, что

$$\sup_{f\in W(\varphi)} \inf_{g\in W_\rho} \|f-g\| \leqslant A\varphi(\rho). \tag{16}$$

Действительно, полагая для $f \in W(\varphi)$, $f_\rho = J_\rho f$, и учитывая (2) и (15), имеем

$$\|f - f_\rho\| \leqslant A\omega_k(f;\ \rho) \leqslant A\varphi(\rho). \tag{17}$$

Далее, для $\|f\| \leqslant 1$ (см. (15))

$$\|f_\rho\| \leqslant \|f\| + A\omega_k(f;\ \rho) \leqslant (2^k A + 1)\|f\| \leqslant N.$$

Наконец, в силу неравенств (2) и (15) имеем

$$\sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f_\rho\| \leqslant A\rho^{-k}\varphi(\rho) = M(\rho).$$

Два последних неравенства показывают, что $f_\rho \in W^k_{M,N}$, тогда неравенство (17) доказывает (16). Теперь предложение 2 дает

$$H_{2\varepsilon}(W(\varphi)) \leqslant H_\varepsilon(W_\rho),$$

где $M = M(\rho(\varepsilon))$ и $\rho(\varepsilon) = \sup\{\tau : A\varphi(\tau) \leqslant \varepsilon\}$.

Далее применяем для оценки правой части предложение 1, получаем

$$H_{2\varepsilon}(W(\varphi)) \leqslant A' \left[\frac{M(\rho(\varepsilon))}{\varepsilon}\right]^{k/n},$$

где $A' = A'(k, n)$. Но $\rho(\varepsilon) = \varphi^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{A}\right)$ и $M(\rho) = A\rho^{-k}\varphi(\rho)$. Следовательно, из последнего неравенства получаем

$$H_{2\varepsilon}(W(\varphi)) \leqslant A''\left[\varphi^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{A}\right)\right]^{-n},$$

где $A'' = A''(k, n)$. Этим все доказано.

Замечание. Аналогично, используя вариант леммы, приведенный в замечании 3 пункта 2° (см. (9)), можно доказать, что

$$H_\varepsilon[W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n);\ L_p] \leqslant A\left[\prod_{i=1}^{n} \varphi_i^{-1}(c\varepsilon)\right]^{-1}, \tag{18}$$

где A и c зависят только от α и n, а компакт $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ определяется условиями

$$\|f\|_{L_p(Q)} \leqslant 1,\ \omega^{(i)}_{\alpha_i}(f;\ \tau) \leqslant \varphi_i(\tau),\ i = 1, \ldots, n.$$

В частности, с помощью (18) можно получить для случая $\varphi_i(\tau) = \tau^{\lambda_i}$, $0 < \lambda_i < \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$ точный порядок ε-энтропии; легко подсчитать, что он равен $\varepsilon^{-\rho}$, где $\rho = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Брудный. Исследования по теории локальных приближений. Автореф. докт. дисс., Днепропетровск, 1965.

2. Ю. А. Брудный. Приближение функций n-переменных квазимногочленами. Изв. АН СССР, серия матем., 34, № 3 (1970), 565—584.

3. Ю. А. Брудный. Многомерный аналог одной теоремы Х. Уитни. Матем. сб., 82 (124), № 2, 1970, 175—191.

4. A. P. Calderon. Intermediate spaces and interpolation; the complex method. Studia Math., 24, 2 (1964), 113—190.

5. H. Whitney. On functions with bounded n-th differences. J. Math. Pures and appl., 9, 36 (1957), 67—95.

6. М. Ф. Тиман. Некоторые тождества для функций многих переменных. ДАН СССР, 178, № 2 (1968), 40—42.

7. G. Freud. Sui procedimenti lineari d'approssimazione. Atti Acad naz Lincei, Rend. Cl. fis. mat. e natur., 26, 5 (1959), 641—643.

8. J. Peetre. On interpolation of Lp-spaces with weight functions. Acta Sci Math. Szeged, v. 28, № 1—2 (1967), 61—70.

9. С. Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во ЛГУ, 1950.

10. С. М. Никольский. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Изд-во «Наука», 1969.

11. G. G. Lorentz. Metric entropy and approximation Bull. Amer. Math. Soc., **72**, 6 (1966), 903—937.

Поступила 18 сентября 1970 г.