(C_λ)-СВОЙСТВО МЕТОДА БОРЕЛЯ СУММИРОВАНИЯ ДВОЙНЫХ РЯДОВ И ТЕОРЕМЫ ТАУБЕРОВА ТИПА

М. Ф. Бурляй

1. Н. А. Давыдовым в работе [1] введено понятие (C)-множества последовательности комплексных чисел S_n, а в работе [2] доказано (C)-свойство метода Бореля суммирования рядов,

с помощью которого им получен ряд теорем тауберова типа. В настоящей работе мы перенесем это (C)-свойство метода Бореля на B_λ-метод суммирования двойных рядов, назвав его (C_λ)-свойством, и докажем ряд теорем тауберова типа для этого метода.

Пусть дан двойной ряд

$$\sum_{m,\ n=0}^{\infty} a_{mn} \tag{1}$$

с комплексными членами a_{mn}. Обозначим через

$$S_{mn} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij}$$

его частные суммы. Предположим, что двойной степенной ряд

$$S(x,\ y) = \sum_{m,\ n=0}^{\infty} S_{mn} \frac{x^m y^n}{m!\ n!}$$

сходится для всех значений $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Ряд (1) называется B_λ-суммируемым к числу S [3], если для данного $\lambda > 1$ имеет место равенство

$$\lim_{(x,\ y)_\lambda \to \infty} e^{-x-y} \sum_{m,\ n=0}^{\infty} S_{mn} \frac{x^m y^n}{m!\ n!} = S.$$

Под символом $(x,\ y)_\lambda \to \infty$ мы понимаем стремление точки $(x,\ y)$ к бесконечности внутри угла, определенного неравенствами $\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{x}{y} \leqslant \lambda$.

Для доказательства основной теоремы нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения. В теории суммирования обыкновенных рядов хорошо известна [4, стр. 251] следующая

Лемма. *Пусть* $x \geqslant 1$ *и*

$$U_m = e^{-x} \frac{x^m}{m!} \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Если $0 < \delta < 1$, то

$$\sum_{0 \leqslant m < [x]-[\delta x]} U_m = O\left(e^{-\gamma x}\right) \tag{2}$$

и

$$\sum_{m > [x]+[\delta x]} U_m = O\left(e^{-\gamma x}\right), \tag{3}$$

где $\gamma = \frac{1}{3}\delta^2$ и $[x]$ — целая часть x.

Обобщим ее на случай, когда

$$U_{mn} = e^{-x-y} \frac{x^m y^n}{m!\ n!} \quad (m,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Лемма 1. Пусть $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$ *и*

$$U_{mn} = e^{-x-y} \frac{x^m y^n}{m!\, n!} \quad (m,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Если $0 < \delta < 1$, *то*

$$\sum_{m,\ n \bar{\in} \Delta} U_{mn} = 0\,(e^{-\gamma x} + e^{-\gamma y}), \tag{4}$$

где $\gamma = \frac{1}{3}\delta^2$ *и* Δ — *замкнутый прямоугольник с вершинами*

$$M_1([x] - [\delta x],\ [y] - [\delta y]),\ M_2([x] - [\delta x],\ [y] + [\delta y]),$$
$$M_3([x] + [\delta x],\ [y] + [\delta y]),\ M_4([x] + [\delta x],\ [y] - [\delta y]).$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$e^{-x-y} \sum_{m,\ n=0}^{\infty} \frac{x^m y^n}{m!\, n!} = 1.$$

Это следует из того, что члены данного ряда положительны и повторный ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} e^{-x} \frac{x^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-y} \frac{y^n}{n!} = 1$$

сходится [5, стр. 337].

Представим сумму $\sum\limits_{m,\ n \bar{\in} \Delta} U_{mn}$ в виде следующих четырех сумм:

$$\sum_{m,\ n \bar{\in} \Delta} U_{mn} = \Bigg(\sum_{0 \leqslant m < [x]-[\delta x]} \sum_{n=0}^{\infty} + \sum_{m > [x]+[\delta x]} \sum_{n=0}^{\infty} +$$
$$+ \sum_{m=[x]-[\delta x]}^{[x]+[\delta x]} \sum_{n < [y]-[\delta y]} + \sum_{m=[x]-[\delta x]}^{[x]+[\delta x]} \sum_{n > [y]+[\delta y]} \Bigg) e^{-x-y} \frac{x^m y^n}{m!\, n!} =$$
$$= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4.$$

Оценим каждую из этих сумм. В силу (2) и (3) получаем

$$\sigma_1 = \sum_{0 \leqslant m < [x]-[\delta x]} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x-y} \frac{x^m y^n}{m!\, n!} = \sum_{0 \leqslant m < [x]-[\delta x]} e^{-x} \frac{x^m}{m!} = O\,(e^{-\gamma x}), \tag{5}$$

$$\sigma_2 = \sum_{m > [x]+[\delta x]} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x-y} \frac{x^m y^n}{m!\, n!} = \sum_{m > [x]+[\delta x]} e^{-x} \frac{x^m}{m!} = O\,(e^{-\gamma x}), \tag{6}$$

где $\gamma = \frac{1}{3}\delta^2$. Для оценки сумм σ_3 и σ_4 рассмотрим соответственно суммы σ_3' и σ_4', где

$$\sigma_3' = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n < [y]-[\delta y]} U_{mn},\quad \sigma_4' = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n > [y]+[\delta y]} U_{mn}.$$

Пользуясь оценками (2) и (3), находим

$$\sigma_3 < \sigma_3' = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n<[y]-[\delta y]} U_{mn} = O(e^{-\gamma y}), \tag{7}$$

$$\sigma_4 < \sigma_4' = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n>[y]+[\delta y]} U_{mn} = O(e^{-\gamma y}), \tag{8}$$

где $\gamma = \frac{1}{3}\delta^2$.

Окончательно получаем

$$\sum_{m,\ n \bar{\in} \Delta} U_{mn} = O(e^{-\gamma x} + e^{-\gamma y}),$$

где $\gamma = \frac{1}{3}\delta^2$, и лемма доказана.

Докажем теперь основную теорему, которая выражает (C_λ)-свойство метода Бореля суммирования двойных рядов. Обозначим через G замкнутое выпуклое множество в комплексной плоскости, отличное от всей комплексной плоскости, и через G_k — последовательность замкнутых выпуклых множеств в комплексной плоскости, стягивающихся к бесконечно удаленной точке. Мы говорим, что замкнутые выпуклые множества G_k $(k = 1, 2, \ldots)$ стягиваются к бесконечно удаленной точке, если расстояние точки $z = 0$ до множества G_k стремится к бесконечности при $k \to \infty$.

Теорема 1. I. *Пусть даны числа* μ *и* λ, *причем* $1 < \mu < \lambda$. *Тогда существует такое число* $\delta(\mu, \lambda) > 0$, *что если:*

1) $S_{mn} \in G$ *для* $(m, n) \in \Delta_k \{m_k, m_k'; n_k, n_k'\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, где *прямоугольники* Δ_k *полностью лежат внутри угла* $\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \lambda$, *причем*

$$\frac{m_k'}{m_k} \geqslant \mu > 1, \quad \frac{n_k'}{n_k} \geqslant \mu > 1 \quad (k = 1, 2, \ldots), \quad m_k, n_k \to \infty \quad (k \to \infty);$$

2) $|S_{mn}| \leqslant C(\delta)(1 + \delta)^{m+n}$;

3) *последовательность* S_{mn} *суммируется* B_λ-*методом к числу* S, то $S \in G$.

II. Пусть даны числа μ и λ, причем $1 < \mu < \lambda$. *Тогда существует такое число* $\delta(\mu, \lambda) > 0$, *что если:*

1′) $S_{mn} \in G_k$ *для* $(m, n) \in \Delta_k \{m_k, m_k'; n_k, n_k'\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, *где прямоугольники* Δ_k *полностью лежат внутри угла* $\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \lambda$, *причем*

$$\frac{m_k'}{m_k} \geqslant \mu > 1, \quad \frac{n_k'}{n_k} \geqslant \mu > 1 \quad (k = 1, 2, \ldots), \quad m_k, n_k \to \infty \quad (k \to \infty);$$

2′) $|S_{mn}| \leqslant C(\delta)(1 + \delta)^{m+n}$, то

$$\varlimsup_{(x,\ y)_\lambda\to\infty} |B(x,\ y)| = \infty,$$

где

$$B(x,\ y) = e^{-x-y} \sum_{m,\ n=0}^{\infty} S_{mn} \frac{x^m y^n}{m!\ n!}.$$

Доказательство. Пусть даны числа μ и λ, $1<\mu<\lambda$. Выберем число γ таким, чтобы

$$1-\gamma > \frac{1}{\sqrt{\mu}},\ 1+\gamma < \sqrt{\mu}. \tag{9}$$

Выбрав число γ, число $\delta \geqslant 0$ подчиним условиям

$$0 \leqslant \delta < \gamma,\ \delta(1+\lambda) - \frac{(\gamma \pm \delta)^2}{3(1+\delta)} < 0,\ (1+\lambda)\ln(1+\delta) - \frac{\gamma^2}{3} < 0. \tag{10}$$

Функцию $e^{(1+\delta)(x+y)}$ представим в виде

$$e^{(1+\delta)(x+y)} = e^{x+y}\Bigg(\sum_{m<(1-\gamma)x}\ \sum_{n=0}^{\infty} + \sum_{m>(1+\gamma)x}\ \sum_{n=0}^{\infty} +$$

$$+ \sum_{(1-\gamma)x \leqslant m \leqslant (1+\gamma)x}\ \sum_{n<(1-\gamma)y} + \sum_{(1-\gamma)x \leqslant m \leqslant (1+\gamma)x}\ \sum_{n>(1+\gamma)y} +$$

$$+ \sum_{(1-\gamma)x \leqslant m \leqslant (1+\gamma)x}\ \sum_{(1-\gamma)y \leqslant n \leqslant (1+\gamma)y}\Bigg) e^{-x-y} \frac{(1+\delta)^{m+n} x^m y^n}{m!\ n!} =$$

$$= e^{-x-y}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5),$$

где

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 = e^{-x-y} \sum_{m,\ n\bar{\in}\Delta'} \frac{(1+\delta)^{m+n} x^m y^n}{m!\ n!},$$

а

$$\sigma_5 = e^{-x-y} \sum_{m,\ n\in\Delta'} \frac{(1+\delta)^{m+n} x^m y^n}{m!\ n!},$$

где Δ' — прямоугольник с вершинами $M_1'[(1-\gamma)x,\ (1-\gamma)y]$, $M_2'[(1-\gamma)x,\ (1+\gamma)y]$, $M_3'[(1+\gamma)x,\ (1+\gamma)y]$, $M_4'[(1+\gamma)x,\ (1-\gamma)y]$.

Обозначим

$$e^{-x-y} \sum_{m,\ n\bar{\in}\Delta'} \frac{(1+\delta)^{m+n} x^m y^n}{m!\ n!}$$

через $P(x,\ y,\ \gamma,\ \delta)$, а σ_5 через $Q(x,\ y,\ \gamma,\ \delta)$.

Положив для сумм σ_1 и σ_3

$$u=(1+\delta)x,\ v=(1+\delta)y,\ \eta_1=\frac{\gamma+\delta}{1+\delta}<1,$$

получим

$$(1-\eta_1)(1+\delta)=1-\gamma,$$

откуда

$$(1-\gamma)x=(1-\eta_1)u,\ (1-\gamma)y=(1-\eta_1)v.$$

Тогда, применив оценку (2), получим

$$\sigma_1=\sum_{m<(1-\gamma)x}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-x-y}\frac{(1+\delta)^{m+n}x^m y^n}{m!\,n!}=$$

$$=e^{\delta(x+y)}\sum_{m<(1-\gamma)x}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-x-\delta x}e^{-y-\delta y}\frac{(1+\delta)^{m+n}x^m y^n}{m!\,n!}=$$

$$=e^{\delta(x+y)}\sum_{m<(1-\gamma)x}e^{-x-\delta x}\frac{(1+\delta)^m x^m}{m!}=e^{\delta(x+y)}\sum_{m<(1-\eta_1)u}e^{-u}\frac{u^m}{m!}=$$

$$=O\left(e^{\delta(x+y)-\frac{1}{3}\eta_1^2 u}\right)=O\left(e^{\delta(x+y)-\frac{(\gamma+\delta)^2}{3(1+\delta)}x}\right),$$

$$\sigma_3=\sum_{(1-\gamma)x\leqslant m\leqslant(1+\gamma)x}\ \sum_{n<(1-\gamma)y}<\sigma_3'=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n<(1-\gamma)y}e^{-x-y}\frac{(1+\delta)^{m+n}x^m y^n}{m!\,n!}=$$

$$=e^{\delta(x+y)}\sum_{m=0}^{\infty}e^{-x-\delta x}\frac{(1+\delta)^m x^m}{m!}\sum_{n<(1-\gamma)y}e^{-y-\delta y}\frac{(1+\delta)^n y^n}{n!}=$$

$$=e^{\delta(x+y)}\sum_{m=0}^{\infty}e^{-x-\delta x}\frac{(1+\delta)^m x^m}{m!}\sum_{n<(1-\eta_1)v}e^{-v}\frac{v^n}{n!}=$$

$$=O\left(e^{\delta(x+y)-\frac{1}{3}\eta_1^2 v}\right)=O\left(e^{\delta(x+y)-\frac{(\gamma+\delta)^2}{3(1+\delta)}y}\right).$$

По условию 3) теоремы $\frac{1}{\lambda}\leqslant\frac{x}{y}\leqslant\lambda$, откуда $y\leqslant\lambda x$, $x\leqslant\lambda y$, поэтому в силу (10) получим

$$e^{\delta(x+y)-\frac{(\gamma+\delta)^2}{3(1+\delta)}x}\leqslant e^{\left[\delta(1+\lambda)-\frac{(\gamma+\delta)^2}{3(1+\delta)}\right]x}\to 0\ \ (x\to+\infty),$$

$$e^{\delta(x+y)-\frac{(\gamma+\delta)^2}{3(1+\delta)}y}\leqslant e^{\left[\delta(1+\lambda)-\frac{(\gamma+\delta)^2}{3(1+\delta)}\right]y}\to 0\ \ (y\to+\infty).$$

Следовательно, $\sigma_1\to 0$ и $\sigma_3\to 0$ при $(x,\ y)_\lambda\to\infty$. Таким же образом, положив для сумм σ_2 и σ_4 $u=(1+\delta)x$, $v=(1+\delta)y$ $\eta_2=\frac{\gamma-\delta}{1+\delta}<1$, получим $(1+\delta)(1+\eta_2)=1+\gamma$, откуда $(1+\gamma)x=$ $=(1+\eta_2)u$, $(1+\gamma)y=(1+\eta_2)v$. Применяя оценку (3) и сделав преобразования, аналогичные преобразованиям, проведенным при оценке сумм σ_1 и σ_3, легко показать, что

$$\sigma_2 = O\left(e^{\delta(x+y)-\frac{(\gamma-\delta)^2}{3(1+\delta)}x}\right), \quad \sigma_4 = O\left(e^{\delta(x+y)-\frac{(\gamma-\delta)^2}{3(1+\delta)}y}\right).$$

Точно так же, как и для сумм σ_1 и σ_3, доказывается, что $\sigma_2 \to 0$ и $\sigma_4 \to 0$ при $(x, y)_\lambda \to \infty$. Таким образом,

$$\lim_{(x,\ y)_\lambda \to \infty} P(x, y, \gamma, \delta) = 0, \tag{11}$$

если γ и δ удовлетворяют условиям (9) и (10). Равенство (11) верно и при $\delta = 0$. Так как $P(x, y, \gamma, 0) + Q(x, y, \gamma, 0) = 1$, то

$$\lim_{(x,\ y)_\lambda \to \infty} Q(x, y, \gamma, 0) = 1. \tag{12}$$

Зафиксируем теперь $\gamma > 0$ и $\delta > 0$, удовлетворяющие условиям (9) и (10).

Положим

$$x_k = \sqrt{m_k m'_k}, \quad y_k = \sqrt{n_k n'_k}. \tag{13}$$

Заметим, что в силу условия 1) нашей теоремы x_k и y_k удовлетворяют условию $\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{x_k}{y_k} \leqslant \lambda$. Действительно,

$$\frac{x_k}{y_k} = \sqrt{\frac{m_k}{n_k} \cdot \frac{m'_k}{n'_k}} \leqslant \sqrt{\lambda\lambda} = \lambda, \quad \frac{x_k}{y_k} = \sqrt{\frac{m_k}{n_k} \cdot \frac{m'_k}{n'_k}} \geqslant \sqrt{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda}.$$

Представим $B(x_k, y_k)$ в виде следующей суммы:

$$B(x_k, y_k) = e^{-x_k - y_k} \sum_{m,\ n=0}^{\infty} S_{mn} \frac{x_k^m y_k^n}{m!\ n!} = e^{-x_k - y_k} \sum_{m,\ n \bar{\in} \Delta_k} S_{mn} \frac{x_k^m y_k^n}{m!\ n!} +$$

$$+ e^{-x_k - y_k} \sum_{m,\ n \in \Delta_k} S_{mn} \frac{x_k^m y_k^n}{m!\ n!} = P_k + Q_k,$$

где Δ_k — прямоугольник с вершинами

$$A_1[(1-\gamma)x_k,\ (1-\gamma)y_k],\ A_2[(1-\gamma)x_k,\ (1+\gamma)y_k],$$
$$A_3[(1+\gamma)x_k,\ (1+\gamma)y_k],\ A_4[(1+\gamma)x_k,\ (1-\gamma)y_k].$$

Предположим теперь, что при нашем выборе $\delta > 0$ условие 2) теоремы выполнено, т. е.

$$|S_{mn}| \leqslant C(\delta)(1+\delta)^{m+n}.$$

Тогда

$$|P_k| \leqslant C(\delta) e^{-x_k - y_k} \sum_{m,\ n \bar{\in} \Delta_k} \frac{(1+\delta)^{m+n} x_k^m y_k^n}{m!\ n!} = C(\delta) P(x_k, y_k, \gamma, \delta).$$

Из последнего неравенства и (11) следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} P_k = 0$ и в силу условия 3) теоремы

$$\lim_{k\to\infty} Q_k = \lim_{k\to\infty} e^{-x_k-y_k} \sum_{m,\ n\in\Delta_k} S_{mn} \frac{x_k^m y_k^n}{m!\ n!} = S. \tag{14}$$

Из (9) и (13) находим

$$(1-\gamma)\,x_k > \sqrt{\frac{m_k m_k'}{\mu}} \geqslant m_k,\ (1+\gamma)\,x_k < \sqrt{\mu m_k m_k'} \leqslant m_k',$$

$$(1-\gamma)\,y_k > \sqrt{\frac{n_k n_k'}{\mu}} \geqslant n_k,\ (1+\gamma)\,y_k < \sqrt{\mu n_k n_k'} \leqslant n_k'. \tag{15}$$

Обозначим через ε_k ($\varepsilon_k > 0$) разность

$$\varepsilon_k = 1 - e^{-x_k-y_k} \sum_{m,\ n\in\Delta_k} \frac{x_k^m y_k^n}{m!\ n!} = P(x_k,\ y_k,\ \gamma,\ 0).$$

В силу леммы 1

$$P(x_k,\ y_k,\ \gamma,\ 0) = O\left(e^{-\frac{\gamma^2}{3}x_k} + e^{-\frac{\gamma^2}{3}y_k}\right). \tag{16}$$

Так как

$$\left|S_{m_k n_k}\right| < C(\delta)\,(1+\delta)^{m_k+n_k} = C(\delta)\,e^{(m_k+n_k)\ln(1+\delta)}, \tag{17}$$

то из (16), (17) и условия $\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{m_k}{n_k} \leqslant \lambda$ получаем

$$\left|\varepsilon_k S_{m_k n_k}\right| < C_1(\delta)\,e^{(m_k+n_k)\ln(1+\delta)}\left(e^{-\frac{1}{3}\gamma^2 x_k} + e^{-\frac{1}{3}\gamma^2 y_k}\right) =$$

$$= C_1(\delta)\left(e^{(m_k+n_k)\ln(1+\delta)-\frac{\gamma^2}{3}\sqrt{m_k m_k'}} + e^{(m_k+n_k)\ln(1+\delta)-\frac{\gamma^2}{3}\sqrt{n_k n_k'}}\right) <$$

$$< C_1(\delta)\left(e^{(m_k+n_k)\ln(1+\delta)-\frac{\gamma^2}{3}m_k} + e^{(m_k+n_k)\ln(1+\delta)-\frac{\gamma^2}{3}n_k}\right) \leqslant$$

$$\leqslant C_1(\delta)\left(e^{\left[(1+\lambda)\ln(1+\delta)-\frac{\gamma^2}{3}\right]m_k} + e^{\left[(1+\lambda)\ln(1+\delta)-\frac{\gamma^2}{3}\right]n_k}\right).$$

Отсюда и из (10) следует

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k S_{m_k n_k} = 0. \tag{18}$$

Точка $Z_k = Q_k + \varepsilon_k S_{m_k n_k}$ для $k = 1,\ 2,\ \ldots$ принадлежит замкнутому выпуклому множеству G. Это следует из (15), условия 1) теоремы и известного факта [6, стр. 115, задачи 30]. В силу (14) и (18)

$$\lim_{k\to\infty} z_k = \lim_{k\to\infty} Q_k = S,$$

поэтому $S \in G$. Первая часть теоремы доказана. Докажем теперь вторую часть. Пусть выполнены условия 1') и 2') теоремы. Как и при доказательстве первой части теоремы, получим

$$B(x_k, y_k) = e^{-x_k-y_k}\left(\sum_{m,\, n\bar{\in}\Delta_k} + \sum_{m,\, n\in\Delta_k}\right)S_{mn}\frac{x_k^m y_k^n}{m!\, n!} = P_k + Q_k,$$

где

$$x_k = \sqrt{m_k m_k'},\quad y_k = \sqrt{n_k n_k'},\quad \lim_{k\to\infty} P_k = 0.$$

Точка

$$Z_k' = Q_k + \varepsilon_k S_{m_k n_k},\quad \varepsilon_k = 1 - e^{-x_k-y_k}\sum_{m,\, n\in\Delta_k}\frac{x_k^m y_k^n}{m!\, n!}$$

в силу (15), условия 1') и известного факта [6, стр. 115, задача 30] принадлежит замкнутому выпуклому множеству G_k ($k = 1, 2, \ldots$). Поскольку множества G_k ($k = 1, 2 \ldots$) стягиваются к бесконечно удаленной точке, то $z_k' \to \infty$ ($k \to \infty$). Следовательно,

$$B(x_k, y_k) = Q_k + P_k = Z_k' - \varepsilon_k S_{m_k n_k} + P_k \to \infty \quad (k\to\infty).$$

Вторая часть теоремы доказана.

Пусть G_ε — замкнутое выпуклое множество, содержащее множество G, определенное нами выше, и каждая точка границы которого отстоит от G на расстояние, не большее, чем ε ($\varepsilon > 0$).

Определение 1. *Замкнутое выпуклое множество G в комплексной плоскости, отличное от всей комплексной плоскости, назовем (G_λ)-множеством двойной последовательности комплексных чисел S_{mn}, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\mu(\varepsilon) > 1$ и последовательность замкнутых прямоугольников $\Delta_k\,\{m_k, m_k'; n_k, n_k'\}$, полностью лежащих внутри угла, определенного неравенствами $\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \lambda$, и таких, что $S_{mn} \in G$ для $m_k \leqslant m \leqslant m_k'$, $n_k \leqslant n \leqslant n_k'$, причем $\frac{m_k'}{m_k} \geqslant \mu > 1$, $\frac{n_k'}{n_k} \geqslant \mu > 1$ ($k = 1, 2, \ldots$), $m_k, n_k \to \infty$ ($k \to \infty$).*

Замечание. При условии $\mu < \lambda$ прямоугольники Δ_k, полностью лежащие внутри угла, определенного неравенствами $\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \lambda$, и удовлетворяющие условию $\frac{m_k'}{m_k} \geqslant \mu > 1$, $\frac{n_k'}{n_k} \geqslant \mu > 1$, всегда существуют.

Если (C_λ)-множеством последовательности S_{mn} является точка, то эту точку назовем (C_λ)-точкой этой последовательности.

Определение 2. *Бесконечно удаленную точку комплексной плоскости будем называть* (C_λ)*-точкой двойной последовательности комплексных чисел* S_{mn}, *если найдутся число* $\mu > 1$, *последовательность замкнутых прямоугольников* $\Delta_k\{m_k, m_k'; n_k, n_k'\}$, *полностью лежащих внутри угла, определенного неравенствами* $\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \lambda$, *а также последовательность замкнутых выпуклых множеств* G_k, *стягивающих к бесконечно удаленной точке такие, что* $S_{mn} \in G_k$ *для* $m, n \in \Delta_k$, *причем* $\frac{m_k'}{m_k} \geqslant \mu > 1$, $\frac{n_k'}{n_k} \geqslant \mu > 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$, m_k, $n_k \to \infty$ $(k \to \infty)$.

Теорема 2. *Если:*

1) *ряд (1) суммируется* B_λ*-методом к числу* S;

2) $\overline{\lim\limits_{m+n\to\infty}} \sqrt[m+n]{|a_{mn}|} \leqslant 1$;

3) *замкнутое выпуклое множество* G *является* (C_λ)*-множеством последовательности* $S_{mn} = \sum\limits_{i,\, j=0}^{m,\, n} a_{ij}$, *то* $S \in G$.

Если $\overline{\lim\limits_{m+n\to\infty}} \sqrt[m+n]{|a_{mn}|} \leqslant 1$ *и бесконечно удаленная точка является* (C_λ)*-точкой последовательности,*

$$S_{mn} = \sum_{i,\, j=0}^{m,\, n} a_{ij}, \text{ то } \overline{\lim_{(x,\, y)_\lambda \to \infty}} \left| e^{-x-y} \sum_{m,\, n=0}^{\infty} S_{mn} \frac{x^m y^n}{m!\, n!} \right| = \infty.$$

Доказательство. Пусть множество G является (C_λ)-множеством последовательности S_{mn}. Тогда для $\varepsilon > 0$ найдутся число $\mu(\varepsilon) > 1$ и такая последовательность замкнутых прямоугольников $\Delta_k\{m_k, m_k'; n_k, n_k'\}$, полностью лежащих внутри угла, определенного неравенствами $\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \lambda$, и таких, что $S_{mn} \in G_\varepsilon$ для m, $n \in \Delta_k$, причем $\frac{m_k'}{m_k} \geqslant \mu > 1$, $\frac{n_k'}{n_k} \geqslant \mu > 1$ $(k = 1, 2 \ldots)$, m_k, $n_k \to \infty$ $(k \to \infty)$.

Из условия 2) теоремы следует, что для любого $\delta > 0$ существует такое число N, что $|a_{mn}| < (1+\delta)^{m+n}$ при $m + n > N$. Членов a_{mn}, для которых $m + n \leqslant N$ конечное число, поэтому за счет выбора постоянной C $(C > 1)$ получим $|a_{mn}| \leqslant C(1+\delta)^{m+n}$, $m + n \leqslant N$, где C зависит от δ и не зависит от m и n. Следовательно, для любых m и n имеет место неравенство

$$|a_{mn}| \leqslant C(\delta)(1+\delta)^{m+n}.$$

Тогда

$$|S_{mn}| \leqslant \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} |a_{ij}| \leqslant C(\delta) \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} (1+\delta)^{i+j} =$$

$$\ldots C(\delta)\sum_{i=0}^{m}(1+\delta)^i\sum_{j=0}^{n}(1+\delta)^j = C(\delta)\frac{(1+\delta)^{m+1}-1}{\delta}\cdot\frac{(1+\delta)^{n+1}-1}{\delta} <$$
$$< \frac{C(\delta)}{\delta^2}(1+\delta)^{m+n+2} < C_1(\delta)(1+\delta)^{m+n}$$

и условие 2) теоремы 1 выполнено. По теореме 1 получим, что $S \in G_\varepsilon$. Так как G — замкнутое множество, а ε может быть как угодно малым, то $S \in G$. Пусть теперь бесконечно удаленная точка является (C_λ)-точкой последовательности S_{mn}. Тогда найдутся число $\mu > 1$, последовательность замкнутых прямоугольников $\Delta_k\{m_k, m_k', n_k, n_k'\}$, полностью лежащих внутри угла, определенного неравенствами $\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \lambda$, а также последовательность замкнутых выпуклых множеств G_k, стягивающихся к бесконечно удаленной точке, такие, что $S_{mn} \in G_k$ для $m, n \in \Delta_k$, причем $\frac{m_k'}{m_k} \geqslant \mu > 1$, $\frac{n_k'}{n_k} \geqslant \mu > 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $m_k, n_k \to \infty$ $(k \to \infty)$. В силу неравенства $|S_{mn}| \leqslant C_1(\delta)(1+\delta)^{m+n}$ по теореме 1 следует справедливость второй части теоремы 2.

Следствие. *Если:*

1) *ряд* (1) *суммируется B_λ-методом к числу S;*

2) $\overline{\lim\limits_{m+n\to\infty}}\sqrt[m+n]{|a_{mn}|} \leqslant 1$;

3) *точка A является (C_λ)-точкой последовательности S_{mn} частных сумм ряда (1), то $S = A$.*

Это следствие является частным случаем теоремы 2.

2. Из (C_λ)-свойства метода Бореля суммирования двойных рядов следует целый ряд теорем тауберова типа. Мы отметим только некоторые из них.

Число a, конечное или бесконечное, называется частичным λ-пределом последовательности S_{mn}, если найдется подпоследовательность $S_{m_k n_k} \to a$ при $(m_k n_k)_\lambda \to \infty$ $(k \to \infty)$.

Теорема 3. *Если:*

1) *ряд* (1) *суммируется B_λ-методом к числу S;*

2) $\overline{\lim\limits_{m+n\to\infty}}\sqrt[m+n]{|a_{mn}|} \leqslant 1$;

3) *каждый частичный λ-предел, конечный или бесконечный, последовательности $S_{mn} = \sum\limits_{i=0}^{m}\sum\limits_{j=0}^{n} a_{ij}$ является (C_λ)-точкой этой последовательности, то ряд* (1) *сходится к числу S в ограниченном смысле, т. е.* $\lim\limits_{(m,n)_\lambda\to\infty} S_{mn} = S$.

Теорема 4. *Если:*

1) *ряд* (1) *суммируется B_λ-методом к числу S;*

2) $\overline{\lim\limits_{m+n\to\infty}} \sqrt[m+n]{|a_{mn}|} \leqslant 1$;

3) *каждый частичный λ-предел, конечный или бесконечный, подпоследовательности $S_{m_k n_k} = \sum\limits_{i=0}^{m_k} \sum\limits_{j=0}^{n_k} a_{ij}$ является (C_λ)-точкой последовательности $S_{mn} = \sum\limits_{i=0}^{m} \sum\limits_{j=0}^{n} a_{ij}$, то $S_{m_k n_k} \to S$ при $(m_k, n_k)_\lambda \to \infty$.*

Теоремы 3 и 4 являются следствиями (C_λ)-свойства метода Бореля суммирования двойных рядов. Докажем теорему 3. Теорема 4 доказывается аналогично.

При выполнении условий теоремы 3 по (C_λ)-свойству метода Бореля последовательность S_{mn} не может иметь двух различных конечных частичных λ-пределов, а бесконечно удаленная точка не может быть частичным λ-пределом этой последовательности.

Таким образом, при выполнении условий теоремы 3 последовательность S_{mn} имеет только один конечный частичный λ-предел, т. е. $S_{mn} \to S$ при $(m, n)_\lambda \to \infty$.

Лемма 2. *Если частные суммы S_{mn} ряда (1) удовлетворяют условиям:*

$$\overline{\lim_{k,\, m,\, n\to\infty}} |S_{mn} - S_{mn_k}| = r < \infty, \quad \overline{\lim_{k,\, m,\, n\to\infty}} |S_{mn} - S_{m_k n}| = r < \infty; \tag{19}$$

$$\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{m}{n}, \quad \frac{m}{n_k} \leqslant \lambda, \qquad \frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{m}{n}, \quad \frac{m_k}{n} \leqslant \lambda;$$

$$1 < \frac{n}{n_k} \to 1, \qquad 1 < \frac{m}{m_k} \to 1,$$

или условиям

$$\overline{\lim_{k,\, m,\, n\to\infty}} |S_{mn_k} - S_{mn}| = r < \infty, \quad \overline{\lim_{k,\, m,\, n\to\infty}} |S_{m_k n} - S_{mn}| = r < \infty; \tag{20}$$

$$\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{m}{n}, \quad \frac{m}{n_k} \leqslant \lambda \qquad \frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{m}{n}, \quad \frac{m_k}{n} \leqslant \lambda;$$

$$1 < \frac{n_k}{n} \to 1 \qquad 1 < \frac{m_k}{m} \to 1,$$

или условиям

$$\overline{\lim_{k,\, m,\, n\to\infty}} |S_{mn} - S_{mn_k}| = r < \infty, \quad \overline{\lim_{k,\, m,\, n\to\infty}} |S_{m_k n} - S_{mn}| = r < \infty; \tag{21}$$

$$\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{m}{n}, \quad \frac{m}{n_k} \leqslant \lambda, \qquad \frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{m}{n}, \quad \frac{m_k}{n} \leqslant \lambda;$$

$$1 < \frac{n}{n_k} \to 1, \qquad 1 < \frac{m_k}{m} \to 1,$$

или условиям

$$\overline{\lim_{k,\, m,\, n\to\infty}}\, |S_{mn} - S_{m_k n}| = r < \infty, \quad \overline{\lim_{k,\, m,\, n\to\infty}}\, |S_{mn_k} - S_{mn}| = r < \infty; \tag{22}$$

$$\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{m}{n},\ \frac{m_k}{n} \leqslant \lambda, \qquad \frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{m}{n},\ \frac{m}{n_k} \leqslant \lambda;$$

$$1 < \frac{m}{m_k} \to 1, \qquad 1 < \frac{n_k}{n} \to 1,$$

где $1 < \lambda$ — *заданное число,* n_k *и* m_k — *заданные возрастающие последовательности натуральных чисел. Тогда каждый круг* k_r ($|z - a| \leqslant r$) *радиуса* r *с центром в точке* a, *являющейся конечным частичным* λ-*пределом подпоследовательности* $S_{m_k n_k}$, *является* (C_λ)-*множеством последовательности* S_{mn}. *Если бесконечно удаленная точка является частичным* λ-*пределом подпоследовательности* $S_{m_k n_k}$, *то она является бесконечно удаленной* (C_λ)-*точкой последовательности* S_{mn}.

Доказательство. Из соотношений (19) при $m = m_k$, $n = n_k$ соответственно получим

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, |S_{m_k n} - S_{m_k n_k}| = r' \leqslant r < \infty, \quad \overline{\lim_{k\to\infty}}\, |S_{mn_k} - S_{m_k n_k}| = r' \leqslant r < \infty; \tag{19'}$$

$$\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{m_k}{n},\ \frac{m_k}{n_k} \leqslant \lambda, \qquad \frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{m}{n_k},\ \frac{m_k}{n_k} \leqslant \lambda,$$

$$1 < \frac{n}{n_k} \to 1, \qquad 1 < \frac{m}{m_k} \to 1.$$

Пусть a — конечный частичный λ-предел подпоследовательности $S_{m_k n_k}$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность $S_{p_k q_k}$, $\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{p_k}{q_k} \leqslant \lambda$, сходящуюся к a. Можем считать, что все $S_{p_k q_k} \in K_{\frac{\varepsilon}{4}}\left(|z - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\right)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Рассмотрим следующие два случая:

А. Предположим, что существует подпоследовательность $S_{p_{k_\nu} q_{k_\nu}}$ последовательности $S_{p_k q_k}$ такая, что $\frac{1}{\lambda_1} \leqslant \frac{p_{k_\nu}}{q_{k_\nu}} \leqslant \lambda_1$, где $1 < \lambda_1 < \lambda$. Обозначим через $S_{p_{k_\nu} q'_{k_\nu}}$, $\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{p_{k_\nu}}{q'_{k_\nu}} \leqslant \lambda$ первую после $S_{p_{k_\nu} q_{k_\nu}}$ сумму в строке p_{k_ν}, не принадлежащую кругу $K_{r+\frac{\varepsilon}{2}}\left(|z - a| \leqslant r + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Если такая сумма существует для каждого ν, то

$$\underline{\lim_{\nu\to\infty}}\, \frac{q'_{k_\nu} - 1}{q_{k_\nu}} = \mu_1 > 1. \tag{23}$$

Действительно, пусть (23) не выполняется, тогда найдется подпоследовательность

$$\frac{q'_{k_{\nu_i}}}{q_{k_{\nu_i}}} \to 1 \quad (i \to \infty)$$

и

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} \left| S_{p_{k_{\nu_i}} q'_{k_{\nu_i}}} - S_{p_{k_{\nu_i}} q_{k_{\nu_i}}} \right| \leqslant r, \quad 1 < \frac{q'_{k_{\nu_i}}}{q_{k_{\nu_i}}} \to 1,$$

что противоречит неравенствам

$$\left| S_{p_{k_{\nu_i}} q'_{k_{\nu_i}}} - S_{p_{k_{\nu_i}} q_{k_{\nu_i}}} \right| > r + \frac{\varepsilon}{4} \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

справедливость которых следует из построения последовательностей $S_{p_{k_\nu} q'_{k_\nu}}$ и $S_{p_{k_\nu} q_{k_\nu}}$. Если же для некоторого ν $S_{p_{k_\nu}, j} \in K_{r+\frac{\varepsilon}{2}} \times \times \left(|z - a| \leqslant r + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ для $q_{k_\nu} \leqslant j \leqslant \lambda p_{k_\nu}$, то за $S_{p_{k_\nu} q'_{k_\nu}}$, $\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{p_{k_\nu}}{q'_{k_\nu}} \leqslant \lambda$ возьмем любую частную сумму, для которой $\frac{q'_{k_\nu} - 1}{q_{k_\nu}} \geqslant \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$, где $\lambda_2 = \frac{1}{2}(\lambda + \lambda_1)$. Следовательно, $S_{p_{k_\nu}, j} \in K_{r+\frac{\varepsilon}{2}} \left(|z - a| \leqslant r + \frac{\xi}{2}\right)$ для $q_{k_\nu} \leqslant j \leqslant q'_{k_\nu} - 1$, причем $\frac{q'_{k_\nu} - 1}{q_{k_\nu}} \geqslant \mu'_1 > 1$, где $1 < \mu'_1 \leqslant \min\left\{\mu_1, \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right\}$, $\nu > N_1(\xi)$. Обозначим через $S_{p'_{k_\nu} q_{k_\nu}}$, $\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{p'_{k_\nu}}{q_{k_\nu}} \leqslant \lambda$ первую после $S_{p_{k_\nu} q_{k_\nu}}$ сумму в столбце q_{k_ν}, не принадлежащую кругу $K_{r+\frac{\varepsilon}{2}} \left(|z - a| \leqslant r + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Если такая сумма существует для каждого ν, то, как и выше, можно показать, что $\underline{\lim}_{\nu\to\infty} \frac{p'_{k_\nu} - 1}{p_{k_\nu}} = \mu_2 > 1$. Если же для некоторого ν $S_{i, q_{k_\nu}} \in K_{r+\frac{\varepsilon}{2}} \left(|z - a| \leqslant r + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ для $p_{k_\nu} \leqslant i \leqslant \lambda q_{k_\nu}$, то за $S_{p'_{k_\nu} q_{k_\nu}}$, $\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{p'_{k_\nu}}{q_{k_\nu}} \leqslant \lambda$ возьмем любую частную сумму, для которой $\frac{p'_{k_\nu} - 1}{p_{k_\nu}} \geqslant \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$, где

$\lambda_2 = \frac{1}{2}(\lambda + \lambda_1)$ Таким образом, $S_{i, q_{k_\nu}} \in K_{r+\frac{\varepsilon}{2}}\left(|z-a| \leqslant r + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ для $p_{k_\nu} \leqslant i \leqslant p'_{k_\nu} - 1$, причем $\frac{p'_{k_\nu} - 1}{p_{k_\nu}} \geqslant \mu'_2 > 1$, где $1 < \mu'_2 \leqslant \min \times \times \left\{\mu_2, \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right\}$, $\nu > N_2(\varepsilon)$.

Рассмотрим последовательность прямоугольников

$$\Delta_{k_\nu}\left\{p_{k_\nu}, p'_{k_\nu} - 1; q_{k_\nu}, q'_{k_\nu} - 1\right\},$$

$$\frac{p'_{k_\nu} - 1}{p_{k_\nu}} \geqslant \mu > 1, \quad \frac{q'_{k_\nu} - 1}{q_{k_\nu}} \geqslant \mu > 1, \tag{24}$$

где

$$1 < \mu = \min\left\{\mu'_1, \mu'_2\right\}, \quad \nu > N(\varepsilon) = \max\left\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\right\}.$$

Возможны следующие случаи:

1) существует подпоследовательность прямоугольников $\Delta_{k_{\nu_i}}$ ($i = 1, 2, \ldots$) такая, что для каждой пары индексов $(m, n) \in \Delta_{k_{\nu_i}}$ имеет место

$$S_{mn} \in K_{r+\varepsilon}\left(|z-a| \leqslant r + \varepsilon\right).$$

Тогда из (24) следует, что круг $K_r\left(|z-a| \leqslant r\right)$ является (C_λ)-множеством последовательности S_{mn};

2) для каждого Δ_{k_ν}, $\nu > N(\varepsilon)$ существует точка $(p^*_{k_\nu}, q^*_{k_\nu}) \in \Delta_{k_\nu}$ такая, что

$$S_{p^*_{k_\nu} q^*_{k_\nu}} \overline{\in} K_{r+\varepsilon}\left(|z-a| \leqslant r + \varepsilon\right).$$

Таких точек может быть несколько. Обозначим через $(p^*_{k_\nu}, q^*_{k_\nu})$ ту из них, которая находится на наименьшем расстоянии от точки (p_{k_ν}, q_{k_ν}). Если и этих точек несколько, то через $(p^*_{k_\nu}, q^*_{k_\nu})$ обозначим ту из них, которая находится на наименьшем расстоянии от точек строки p_{k_ν}. Как и при доказательстве соотношения (23), можно показать, что

$$\varliminf_{\nu \to \infty} \frac{p^*_{k_\nu} - 1}{p_{k_\nu}} = \mu^*_1 > 1, \quad \varliminf_{\nu \to \infty} \frac{q^*_{k_\nu} - 1}{q_{k_\nu}} = \mu^*_2 > 1. \tag{25}$$

Следовательно,

$$S_{mn} \in K_{r+\varepsilon}\left(|z-a| \leqslant r + \varepsilon\right)$$

для

$$p_{k_\nu} \leqslant m \leqslant p^*_{k_\nu} - 1, \quad q_{k_\nu} \leqslant n \leqslant q^*_{k_\nu} - 1, \quad \nu > N(\varepsilon).$$

Отсюда и из (25) следует, что круг $K_r(|z-a|\leqslant r)$ является (C_λ)-множеством последовательности S_{mn}.

Б. Если подпоследовательности

$$S_{p_{k_\nu}q_{k_\nu}},\ \frac{1}{\lambda_1}\leqslant\frac{p_{k_\nu}}{q_{k_\nu}}\leqslant\lambda_1,\ (\nu=1,2,\ldots)$$

не существует, то рассмотрим подпоследовательность

$$S_{p_{k_\nu}q_{k_\nu}},\ \frac{1}{\lambda}\leqslant\frac{p_{k_\nu}}{q_{k_\nu}}\leqslant\frac{1}{\lambda_1},\ (\nu=1,2,\ldots)$$

или подпоследовательность

$$S_{p_{k_\nu}q_{k_\nu}},\ \lambda_1\leqslant\frac{p_{k_\nu}}{q_{k_\nu}}\leqslant\lambda,\ (\nu=1,2,\ldots).$$

Существование хотя бы одной из них очевидно. Пусть, например, существует подпоследовательность

$$S_{p_{k_\nu}q_{k_\nu}},\ \lambda_1\leqslant\frac{p_{k_\nu}}{q_{k_\nu}}\leqslant\lambda\ (\nu=1,2,\ldots).$$

Обозначим через $S_{p_{k_\nu}q'_{k_\nu}}$, $1\leqslant\frac{p_{k_\nu}}{q'_{k_\nu}}\leqslant\lambda$ первую после $S_{p_{k_\nu}q_{k_\nu}}$ частную сумму в строке p_{k_ν}, не принадлежащую кругу $K_{r+\frac{\varepsilon}{2}}\left(|z-a|\leqslant r+\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Если такая сумма существует для каждого ν, то как и выше, можно показать, что $\varliminf\limits_{\nu\to\infty}\frac{q'_{k_\nu}-1}{q_{k_\nu}}=\mu_3>1$. Если же для некоторого ν $S_{p_{k_\nu},j}\in K_{r+\frac{\varepsilon}{2}}\left(|z-a|\leqslant r+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ для $q_{k_\nu}\leqslant j\leqslant p_{k_\nu}$, то за $S_{p_{k_\nu}q'_{k_\nu}}$, $1\leqslant\frac{p_{k_\nu}}{q'_{k_\nu}}\leqslant\lambda$, возьмем любую сумму, для которой $\frac{q'_{k_\nu}-1}{q_{k_\nu}}\geqslant\frac{\lambda_1}{\lambda_3}>1$, где $\lambda_3=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\lambda_1}\right)$. Таким образом,

$$S_{p_{k_\nu},j}\in K_{r+\frac{\varepsilon}{2}}\left(|z-a|\leqslant r+\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

для

$$q_{k_\nu}\leqslant j\leqslant q'_{k_\nu}-1,$$

причем

$$\frac{q'_{k_\nu}-1}{q_{k_\nu}} \geqslant \mu'_3 > 1,\ 1 < \mu'_3 \leqslant \min\left\{\mu_3 \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right\},\quad \nu > N_3(\varepsilon).$$

Обозначим через $S_{p^*_{k_\nu}-1,\, q_{k_\nu}}$, $1 \leqslant \frac{p^*_{k_\nu}-1}{q_{k_\nu}} \leqslant \lambda$ первую сумму в столбце q_{k_ν}, которая предшествует сумме $S_{p_{k_\nu}q_{k_\nu}}$ и не принадлежит кругу $K_{r+\frac{\varepsilon}{2}}\left(|z-a| \leqslant r+\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Если такая сумма существует для каждого ν, то, как и при доказательстве (23), можно показать, что $\varliminf\limits_{\nu\to\infty} \frac{p_{k_\nu}}{p^*_{k_\nu}} = \mu_4 > 1$. Если же для некоторого ν $S_{i,\, q_{k_\nu}} \in K_{r+\frac{\varepsilon}{2}}\left(|z-a| \leqslant r+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ для $q_{k_\nu} \leqslant i \leqslant p_{k_\nu}$, то за $S_{p^*_{k_\nu}-1,\, q_{k_\nu}}$ возьмем любую сумму, индексы которой удовлетворяют условию $1 \leqslant \frac{p^*_{k_\nu}-1}{q_{k_\nu}} \leqslant \lambda$ и $\frac{p_{k_\nu}}{p^*_{k_\nu}} \geqslant \frac{\lambda_1}{\lambda_3} > 1$, где $\lambda_3 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\lambda_1}\right)$. Таким образом, $S_{i,\, q_{k_\nu}} \in K_{r+\frac{\varepsilon}{2}} \times \left(|z-a| \leqslant r+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ для $p^*_{k_\nu} \leqslant i \leqslant p_{k_\nu}$, причем $\frac{p_{k_\nu}}{p^*_{k_\nu}} \geqslant \mu'_4 > 1$, где

$$1 < \mu'_4 \leqslant \min\left\{\mu_4,\ \frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right\},\quad \nu > N_4(\xi).$$

Рассматривая последовательность прямоугольников

$$\Delta_{k_\nu}\left\{p^*_{k_\nu},\ p_{k_\nu};\ q_{k_\nu},\ q'_{k_\nu}-1\right\},$$

для которых

$$\frac{p_{k_\nu}}{p^*_{k_\nu}} \geqslant \mu > 1,\quad \frac{q'_{k_\nu}-1}{q_{k_\nu}} \geqslant \mu > 1,$$

где

$$1 < \mu = \min\left\{\mu'_3,\ \mu'_4\right\},\quad \nu > N(\varepsilon) = \max\left\{N_3(\varepsilon),\ N_4(\varepsilon)\right\},$$

заканчиваем доказательство случая Б так же, как и в случае А. Первая часть леммы 2 доказана.

Пусть бесконечно удаленная точка является частичным λ-пределом последовательности $S_{m_kn_k}$. Тогда найдется подпоследовательность $S_{p_kq_k}$, $\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{p_k}{q_k} \leqslant \lambda$ такая, что $S_{p_kq_k} \to \infty \quad (k \to \infty)$,

$|S_{p_k q_k} - S_{p_{k+1} q_{k+1}}| > 9r + 1$. Как и при доказательстве первой части, рассмотрим два случая:

A′. Предположим, что существует подпоследовательность $S_{p_{k_\nu} q_{k_\nu}}$ последовательности $S_{p_k q_k}$ такая, что

$$\frac{1}{\lambda_1} \leqslant \frac{p_{k_\nu}}{q_{k_\nu}} \leqslant \lambda_1, \text{ где } 1 < \lambda_1 < \lambda.$$

Обозначим через $S_{p_{k_\nu} q'_{k_\nu}}$, $\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{p_{k_\nu}}{q'_{k_\nu}} \leqslant \lambda$ первую после $S_{p_{k_\nu} q_{k_\nu}}$ сумму в строке p_{k_ν}, не принадлежащую кругу Q_ν $(|z - S_{p_{k_\nu} q_{k_\nu}}| \leqslant 2r + 1)$. Если такая сумма существует для каждого ν, то

$$\varliminf_{\nu \to \infty} \frac{q'_{k_\nu} - 1}{q_{k_\nu}} = \mu_5 > 1.$$

Если бы это было не так, то нашлась бы подпоследовательность

$$\frac{q'_{k_{\nu_i}}}{q_{k_{\nu_i}}} \to 1 \ (i \to \infty)$$

и

$$\varlimsup_{i \to \infty} \left| S_{p_{k_{\nu_i}} q'_{k_{\nu_i}}} - S_{p_{k_{\nu_i}} q_{k_{\nu_i}}} \right| \leqslant r, \quad 1 < \frac{q'_{k_{\nu_i}}}{q_{k_{\nu_i}}} \to 1,$$

что противоречит неравенствам

$$\left| S_{p_{k_{\nu_i}} q'_{k_{\nu_i}}} - S_{p_{k_{\nu_i}} q_{k_{\nu_i}}} \right| \geqslant 2r + 1 \ (i = 1, 2, \ldots),$$

справедливость которых следует из построения последовательности $S_{p_{k_\nu} q'_{k_\nu}}$. Если для некоторого ν $S_{p_{k_\nu}, j} \in Q_\nu$ $(|z - S_{p_{k_\nu} q_{k_\nu}}| \leqslant 2r + 1)$ для $q_{k_\nu} \leqslant j \leqslant \lambda p_{k_\nu}$, то за $S_{p_{k_\nu} q'_{k_\nu}}$ возьмем любую сумму $S_{p_{k_\nu} q'_{k_\nu}}$, $\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{p_{k_\nu}}{q'_{k_\nu}} \leqslant \lambda$, для которой $\frac{q'_{k_\nu} - 1}{q_{k_\nu}} \geqslant \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$, где $\lambda_2 = \frac{1}{2}(\lambda + \lambda_1)$. Следовательно, $S_{p_{k_\nu}, j} \in Q_\nu$ $\left(\left|z - S_{p_{k_\nu} q_{k_\nu}}\right| \leqslant 2r + 1\right)$ для $q_{k_\nu} \leqslant j \leqslant q'_{k_\nu} - 1$, причем $\frac{q'_{k_\nu} - 1}{q_{k_\nu}} \geqslant \mu'_5 > 1$, $1 < \mu'_5 \leqslant \min\left\{\mu_5, \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right\}$, $\nu > N_5$.

Обозначим теперь через $S_{p'_{k_\nu} q_{k_\nu}}$, $\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{p'_{k_\nu}}{q_{k_\nu}} \leqslant \lambda$ первую сумму после $S_{p_{k_\nu} q_{k_\nu}}$ в столбце q_{k_ν}, не принадлежащую кругу $Q_\nu(|z - S_{p_{k_\nu} q_{k_\nu}}| \leqslant 2r + 1)$. Как и выше, доказывается, что $\varliminf_{\nu \to \infty} \frac{p'_{k_\nu} - 1}{p_{k_\nu}} = \mu_6 > 1$, если сумма $S_{p'_{k_\nu} q_{k_\nu}}$ существует для каждого ν. Если же для некоторого ν

$$S_{i,\, q_{k_\nu}} \in Q_\nu \left(\left| z - S_{p_{k_\nu} q_{k_\nu}} \right| \leqslant 2r + 1 \right) \text{ для } p_{k_\nu} \leqslant i \leqslant \lambda q_{k_\nu},$$

то за $S_{p'_{k_\nu} q_{k_\nu}}$ возьмем любую сумму $S_{p'_{k_\nu} q_{k_\nu}}$, $\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{p'_{k_\nu}}{q_{k_\nu}} \leqslant \lambda$, для которой $\frac{p'_{k_\nu} - 1}{p_{k_\nu}} \geqslant \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$, где $\lambda_2 = \frac{1}{2}(\lambda + \lambda_1)$. Таким образом,

$$S_{i,\, q_{k_\nu}} \in Q_\nu \left(\left| z - S_{p_{k_\nu} q_{k_\nu}} \right| \leqslant 2r + 1 \right) \text{ для } p_{k_\nu} \leqslant i \leqslant p'_{k_\nu} - 1, \tag{21}$$

причем

$$\frac{p'_{k_\nu} - 1}{q_{k_\nu}} \geqslant \mu'_6 > 1, \quad 1 < \mu'_6 \leqslant \min \left\{ \mu_6, \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right\}, \quad \nu > N_6.$$

Заканчивается доказательство случая А′ аналогично случаю А.

Б′. Если подпоследовательности $S_{p_{k_\nu} q_{k_\nu}}$, $\frac{1}{\lambda_1} \leqslant \frac{p_{k_\nu}}{q_{k_\nu}} \leqslant \lambda_1$ не существует, то рассмотрим подпоследовательность $S_{p_{k_\nu} q_{k_\nu}}$, $\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{p_{k_\nu}}{q_{k_\nu}} \leqslant \frac{1}{\lambda_1}$, или подпоследовательность $S_{p_{k_\nu} q_{k_\nu}}$, $\lambda_1 \leqslant \frac{p_{k_\nu}}{q_{k_\nu}} \leqslant \lambda$. Из доказательства случаев Б и А′ становится очевидным доказательство случая Б′ и мы его здесь не приводим.

Следствие 1. *Каждый частичный λ-предел, конечный или бесконечный, подпоследовательности $S_{m_k n_k}$ частных сумм ряда* (1), *где m_k и n_k — заданные возрастающие последовательности натуральных чисел при выполнении одного из условий* (19 — 22) *при $r = 0$, является (C_λ)-точкой последовательности S_{mn}.*

Следствие 2. *Каждый частичный λ-предел, конечный или бесконечный, последовательности частных сумм ряда* (1) *при выполнении условий*

$$\lim_{m,\, n,\, n' \to \infty} (S_{mn'} - S_{mn}) = 0, \quad \lim_{m,\, m',\, n \to \infty} (S_{m'n} - S_{mn}) = 0; \tag{26}$$

$$\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{m}{n}, \ \frac{m}{n'} \leqslant \lambda, \qquad \frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{m}{n}, \ \frac{m'}{n} \leqslant \lambda;$$

$$1 < \frac{n'}{n} \to 1, \qquad 1 < \frac{m'}{m} \to 1$$

является (C_λ)-точкой этой последовательности.

Следствие 2 получаем из следствия 1 при $n_k = k$, $m_k = k$, $n = n'$, $m = m'$.

Теорема 5. *Если*:

1) *ряд* (1) *суммируется* B_λ-*методом к числу* S;

2) $\overline{\lim\limits_{m+n\to\infty}} \sqrt[m+n]{|a_{mn}|} \leqslant 1$;

3) *частные суммы* S_{mn} *ряда* (1) *удовлетворяют условиям* (26), *то ряд* (1) *сходится к числу* S *в ограниченном смысле, т. е.* $\lim\limits_{(m,\, n)_\lambda\to\infty} S_{mn} = S$.

Теорема 6. *Если*:

1) *ряд* (1) *суммируется* B_λ-*методом к числу* S;

2) $\overline{\lim\limits_{m+n\to\infty}} \sqrt[m+n]{|a_{mn}|} \leqslant 1$;

3) *частные суммы ряда* (1) *удовлетворяют одному из условий* (19 — 22) при $r = 0$, то $S_{m_k n_k} \to S$ при $(m_k n_k)_\lambda \to \infty$ $(k \to \infty)$.

Теоремы 5 и 6 следуют из теорем 3, 4 и следствий леммы 2.

В заключение выражаю искреннюю благодарность профессору Н. А. Давыдову за помощь, оказанную при выполнении данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Давыдов. Об одном свойстве методов Чезаро суммирования рядов. «Матем. сб.», 38(80), 1956, 509—524.

2. Н. А. Давыдов. Одно свойство метода Бореля суммирования рядов и теоремы тауберова типа. Сверхсходимость степенных рядов и особые точки аналитической функции. Уч. зап. Калининск. пед. ин-та, т. 26, 1958, 57—82.

3. А. А. Меленцов, Э. Б. Мураев. К теории суммирования двойных рядов методами Бореля. ДАН СССР, т. 130, № 6, 1960, 1193—1195.

4. Г. Харди. Расходящиеся ряды. ИЛ, М., 1951.

5. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2, изд. 7-е. Изд-во «Наука», 1969.

6. Г. Полиа, Г. Сеге. Задачи и теоремы из анализа. Гостехиздат, М.—Л., 1937.

Поступила 20 июля 1970 г.