РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Б. Я. Скачек

Рассмотрим самосопряженный дифференциальный оператор L, определенный в $L_2(0, \infty)$ операцией

$$l(y) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^K \frac{d^K}{dx^K}\left(P_K(x)\left(\frac{d^K y}{dx^K}\right)\right) + p_0(x)\, y. \tag{1}$$

Обозначим через $N(\lambda)$ число собственных значений оператора L, лежащих левее λ.

В предлагаемой статье с помощью вариационных принципов получен главный член асимптотики $N(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$.

Изучению асимптотики $N(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$ для различных эллиптических операторов в $L_2(\Omega)$, где Ω — конечная или бесконечная область в E_n, посвящена большая серия работ (библиографию см., например, в [1]). В этих работах, как правило, рассматривался случай, когда главный член асимптотики $N(\lambda)$ определяется главной частью и свободным членом эллиптического оператора. Исключение составляют работы [2—4], в которых рассматривался случай, когда на асимптотику $N(\lambda)$ коэффициенты $p_i\,(i = 1, \ldots, n-1)$ влияют не в меньшей степени, чем p_0 или p_n.

А. Г. Костюченко [2] первым получил асимптотическую формулу для этого случая. Однако в [2], кроме условий на коэффициенты, налагаются еще условия на корни соответствующего характеристического уравнения степени n.

М. Г. Гасымов [3] получил главный член асимптотики $N(\lambda)$, накладывая ограничения только на коэффициенты операции $l(y)$. В [3] предполагается, что $p_j(x)\ (j = 1, \ldots, n-1)$ удовлетворяют ряду условий, в том числе неравенствам

$$p_j(x) \leqslant C x^{K_j}. \tag{2}$$

Данная статья содержит подробное изложение некоторых результатов, сформулированных в [4]. В работе получена формула для главного члена асимптотики $N(\lambda)$ при некоторых предположениях только относительно коэффициентов оператора L (см. замечание к теореме 1). Ограничения носят иной характер, чем в [3] и в отличие от [3] не требуется выполнения (2).

При выполнении (2) и некоторых других ограничений, наложенных на p_i, из полученной ниже формулы следует, что

$$N(\lambda) \sim \pi^{-1} \lambda^{\frac{1}{2K}} \int\limits_{x^{-2K} p_K \leqslant \lambda} p_K^{-\frac{1}{2K}}(x)\, dx.$$

1. Введем ряд обозначений и определений. Через C_i, C и R будем обозначать постоянные действительные величины, численные значения которых нас не интересуют.

Далее везде относительно коэффициентов операции l будем предполагать, что $p_K(x)$ $(K=0, \ldots, n-1)$ полуограничены снизу и неотрицательны при $x > R$, а $p_n(x) > 0$ на всей полуоси. Будем также требовать, чтобы $p_K(x)$ $(K=0, \ldots, n)$ были монотонно-возрастающими при $x > R$.

Обозначим через $\theta(x, \lambda)$ наибольший положительный корень уравнения

$$\sum_{K=0}^{n} p_K(x)\, t^{2K} = \lambda. \tag{3}$$

Пусть

$$\psi_i(x) = \frac{p_i(x)}{x^{2i}}\, \delta_i, \tag{4}$$

где

$$\delta_i = \frac{[1 \cdot 3 \ldots (2i-1)]^2}{2^{2i}};$$

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i(x).$$

Заметим, что $\theta(x, \lambda)$ определена не при всех x, однако при x, удовлетворяющих неравенству $\psi(x) \leqslant \lambda$, функция $\theta(x, \lambda)$ существует.

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть выполняются условия:*

1. $\int\limits_{\psi \leqslant \lambda} \theta(x, \lambda)\, dx \geqslant C\lambda^S,$ (5)

где S — какое-нибудь положительное число.

2. $\theta(x, \lambda) \leqslant C\lambda^S f(x),$ (6)

где

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x \ln^t x} \quad (t > 1) & \text{при } x > R \\ 1 & \text{при } x \leqslant R. \end{cases}$$

3. $\psi(x) \geqslant C \ln^{\frac{t}{S}} x$ при $x > R$. (7')

Тогда для числа $N(\lambda)$ собственных значений оператора L, лежащих левее λ, при $\lambda \to \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$N(\lambda) = \frac{1 + o(1)}{\pi} \int\limits_{\psi \leqslant \lambda} \theta(x, \lambda)\, dx. \tag{7}$$

Доказательство. Не нарушая общности рассуждений, будем предполагать, что $p_K(x)$ монотонны и неотрицательны на всей полуоси.

Вначале докажем, что $\theta(x, \lambda)$ монотонно-возрастающая функция по λ и монотонно-убывающая по x.

Отметим, что

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(x)\,\theta^{2i}(x, \lambda + \Delta\lambda) - \sum_{i=0}^{n} p_i(x)\,\theta^{2i}(x, \lambda) = \Delta\lambda.$$

В силу неотрицательности $p_i(x)$ отсюда следует, что при $\Delta\lambda > 0$ функция $\theta(x, \lambda)$ не превосходит $\theta(x, \lambda + \Delta\lambda)$. Монотонность функции $\theta(x, \lambda)$ относительно λ доказана.

Далее, в равенстве

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(x + \Delta x)\,\theta^{2i}(x + \Delta x, \lambda) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x)\,\theta^{2i}(x, \lambda),$$

вытекающем из определения $\theta(x, \lambda)$, заменим функции $p_i(x + \Delta x)$ на $p_i(x)$. Получим неравенство, из которого следует, что функция $\theta(x, \lambda)$ — монотонно-убывающая по x.

Пусть φ — решение уравнения

$$\psi(\varphi) = \lambda. \qquad (8)$$

Разобьем интервал $(0, \varphi)$ на p частей точками x_K. Точки x_K $(K = 1, \ldots, p)$ определим по формулам:

$$x_1 = \lambda^{\frac{S}{2}}, \quad x_{K+1} = x_K 3^{\lambda^{\frac{S}{2}(1+A_k)}} \ln^{-2K t^K} \lambda \quad (1 \leqslant K \leqslant p) \qquad (9)$$

$$x_p = \varphi,$$

где

$$A_K = \min\left\{1, \sum_{j=1}^{K-1} \frac{t^j}{2^j}\right\}.$$

Каждый интервал (x_K, x_{K+1}) разделим на n_K частей, координаты концов которых обозначим через $x_l^{(K)}$, а каждый интервал (x_K, x_{K+1}), в свою очередь, разобьем на n_{Kl} отрезков длины d_{Kl} каждый.

Точки $x_l^{(K)}$ определим следующим образом:

$$x_0^{(K)} = x_K, \quad x_{l+1}^{(K)} = 3x_l^{(K)} \quad (0 \leqslant l \leqslant n_K), \qquad (10)$$

$$x_{n_K}^{(K)} = x_{K+1}, \leqslant 3x_{n_{K-1}}^{(K)}.$$

В качестве d_{Kl} возьмем

$$d_{Kl} = x_l^{(K)} \lambda^{-\frac{S}{2}(1-A_K)} \ln^{-K t^K} \lambda, \qquad (11)$$

а координаты концов отрезков, полученных от разбиения с шагом d_{Kl}, обозначим через $x_i^{(K,l)}$ $(i = 0, 1, \ldots, n_{Kl})$, где

$$x_0^{(K,l)} = x_l^{(K)}, \quad x_{n_{Kl}}^{(K,l)} = x_{l+1}^{(K)}.$$

Заметим, что ввиду (9) и (11)

$$n_K = \lambda^{\frac{S}{2}(1+A_K)} \ln^{-2Kt^K} \lambda, \tag{12}$$

а из (10) и (11) следует

$$n_{Kl} \leqslant C\lambda^{\frac{S}{2}(1-A_K)} \ln^{Kt^K} \lambda. \tag{13}$$

Пусть L_{Kl} и L_{Klj} — операторы, определенные соответственно в $\boldsymbol{L}_2\left(x_l^{(K)}, x_{l+1}^{(K)}\right)$ и в $\boldsymbol{L}_2\left(x_j^{(K,l)}, x_{j+1}^{(K,l)}\right)$ операцией l и нулевыми краевыми условиями.

Обозначим через l_{Klj} операцию, получаемую из l при замене $p_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ на $p_i\left(x_j^{(K,l)}\right)$.

Пусть Γ_{Klj} — оператор, определяемый в $\boldsymbol{L}_2\left(x_j^{(K,l)}, x_{j+1}^{(K,l)}\right)$ операцией l_{Klj} и краевыми условиями

$$y^{(2S)}\left(x_j^{(K,l)}\right) = y^{(2S)}\left(x_{j+1}^{(K,l)}\right) = 0 \quad (S = 0, 1, \ldots, n-1),$$

а $m_{Kl}(\lambda)$, $m_{Klj}(\lambda)$, A_{Klj} — число собственных значений, лежащих левее λ, соответственно у операторов L_{Kl}, L_{Klj} и Γ_{Klj}.

Заметим, что

$$m_{Klj}(\lambda) \leqslant A_{Klj}(\lambda) + 4n \tag{14}$$

и что функция

$$y = \sin\theta\left(x_j^{(K,l)}, \lambda\right)\left(x - x_j^{(K,l)}\right)$$

будет собственной для оператора Γ_{Klj}, если $\theta\left(x_j^{(K,l)}, \lambda\right)$ также удовлетворяет равенству

$$\theta\left(x_j^{(K,l)}\lambda\right) = \frac{\pi}{d_{Kl}}\, i \quad (i = 1 \ldots). \tag{15}$$

Так как $\theta(x, \lambda)$ — монотонно-возрастающая функция от λ, то для каждого фиксированного i существует только одно λ, при котором будет выполняться (15). Пусть λ_ξ — наибольшее собственное значение, не превосходящее λ. Заметим, что

$$A_{Klj}(\lambda) = \frac{d_{Kl}}{\pi}\,\theta\left(x_j^{(K,l)}, \lambda_\xi\right). \tag{16}$$

Так как

$$A_{Klj}(\lambda_\xi) = A_{Klj}(\lambda),$$

то из (16) следует, что

$$A_{Klj}(\lambda) \leqslant \frac{d_{Kl}}{\pi}\,\theta\left(x_j^{(K,l)}, \lambda_\xi\right). \tag{17}$$

Как мы отмечали выше, $\theta(x, \lambda)$ — монотонно-убывающая функция от x, поэтому в силу (17)

$$A_{Klj}(\lambda) \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_{x_{j-1}^{(K,\,l)}}^{x_j^{(K,\,l)}} \theta(x, \lambda)\, dx. \tag{18}$$

Пользуясь (18) и (14), получаем

$$m_{Kl}(\lambda) \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_{x_l^{(K)}}^{x_{l+1}^{(K)}} \theta(x, \lambda)\, dx + 4n_{Kl}n + m_{Kl1}(\lambda). \tag{19}$$

Расщепив оператор L в точке $x = \varphi$, получим, что собственные значения оператора, определенного операцией l в $L_2(\varphi, \infty)$, больше λ. Отсюда вследствие вариационных принципов Р. Куранта и (19) следует неравенство

$$N(\lambda) \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\varphi} \theta(x, \lambda)\, dx + 4n \sum_{K=1}^{p} \sum_{l=1}^{n_k} n_{Kl} + \sum_{K=1}^{p} \sum_{l=1}^{n_k} m_{Kl1}(\lambda). \tag{20}$$

Аналогичными рассуждениями получим оценку снизу

$$N(\lambda) \geqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\varphi} \theta(x, \lambda)\, dx - 4n \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{n_K} n_{Kl} - \frac{1}{\pi} \sum_{K=1}^{p} \sum_{l=1}^{n_K} m_{Kl1}(\lambda). \tag{21}$$

Согласно условию 1 теоремы 1,

$$I \geqslant C\lambda^S. \tag{22}$$

Пусть

$$B_{Kl} = \max\left\{ m_{Kl1},\ \int\limits_{x_1^{(K,\,l)}}^{x_2^{(K,\,l)}} \theta(x, \lambda)\, dx \right\}.$$

Так как

$$B_l \leqslant C\theta\left(x_1^{(K,\,l)}, \lambda\right) d_{Kl},$$

то вследствие (5) и (11)

$$B_{Kl} \leqslant C\lambda^{\frac{S}{2}\left(1 - \sum\limits_{i=1}^{K-1} \left(\frac{t}{2}\right)^i\right)} \ln^{-Kt^K}\lambda. \tag{23}$$

Из (11), (12) и (23) следует, что

$$\sum_{K=2}^{p} \sum_{l=1}^{n_K} B_{Kl} \leqslant C_p \lambda^S \ln^{-2}\lambda, \tag{24}$$

$$\sum_{K=2}^{p} \sum_{l=1}^{n_K} n_{Kl} \leqslant C_p \lambda^S \ln^{-2}\lambda. \tag{25}$$

Легко показать, что B_1 и n_1 также не превосходят $C\lambda^S \ln^{-1}\lambda$. Для этого достаточно разбить интервал $(0, x_1)$ на отрезки длиной $\ln^{-1}\lambda$ и провести рассуждения, аналогичные предыдущим.

Далее покажем, что при нашем разбиении $p \leqslant C$. Заметим, что

$$x_p \geqslant C3^{\lambda^{\frac{S}{2}\left[1+\sum\limits_{k=1}^{p-1}\left(\frac{t}{2}\right)^K\right]}\ln^{-pt^p}\lambda}.$$

Однако в силу условия 3 теоремы 1

$$\varphi \leqslant \exp\left\{\lambda^{\frac{S}{t}}\right\}.$$

Поэтому для того, чтобы имело место $x_p \geqslant \varphi$, достаточно выполнение неравенства

$$\frac{1}{2}\left[1+\sum_{K=1}^{p-1}\left(\frac{t}{2}\right)^K\right] > \frac{1}{t}. \tag{26}$$

Легко проверить, что при $t > 1$ можно указать конечное $p = p(t)$, при котором (26) будет выполняться.

В силу того, что $p \leqslant C$, из (20—22), (24), (25) вытекает асимптотическая формула (7). Теорема доказана.

Замечание. Теорема 1 может быть сформулирована в терминах коэффициентов p_K. Довольно просто выглядит формулировка в следующем случае.

Теорема 1′. *Если при каком-нибудь* K

$$p_K(x) \geqslant Cx^\gamma \quad (\gamma > 2nK), \tag{27}$$

то при $\lambda \to \infty$ *справедлива асимптотическая формула* (7).

Наметим доказательство. Условие 1 теоремы 1 выполняется всегда при $S = \frac{1}{2n}$. Пользуясь (3) и (27), получаем неравенство, аналогичное неравенству (5).

Далее применяем схему рассуждений, которая использовалась нами для вывода формулы (7).

Разбиение будем производить N_1 раз $(N_1 \leqslant n+1)$ и при каждом разбиении будем делить на $\lambda^{\frac{1}{2n}} \ln^{-1}\lambda$ отрезков. Первый раз разбиваем интервал $(0, \varphi)$, а затем — отрезки $(0, x_K)$, где x_K — шаг предыдущего разбиения. Так как в рассматриваемом случае $\varphi \leqslant \lambda^{\frac{1}{2}}$, а

$$x_{K-1} = x_K \lambda^{-\frac{1}{2n}} \ln\lambda,$$

то $N_1 \leqslant n+1$.

2. Можно наложить такие ограничения на p_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$, что главный член асимптотики $N(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$ будет опреде-

только одним коэффициентом p_K $(1 \leqslant K \leqslant n)$. Например, место следующие две теоремы.

…емма 2. *Если при каком-нибудь* α *будут выполняться*

$$C_2 \ln^{t_2} x \leqslant p_\alpha x^{-A} \leqslant C_1 \ln^{t_1} x,$$

$$A \geqslant 2\alpha,\quad 2\alpha < t_2 \leqslant t_1;$$

$p_i \leqslant C x^{A\beta}$, *при* $i > \alpha$,

β — *какое-нибудь число, удовлетворяющее неравенству*

$$\beta < \frac{n-i}{n-\alpha};$$

$$p_i \leqslant C p_\alpha^{\frac{i}{\alpha}}, \text{ при } i<\alpha, \tag{27a}$$

…число собственных значений оператора **L**, *лежащих левее* λ, *имеет место асимптотическая формула*

$$N(\lambda) = \frac{1+o(1)}{\pi}\,\lambda^{\frac{1}{2\alpha}} \int\limits_{\psi \leqslant \lambda} \frac{dx}{p_\alpha^{\frac{1}{2\alpha}}}. \tag{28}$$

Доказательство. Положим

$$a = \lambda^{\frac{n-\alpha}{nA}} \ln^{-3}\lambda, \tag{29}$$

$$\theta(x, \lambda) = \begin{cases} \lambda^{\frac{1}{2n}} p_n^{-\frac{1}{2n}} \zeta(x, \lambda) & 0 \leqslant x \leqslant a, \\ \lambda^{\frac{1}{2\alpha}} p_\alpha^{-\frac{1}{2\alpha}} \zeta(x, \lambda) & a \leqslant x \leqslant \varphi, \end{cases} \tag{30}$$

где ζ — решение уравнения (8).

Из (3) следует, что $\zeta \leqslant 1$. Заметим, что ввиду ограничений, наложенных на p_i и p_α, условиями 1 и 2 теоремы, при $x \in (a, \varphi)$ справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \to \infty} p_\alpha^{-\frac{i}{\alpha}} p_i \lambda^{\frac{i-\alpha}{\alpha}} = 0.$$

Подставляя (30) в (3), получим

$$\lim_{\lambda \to \infty} \zeta(x, \lambda) = 1. \tag{31}$$

Далее в силу (29), (30) и (31) при $\lambda \to \infty$

$$\int\limits_0^a \theta dx = o\left(\lambda^{\frac{A+2n-2\alpha}{2nA}} \ln^{-3}\lambda\right), \tag{32}$$

$$\int\limits_a^\varphi \theta dx \geqslant C\lambda^{\gamma} \ln^{-1}\lambda,$$

где

$$\gamma = \frac{2(n-\alpha)+A}{2nA}.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\varphi} \theta dx = (1+o(1)) \int_{\alpha}^{\varphi} \theta dx. \tag{33}$$

В силу (30), (31) и (7) отсюда вытекает асимптотическая формула (28). Теорема доказана.

Формула (28) справедлива и при p_α, удовлетворяющих неравенствам

$$C_1 x^B \ln^{t_2} x \leqslant p_\alpha \leqslant C_2 x^A \ln^{t_1} x \quad (A \geqslant B \geqslant 2\alpha,\ t_1 \geqslant 0,\ t_2 \geqslant 0),$$

если при $i < \alpha$ выполняется (27а), а при $i \geqslant \alpha$

$$p_i \leqslant C x^{\gamma},$$

где

$$\gamma < B\frac{n-i}{n-\alpha} - (A-B)\frac{n}{\alpha}\frac{i-\alpha}{n-\alpha}.$$

Формула (28) в этом случае получается **так же**, как и в теореме 2.

3. **Теорема 3.** *Пусть выполняются условия:*

1. $p_n(x) \geqslant C x^{2n} \ln^S x \quad (S > n,\ x \geqslant 1)$,
2. $p_n(x) \geqslant C [p_i(x)]^{\gamma} \quad (\gamma > 1)$.

Тогда для числа $N(\lambda)$ собственных значений оператора L, лежащих левее λ, при $\lambda \to \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{\frac{1}{2n}}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} p_n^{-\frac{1}{2n}} dx. \tag{34}$$

Теорема 3 доказывается аналогично теореме 2. Из (34) следует асимптотическая формула для λ_K — K-го собственного значения оператора L

$$\lim_{K\to\infty} \frac{\lambda_K}{K^{2n}} = \left(\int_0^{\infty} p_n^{-\frac{1}{2n}} dx\right)^{-2n} \tag{35}$$

Формула (7) имеет место и в случае уравнений вида

$$Ay = \lambda By, \tag{36}$$

где

$$A = \sum_{K=1}^{n} (-1)^K \frac{d^K}{dx^K}\left(p_K \frac{d^K}{dx^K}\right),$$

$$B = \sum_{S=1}^{m} (-1)^S \frac{d^S}{dx^S}\left(p_S \frac{d^S}{dx^S}\right).$$

В этом случае $\theta(x, \lambda)$ — наибольший положительный корень уравнения

$$\sum_{K=1}^{n} p_K(x)\, t^{2K} = \lambda \sum_{S=1}^{m} q_S(x)\, t^{2S}.$$

С помощью формулы (7) в случае уравнения (36) нами получены теоремы, аналогичные теоремам 2, 3. Отличия в доказательствах этих теорем в случаях, когда B — дифференциальный оператор и $B = I$ весьма незначительны.

При выводе формул (7), (28) и (34) мы предполагали, что коэффициенты p_K — монотонно-возрастающие функции. Это требование не является обязательным и может быть заменено более слабыми ограничениями.

Например, если p_K не монотонны, но

$$p_n(x) \leqslant Cx^{\alpha} \quad (\alpha < 2n) \tag{37}$$

и при всех $x > R$

$$p_K(x + a) \geqslant p_K(x),$$

где a какое-нибудь положительное число, то теоремы 1,1' и 2 имеют место.

Если (37) не выполняется, то достаточно, чтобы вместо него при каком-нибудь K ($K = 1, \ldots, n-1$) выполнялось неравенство

$$p_K(x) \geqslant cp_n(x)\, x^{\alpha} \quad (0 < x < \infty),$$

где

$$\alpha < 2(n - K).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Colin Clark. Slam Rev., 9, № 4, October.
2. А. Г. Костюченко. Распределение собственных значений для сингулярных дифференциальных операторов. ДАН СССР, 168, 1, 1966, 21—24.
3. М. Г. Гасымов. О распределении собственных значений самосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов. ДАН СССР, 186, № 4, 1969, 753—756.
4. Н. Я. Скачек. Розподіл власних значень сингулярних диференціальних операторів. ДАН УРСР, сер. А, № 5, 1970, 416—419.

Поступила 9 января 1970 г.