ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ОБЛАСТИ СО СЛОЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ. I

В. П. Котляров

Пусть в трехмерном пространстве R_3 задано ограниченное замкнутое множество $F^{(n)}$ такое, что граница $\partial G^{(n)}$ области $G^{(n)} = G \setminus F^{(n)}$ состоит из конечного числа гладких поверхностей. Рассмотрим в области $G^{(n)}$ первую краевую задачу для уравнения теории упругости:

$$A\vec{u}(x) \equiv - \sum_{i,k,l,m=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[c_{iklm}(x)\, \varepsilon_{lm}\left(\vec{u}(x)\right) \right] \vec{x}_k^{\,0} = \vec{K}(x), \qquad (1)$$

$$x \in G^{(n)}$$

$$\vec{u}(x) = 0, \quad x \in \partial G^{(n)}, \qquad (2)$$

где вектор $\vec{K}(x) \in L_2(G)$. В уравнении (1) через $\vec{u}(u_1, \ u_2, \ u_3)$ обозначен вектор упругих смещений; $2\varepsilon_{ik}\left(\vec{u}\right)$ — составляющие тензора деформаций, т. е.

$$\varepsilon_{ik}\left(\vec{u}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right),$$

вектор $\vec{x}_k^{\,0}$ — орт оси $\vec{x}_k$; $c_{iklm}(x)$ — «коэффициенты упругости», которые мы считаем достаточно гладкими в области G и такими, что при всех $x \in G$ выполняется условие

$$\mu_0 \sum_{i,k=1}^{3} \varepsilon_{ik}^2\left(\vec{u}\right) \leqslant W\left(\vec{u}\right) \leqslant \nu_0 \sum_{i,k=1}^{3} \varepsilon_{ik}^2\left(\vec{u}\right), \qquad (3)$$

где μ_0, ν_0 постоянны. Через $W\left(\vec{u}\right)$ обозначена плотность потенциальной энергии упругой деформации, т. е.

$$W\left(\vec{u}\right) = W\left(\vec{u}, \vec{v}\right),$$

где

$$W\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \frac{1}{2} \sum_{i, k, l, m=1}^{3} c_{iklm} \varepsilon_{ik}\left(\vec{u}\right) \varepsilon_{lm}\left(\vec{v}\right).$$

Не уточняя постановки задачи, будем считать, что решение ее существует и единственно. Пусть множество $F^{(n)}$ зависит от параметра $n = 1, 2, 3, \ldots$, т. е. рассмотрим последовательность решений $\vec{u}^{(n)}(x)$ краевых задач (1)—(2). Предположим, что при $n \to \infty$ множества $F^{(n)}$ попадают в сколь угодно малую окрестность некоторой фиксированной гладкой поверхности $\Gamma \subset G$. Тогда оказывается, что при определенных условиях последовательность решений $\vec{u}^{(n)}(x)$ сходится к пределу $\vec{u}(x)$, который является решением следующей задачи:

$$A\vec{u}(x) = \vec{K}(x), \quad x \in G \setminus \Gamma, \tag{4}$$

$$\vec{u}^{+}(x) = \vec{u}^{-}(x) = \vec{u}(x), \quad x \in \Gamma, \tag{5}$$

$$\vec{t}^{+}\left(\vec{u}(x)\right) - \vec{t}^{-}\left(\vec{u}(x)\right) = C(x)\,\vec{u}(x), \quad x \in \Gamma, \tag{6}$$

$$\vec{u}(x) = 0, \quad x \in \partial G, \tag{7}$$

где вектор $\vec{K}(x)$ тот же, что и в уравнении (1); $\vec{t}\left(\vec{u}\right)$ — вектор напряжений, т. е.

$$\vec{t}\left(\vec{u}\right) = \sum_{i, k, l, m=1}^{3} c_{iklm} \varepsilon_{lm}\left(\vec{u}\right) \cos\left(\vec{\nu}, \vec{x}_i\right) \vec{x}_k^{0};$$

$C(x)$ — некоторый положительный и ограниченный тензор второго ранга, заданный на поверхности Γ; ∂G — граница области G. Знаками $+$ и $-$ отмечены предельные значения вектора с разных сторон от поверхности Γ, а нормаль $\vec{\nu}$ направлена в сторону, отмеченную знаком $+$.

Основные доказательства в работе проводятся вариационным методом по схеме, предложенной в [1].

1. Формулировка результата. Решением краевой задачи (1)—(2) назовем вектор $\vec{u}^{(n)}(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(G^{(n)}) \cap W_2^2(G^{(n)}$, лок.), который удовлетворяет уравнению (1). Решением краевой задачи (4)—(7) назовем вектор $\vec{u}(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(G) \cap W_2^2(G \setminus \Gamma$, лок.), удовлетворяющий уравнению (4) в области $G \setminus \Gamma$ и граничному условию (6) в следующем смысле. Пусть G_ε — возрастающая при $\varepsilon \to 0$ последовательность областей с гладкими границами ∂G_ε и таких, что $G \setminus \Gamma = \bigcup\limits_{\varepsilon > 0} G_\varepsilon$, тогда для любого $\vec{\varphi}(x) \in W_2^1(G)$ справедливо тождество

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int\limits_{\partial G_\varepsilon^+} \vec{t}^+ \left(\vec{u}\right) \cdot \vec{\varphi} ds - \int\limits_{\partial G_\varepsilon^-} \vec{t}^- \left(\vec{u}\right) \cdot \vec{\varphi} ds \right] = \int\limits_{\Gamma} C\vec{u} \cdot \vec{\varphi} ds, \qquad (6')$$

где поверхности ∂G_ε^+ и ∂G_ε^- находятся по разные стороны от Γ и при $\varepsilon \to 0$ стремятся к поверхности Γ. Граничные условия (5) и (7) выполняются в смысле $L_2(\Gamma)$ и $L_2(\partial G)$ соответственно.

В этой постановке нетрудно доказать существование и единственность решений краевых задач (1)—(2) и (4)—(7). Доказательство проводится вариационным методом [2]. Необходимое при этом неравенство Корна имеет место в случае обеих задач. Попутно заметим, что для всех встречающихся в дальнейшем областей неравенство Корна справедливо, причем постоянная в нем от n не зависит.

Будем говорить, что последовательность решений $\vec{u}^{(n)}(x)$ краевых задач (1)—(2) сходится при $n \to \infty$ к решению $\vec{u}(x)$ краевой задачи (4)—(7) почти равномерно, если векторы $\vec{u}^{(n)}(x)$ сходятся к $\vec{u}(x)$ равномерно на любом множестве, находящемся на положительном расстоянии от поверхности Γ. В дальнейшем именно эта сходимость имеется в виду.

Прежде чем сформулировать результат, введем понятие тензора жесткости, которое для уравнения теории упругости играет ту же роль, что и ньютонова емкость для уравнения Лапласа. В силу гладкости поверхности Γ нормали к ней длины $\delta \leqslant \delta_0$ ($\delta_0 > 0$) не пересекаются. Выделим на поверхности Γ произвольное открытое множество S, ограниченное кусочно-гладкой кривой (будем называть его куском S поверхности Γ). Проведем через точки S в обе стороны от Γ нормали к ней длины $\delta \leqslant \delta_0$. Криволинейный цилиндр, образованный этими нормалями, обозначим через $T(S, \delta)$, а основание его через S_δ^+ и S_δ^-. Область, которая получается после выбрасывания из $T(S, \delta)$ множества $F^{(n)}$, обозначим через $T^{(n)}(S, \delta)$, т. е. $T^{(n)}(S, \delta) = T(S, \delta) \setminus F^{(n)}$. При этом предполагается, что n достаточно велико так, что множество $F^{(n)}$ не пересекается с S_δ^+ и S_δ^-. Введем три класса векторов. Вектор $\vec{u}^p(x)$ принадлежит классу $W_p(S, \delta, n)$ ($p = 1, 2, 3$), если $\vec{u}^p(x) \in W_2^1(T^{(n)}(S, \delta))$, обращается в нуль (в смысле L_2) на границе $\partial F^{(n)}$ множества $F^{(n)}$ и $u_k^p(x) = \delta_{pk}$ при $x \in S_\delta^+ \cup S_\delta^-$, где $u_k^p(x)$ есть k-я компонента p-го вектора, δ_{pk} — символ Кронекера.

Пусть далее вектор $\vec{v}^p(x) \in W_p(S, \delta, n)$ реализует минимум следующего функционала:

$$H_{T^{(n)}}\left(\vec{v}^p\right) = \min_{W_p(S,\ \delta,\ n)} \int_{T^{(n)}} W\left(\vec{u}^p(x)\right) dx, \quad p = 1,\ 2,\ 3. \tag{1.1}$$

Определение. *Тензором жесткости цилиндра* $T^{(n)}(S, \delta)$ *назовем тензор* $C^{(n)}(S, \delta)$, *составляющие которого определяются следующим образом:*

$$C_{pq}^{(n)}(S, \delta) = H_{T^{(n)}}\left(\vec{v}^p, \vec{v}^q\right) = \int_{T^{(n)}} W\left(\vec{v}^p(x), \vec{v}^q(x)\right) dx \tag{1.2}$$

$$p,\ q = 1,\ 2,\ 3,$$

где $\vec{v}^p(x)$ *и* $\vec{v}^q(x)$ — *векторы, реализующие минимум функционала* (1.1) *в классах векторов* $W_p(S, \delta, n)$ *и* $W_q(S, \delta, n)$ *соответственно.*

Корректность такого определения будет рассмотрена ниже. Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть для любого куска S поверхности Γ выполнено условие*

$$\lim_{\delta \to 0} \varliminf_{n \to \infty} C_{pq}^{(n)}(S, \delta) = \lim_{\delta \to 0} \varlimsup_{n \to \infty} C_{pq}^{(n)}(S, \delta) = \int_S c_{pq}(x)\, ds_x, \quad p,\ q = 1,\ 2,\ 3, \tag{1.3}$$

где $c_{pq}(x)$ — составляющие тензора $C(x)$, фигурирующего в граничном условии (6). *Тогда последовательность решений $\vec{u}^{(n)}(x)$ краевых задач* (1)—(2) *сходится при $n \to \infty$ почти равномерно к решению $\vec{u}(x)$ краевой задачи* (4)—(7).

Обратимся к вопросу о корректности определения тензора жесткости. Данное определение будет корректно, если мы установим существование и единственность вектора, реализующего минимум функционала (1. 1), проверим, что так определенная жесткость есть тензорная величина и установим ее положительность. Существование и единственность вектора, дающего минимум функционалу (1. 1), доказывается обычным способом [2].

Легко видеть, что жесткость $C^{(n)}(S, \delta)$ есть матрица Грама линейно независимых векторов $\vec{v}^p(x)$ и $\vec{v}^q(x)$, рассматриваемых как элементы гильбертова энергетического пространства. Действительно, числа $C_{pq}^{(n)}(S, \delta)$ есть скалярные произведения в энергетическом пространстве векторов $\vec{v}^p(x)$ и $\vec{v}^q(x)$, которые линейно независимы, ибо при $x \in S_\delta^+ \cup S_\delta^-$ они ортогональны при $p \neq q$.

Как известно [3], матрица Грама линейно независимых векторов является тензором и притом положительным. Следовательно, жесткость $C^{(n)}(S, \delta)$ есть положительный тензор.

2. Вспомогательные предложения. Пусть поверхность Γ замкнутая и G^+ и G^- — внутренняя и внешняя области по отношению к Γ. Приведем на расстоянии $\delta > 0$ от Γ две поверхности Γ_δ^+ и Γ_δ^-, параллельные Γ и лежащие соответственно в областях G^+ и G^-. Обозначим через $G(\delta)$ область, лежащую между поверхностями Γ_δ^+ и Γ_δ^-. Пусть $G^{(n)}(\delta) = G(\delta) \setminus F^{(n)}$. При этом n считаем достаточно большим так, что множество $F^{(n)}$ находится строго внутри области $G(\delta)$.

В пространстве $W_2^1(G)$ рассмотрим функционал

$$\Phi_\delta^{(n)}\left(\vec{u}\right) = \min_{M\left(\vec{u}\right)} \int_{G^{(n)}(\delta)} W\left(\vec{v}(x)\right) dx, \tag{2.1}$$

где минимум берется по классу $M\left(\vec{u}\right)$ векторов таких, что $\vec{v}(x) \in W_2^1(G^{(n)}(\delta))$ совпадает с фиксированным вектором $\vec{u}(x) \in W_2^1(G)$ на поверхностях Γ_δ^+ и Γ_δ^- и обращается в нуль на границе $\partial F^{(n)}$ множества $F^{(n)}$. Обычным образом [2] можно показать, что существует и единственный вектор $\vec{v}_0(x) \in M\left(\vec{u}\right)$, на котором достигается минимум функционала (2.1).

Отметим очевидные неравенства

$$\sqrt{\Phi_\delta^{(n)}\left(\vec{u}+\vec{v}\right)} \leqslant \sqrt{\Phi_\delta^{(n)}\left(\vec{u}\right)} + \sqrt{\Phi_\delta^{(n)}\left(\vec{v}\right)}, \tag{2.2}$$

$$\Phi_\delta^{(n)}\left(\vec{u}\right) \leqslant C(\delta) \left\| \vec{u} \right\|^2_{W_2^1(G)}. \tag{2.3}$$

Для дальнейшего удобно ввести следующие обозначения:

$$D_B\left(\vec{u}\right) = \int_B \sum_{i,k=1}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2 dx,$$

$$E_B\left(\vec{u}\right) = \int_B \sum_{i,k=1}^{3} \varepsilon_{ik}^2\left(\vec{u}(x)\right) dx,$$

$$H_B\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \int_B W\left(\vec{u}(x), \vec{v}(x)\right) dx,$$

$$H_B\left(\vec{u}\right) = H_B\left(\vec{u}, \vec{u}\right),$$

где B — некоторая область в G.

При доказательстве теоремы 1 существенную роль играет следующая

Теорема 2. *Пусть для любого куска* $S \subset \Gamma$ *выполнено условие* (1.3). *Тогда для любого вектора* $\vec{u}(x) \in W_2^1(G)$:

$$\lim_{\delta\to 0} \varliminf_{n\to\infty} \Phi_\delta^{(n)}\left(\vec{u}\right) = \lim_{\delta\to 0} \varlimsup_{n\to\infty} \Phi_\delta^{(n)}\left(\vec{u}\right) =$$

$$= \int_\Gamma \sum_{p,\, q=1}^{3} c_{pq}(x)\, u_p(x)\, u_q(x)\, ds_x. \tag{2.4}$$

Доказательство. Установим равенство (2.4) для векторов из пространства $C^1(G)$, которое плотно в пространстве $W_2^1(G)$. Для таких векторов соотношение (2.4) будет вытекать из следующих двух неравенств:

$$\Phi_\delta^{(n)}\left(\vec{u}\right) \leqslant \int_\Gamma \sum_{p,\, q=1}^{3} c_{pq}(x)\, u_p(x)\, u_q(x)\, ds_x + \varepsilon\left(n,\ \delta,\ \vec{u}\right), \tag{2.5}$$

$$\Phi_\delta^{(n)}\left(\vec{u}\right) \geqslant \int_\Gamma \sum_{p,\, q=1}^{3} c_{pq}(x)\, u_p(x)\, u_q(x)\, ds_x - \varepsilon\left(n,\ \delta,\ \vec{u}\right), \tag{2.6}$$

где

$$\varepsilon\left(n,\ \delta,\ \vec{u}\right) \geqslant 0 \ \text{ и } \ \lim_{\delta\to 0} \varlimsup_{n\to\infty} \varepsilon\left(n,\ \delta,\ \vec{u}\right) = 0$$

при любом фиксированном векторе $\vec{u}(x) \in C^1(G)$.

Докажем первое из них. Для этого разобъем поверхность Γ кусочно-гладкими кривыми на конечное число кусков S_α $\left(\Gamma = \bigcup_\alpha S_\alpha\right)$ достаточно малого диаметра $d = d(S_\alpha)$. Сама кривая l, которая производит разбиение поверхности Γ, может быть представлена в виде суммы гладких кривых $\left(l = \bigcup_\beta l_\beta\right)$.

Пусть $\delta > 0$. Выберем $\delta' > 0$ так, что $\delta' < \sqrt[4]{\delta'} < \sqrt{\delta'} < \delta$ и построим функцию $\varphi_{\delta'}(x) \in W_2^1(G(\delta))$ и удовлетворяющую условиям $\varphi_{\delta'}(x) \equiv 0$ при x, принадлежащем $\sqrt{\delta'}$-окрестности множества l, $\varphi_{\delta'}(x) \equiv 1$ вне $\sqrt[4]{\delta'}$-окрестности множества l, всюду $0 \leqslant \varphi_{\delta'}(x) \leqslant 1$ и

$$\int_{G(\delta)} |\nabla \varphi_{\delta'}(x)|^2\, dx \to 0 \ (\delta' \to 0). \tag{2.7}$$

Такая функция может быть построена следующим образом:

$$\varphi_{\delta'}(x) = \prod_{\beta=1}^{N_1} \varphi_{\delta'}^{\beta}(x),$$

где

$$\varphi^{\beta}_{\delta'}(x) = \begin{cases} 0, & x \in \{x : 0 \leqslant r_\beta(x) \leqslant \sqrt{\delta'}\}, \\ 2 - \dfrac{4 \ln r_\beta(x)}{\ln \delta'}, & x \in \{x : \sqrt{\delta'} < r_\beta(x) < \sqrt[4]{\delta'}\}, \\ 1, & x \in \{x : r_\beta(x) \geqslant \sqrt[4]{\delta'}\}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Через $r_\beta(x)$ обозначено расстояние от точки x до кривой l_β.

Введем $G^{\pm}(\delta, \delta')$ — области между поверхностями $\Gamma^{\pm}_{\delta}$ и $\Gamma^{\pm}_{\delta'}$. Пусть вектор $\vec{v}^p_\alpha(x) \in W_p(S_\alpha, \delta', n)$ и дает минимум функционалу (1. 1) в области $T^{(n)}(S_\alpha, \delta')$. Введем в $T^{(n)}(S_\alpha, \delta')$ местную систему координат. Пусть ее орты $\vec{e}^{\alpha}_p$ $(p = 1, 2, 3;\ \alpha = 1, 2, \ldots, N)$. Построим вектор

$$\vec{g}(x) = \begin{cases} \vec{u}(x)\,\varphi_{\delta'}(x), & x \in G^+(\delta, \delta') \cup G^-(\delta, \delta'), \\ \sum\limits_{p=1}^{3} u_p(x)\,\vec{v}^p_\alpha(x)\,\varphi_{\delta'}(x), & x \in T^{(n)}(S_\alpha, \delta'), \end{cases}$$

где функции $u_p(x)$ — проекции $\vec{u}(x)$ на оси $\vec{e}^{\alpha}_p$. Из свойств функции $\varphi_{\delta'}(x)$ вытекает, что $\vec{g}(x) \in M(\vec{u})$. Тогда, согласно (2. 1), можем записать

$$\Phi^{(n)}_{\delta}(\vec{u}) \leqslant \int\limits_{G^{(n)}(\delta)} W(\vec{g}(x))\,dx = \Bigg\{ \int\limits_{G^+(\delta, \delta')} + \int\limits_{G^-(\delta, \delta')} + $$
$$+ \sum_{\alpha=1}^{N} \int\limits_{T^{(n)}(S_\alpha, \delta')} \Bigg\} W(\vec{g}(x))\,dx. \quad (2.9)$$

Первое слагаемое в силу (3) и того, что

$$\varepsilon_{ik}(\varphi_{\delta'}\vec{u}) = \varphi_{\delta'}\varepsilon_{ik}(\vec{u}) + \frac{1}{2}\left(u_i \frac{\partial \varphi_{\delta'}}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \varphi_{\delta'}}{\partial x_i}\right)$$

оценивается сверху:

$$\int\limits_{G^+(\delta, \delta')} W(\varphi_{\delta'}\vec{u})\,dx \leqslant \nu_0 E_{G^+(\delta, \delta')}(\varphi_{\delta'}\vec{u}) \leqslant 2\nu_0 \Bigg[E_{G^+(\delta, \delta')}(\vec{u}) + $$
$$+ \max_{x \in G} \left|\vec{u}(x)\right|^2 \int\limits_{G^+(\delta, \delta')} |\nabla \varphi_{\delta'}(x)|^2\,dx \Bigg],$$

где $\left|\vec{u}(x)\right|^2 = \sum\limits_{i=1}^{3} u_i^2(x)$. В силу (2. 7) и ограниченности $\left|\vec{u}(x)\right|^2$ вытекает, что второе слагаемое стремится к нулю при $\delta' \to 0$.

Поскольку $E\left(\vec{u}\right) \leqslant \left\|\vec{u}\right\|^2_{W_2^1}$, то

$$\int\limits_{G^+(\delta,\,\delta')} \left(\vec{g}(x)\right) dx \leqslant C_1 \left\|\vec{u}\right\|^2_+, \tag{2.10}$$

где $\|\cdot\|_+$ — норма в пространстве $W_2^1(G^+(\delta))$, а $G^+(\delta) = G(\delta) \cap G^+$.

Аналогично получаем оценку второго слагаемого

$$\int\limits_{G^-(\delta,\,\delta')} W\left(\vec{g}(x)\right) dx \leqslant C_2 \left\|\vec{u}\right\|^2_-, \tag{2.11}$$

где $\|\cdot\|_-$ — норма в пространстве $W_2^1(G^-(\delta))$, а $G^-(\delta) = G(\delta) \cap G^-$. Постоянные C_1 и C_2 от n и δ не зависят. Условимся, что всюду в дальнейшем через C_l обозначены постоянные, не зависящие от n и δ.

Нетрудно проверить, что при $x \in T^{(n)}(S_\alpha, \delta')$

$$\varepsilon_{ik}\left(\vec{g}\right) = \varphi_{\delta'} \sum_{p=1}^{3} u_p \varepsilon_{ik}\left(\vec{v}^p\right) + \Delta_{ik}(x, \delta', n),$$

где

$$\Delta_{ik} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\varphi_{\delta'}}{\partial x_k} \sum_{p=1}^{3} u_p v_i^p + \frac{\partial\varphi_{\delta'}}{\partial x_i} \sum_{p=1}^{3} u_p v_k^p + \right.$$

$$\left. + \varphi_{\delta'} \sum_{p=1}^{1} \left(\frac{\partial u_p}{\partial x_k} v_i^p + \frac{\partial u_p}{\partial x_i} v_k^p\right)\right].$$

Поэтому интегралы по $T^{(n)}(S_\alpha, \delta')$ оцениваются сверху следующим образом:

$$\int\limits_{T^{(n)}} W\left(\vec{g}(x)\right) dx = \frac{1}{2} \int\limits_{T^{(n)}} \sum_{i,\,k,\,l,\,m=1}^{3} c_{iklm} \varepsilon_{ik}\left(\vec{g}\right) \varepsilon_{lm}\left(\vec{g}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{T^{(n)}} \varphi^2_{\delta'} \sum_{p,\,q=1}^{3} u_p u_q \left(\sum_{i,\,k,\,l,\,m=1}^{3} c_{iklm} \varepsilon_{ik}\left(\vec{v}^p\right) \varepsilon_{lm}\left(\vec{v}^q\right)\right) dx +$$

$$+ \int\limits_{T^{(n)}} \varphi_{\delta'} \sum_{p=1}^{3} u_p \left(\sum_{i,\,k,\,l,\,m=1}^{3} c_{iklm} \varepsilon_{ik}\left(\vec{v}^p\right) \Delta_{lm}\right) dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{T^{(n)}} \sum_{i,\,k,\,l,\,m=1}^{3} c_{iklm} \Delta_{ik} \Delta_{lm} dx \leqslant \int\limits_{T^{(n)}} \sum_{p,\,q=1}^{3} W\left(\vec{v}^p, \vec{v}^q\right) u_p u_q dx +$$

$$+ C\left[E_{T^{(n)}}\left(\vec{v}^p\right)\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int\limits_{T^{(n)}} \left(\sum_{i,\,k=1}^{3} \Delta_{ik}^2\right) dx\right]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ C_1 \int\limits_{T^{(n)}} \left(\sum_{i,\,k=1}^{3} \Delta_{ik}^2\right) dx. \tag{2.12}$$

Оценим последнее слагаемое

$$\int\limits_{T(n)}\left(\sum_{i,\,k=1}^{3}\Delta_{ik}^2(x,\ \delta',\ n)\right)dx\leqslant 2\left[\int\limits_{T(n)}\sum_{i,\,k=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi_{\delta'}}{\partial x_k}\right)^2\left(\sum_{p=1}^{3}u_p v_i^p\right)^2 dx+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{T(n)}\varphi_{\delta'}^2\sum_{i,\,k=1}^{3}\left(\sum_{p=1}^{3}\frac{\partial u_p}{\partial x_k}v_i^p\right)^2 dx\right]\leqslant$$

$$\leqslant 2\left[\int\limits_{T(n)}|\nabla\varphi_{\delta'}|^2\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{p=1}^{3}u_p^2\sum_{p=1}^{3}(v_i^p)^2\right)dx+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{T(n)}\sum_{i,\,k=1}^{3}\left(\sum_{p=1}^{3}\left(\frac{\partial u_p}{\partial x_k}\right)^2\sum_{p=1}^{3}(v_i^p)^2\right)dx\right]\leqslant$$

$$\leqslant 2\left[m\cdot\max_{x\in G(\delta)}|\nabla\varphi_{\delta'}(x)|^2+m_1\right]\sum_{p=1}^{3}\left\|\vec{v}^p\right\|^2_{L_2(T(n))},$$

где

$$m=\max_{x\in T}|u(x)|^2,\quad m_1=\max_{x\in T}\left|\nabla\vec{u}(x)\right|^2.$$

Из свойств функции $\varphi_{\delta'}(x)$ (2. 8) вытекает, что

$$\max_{x\in G(\delta)}|\nabla\varphi_{\delta'}(x)|^2\leqslant\frac{C}{\delta'|\ln\delta'|^2}.$$

Нетрудно показать, что

$$\left\|\vec{v}^p\right\|^2_{L_2(T(n))}\leqslant C\delta'+C_1(\delta')^2 E_{T(n)}\left(\vec{v}^p\right).$$

Величина $E_{T(n)}\left(\vec{v}^p\right)$ в силу условия (1. 3) допускает оценку

$$E_{T(n)}\left(\vec{v}^p\right)\leqslant\frac{H_{T(n)}\left(\vec{v}^p\right)}{\mu_0}=\frac{C_{pp}^{(n)}(S_\alpha,\ \delta')}{\mu_0}\leqslant C_2. \qquad (2.\ 13)$$

Таким образом,

$$\int\limits_{T(n)}\sum_{i,\,k=1}^{3}\Delta_{ik}^2(x,\ \delta',\ n)\,dx\leqslant\frac{C}{|\ln\delta'|^2}.$$

Следовательно, в силу (2. 12) имеем

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\int\limits_{T(n)}W\left(\vec{g}(x)\right)dx\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\alpha=1}^{N}\int\limits_{T(n)}\sum_{p,\,q=1}^{3}W\left(\vec{v}^p(x),\ \vec{v}^q(x)\right)u_p(x)\,u_q(x)\,dx+\frac{CN}{|\ln\delta'|}. \qquad (2.\ 14)$$

Далее из неравенств (2.9)—(2.11) и (2.14) получаем

$$\Phi_\delta^{(n)}\left(\vec{u}\right) \leqslant \sum_{\alpha=1}^{N} \int\limits_{T(n)} \sum_{p,\,q=1}^{3} W\left(\vec{v}^p,\ \vec{v}^q\right) u_p u_q dx + \varepsilon\left(\delta,\ \vec{u}\right), \tag{2.15}$$

где

$$\varepsilon\left(\delta,\ \vec{u}\right) = C_1 \left\| \vec{u} \right\|_+^2 + C_2 \left\| \vec{u} \right\|_-^2 + \frac{CN}{|\ln \delta'|}$$

и тем самым

$$\lim_{\delta \to 0} \varepsilon\left(\delta,\ \vec{u}\right) = 0.$$

В силу условия (1.3) следует, что для любого $S_\alpha \subset \Gamma$ имеет место

$$C_{pq}^{(n)}(S_\alpha,\ \delta') = \int\limits_{S_\alpha} c_{pq}(x)\, ds_x + \varepsilon(\delta',\ n),$$

где

$$\lim_{\delta' \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}}\ \varepsilon(\delta',\ n) = 0.$$

Учитывая гладкость вектора $\vec{u}(x)$ и определение (1.2), находим

$$\sum_{p,\,q=1}^{3} \sum_{\alpha=1}^{N} \int\limits_{T(n)} W\left(\vec{v}^p(x),\ \vec{v}^q(x)\right) u_p(x)\, u_q(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p,\,q=1}^{3} \sum_{\alpha=1}^{N} C_{pq}^{(n)}(S_\alpha,\ \delta')\, u_p(\bar{x}_\alpha)\, u_q(\bar{x}_\alpha) + \varepsilon_1\left(n,\ \delta',\ d,\ \vec{u}\right), \tag{2.16}$$

где $\bar{x}_\alpha \in S_\alpha$ фиксирована и

$$\varepsilon_1\left(n,\ \delta',\ d,\ \vec{u}\right) = 3 \max_{\substack{x \in S_\alpha \\ 1 \leqslant \alpha \leqslant N}} \left| u_p(x)\, u_q(x) - \right.$$

$$\left. - u_p(\bar{x}_\alpha)\, u_q(\bar{x}_\alpha) \right| \sum_{p=1}^{3} \left(\int\limits_{\Gamma} c_{pp}(x)\, ds + N\varepsilon\,(\delta', n) \right).$$

Ясно, что

$$\lim_{d \to 0} \lim_{\delta' \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}}\ \varepsilon_1\left(n,\ \delta',\ d,\ \vec{u}\right) = 0.$$

Используя условие (1.3), аналогично предыдущему получаем

$$\sum_{p,\,q=1}^{3} \sum_{\alpha=1}^{N} C_{pq}^{(n)}(S_\alpha, \delta')\, u_p(\bar{x}_\alpha)\, u_q(\bar{x}_\alpha) =$$

$$= \sum_{p,\,q=1}^{3} \left[\int\limits_{\Gamma} c_{pq}(x)\, ds + N\varepsilon\,(\delta', n) \right] u_p(\bar{x}_\alpha)\, u_q(\bar{x}_\alpha) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Gamma} \sum_{p,\,q=1}^{3} c_{pq}(x)\, u_p(x)\, u_q(x)\, ds_x + \varepsilon_2\left(n,\ \delta',\ d,\ \vec{u}\right), \tag{2.17}$$

причем

$$\lim_{d\to 0}\lim_{\delta'\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\varepsilon_2\left(n,\ \delta',\ d,\ \vec{u}\right)=0.$$

Таким образом, из неравенств (2. 15)—(2. 17) вытекает

$$\Phi_\delta^{(n)}\left(\vec{u}\right)\leqslant\int_\Gamma\sum_{p,\,q=1}^{3}c_{pq}(x)\,u_p(x)\,u_q(x)\,ds_x+\varepsilon\left(n,\ \delta,\ d,\ \vec{u}\right),$$

где

$$\varepsilon\left(n,\ \delta,\ d,\ \vec{u}\right)=\varepsilon\left(\delta,\ \vec{u}\right)+\varepsilon_1\left(n,\ \delta',\ d,\ \vec{u}\right)+\varepsilon_2\left(n,\ \delta',\ d,\ \vec{u}\right),$$

и, следовательно,

$$\lim_{d\to 0}\lim_{\delta\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\varepsilon\left(n,\ \delta,\ d,\ \vec{u}\right)=0.$$

Тем самым неравенство (2. 5) установлено.

Перейдем к доказательству неравенства (2. 6). Для этого, как и ранее, разобьем поверхность Γ на куски S_α достаточно малого диаметра $d=d(S_\alpha)$. На множестве S_α зафиксируем точку $\bar{x}_\alpha$ и рассмотрим вектор $\vec{u}(x)=\vec{u}(\bar{x}_\alpha)$. Так как вектор $\vec{u}(\bar{x}_\alpha)$ постоянный, то выбором системы координат его можно преобразовать в вектор $\vec{u}'(\bar{x}_\alpha)=\left(u_1'(x_\alpha),\ 0,\ 0\right)$. Поскольку $\vec{u}(x)\in C^1(G)$, то в новой системе координат для всех точек $x'\in T(S_\alpha,\ \delta)$ при достаточно малых $\delta>0$ и $d>0$ будем иметь

$$\vec{u}'(x')=\left(u_1'(\bar{x}_\alpha)+\varepsilon_1(x'),\quad \varepsilon_2(x'),\quad \varepsilon_3(x')\right),$$

где функции $\varepsilon_i(x')$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ непрерывно дифференцируемы и

$$\max_{x',\,\alpha}|\varepsilon_i(x')|<\varepsilon\left(\delta,\ d,\ \vec{u}\right);\quad \max_{x',\,\alpha}\left|\frac{\partial\varepsilon_i(x')}{\partial x_j}\right|<C.$$

Величина $\varepsilon\left(\delta,\ d,\ \vec{u}\right)$ мала, как только δ и d выбраны достаточно малыми.

Пусть $\vec{v}'(x')\in M\left(\vec{u}\right)$ и реализует минимум функционала (2. 1). Выделим те множества S_α, на которых $\left|\vec{u}(x')\right|\neq 0$ при всех $x'\in S_\alpha$. Тогда

$$\Phi_\delta^{(n)}\left(\vec{u}\right)=\sum_{\alpha=1}^{N}\int_{T^{(n)}}W\left(\vec{v}'(x')\right)dx'\geqslant$$

$$\geqslant{\sum_\alpha}'\int_{T^{(n)}}W\left(\vec{v}'(x')\right)dx',$$

где Σ' означает суммирование лишь по тем α, где $\left|\vec{u}(x')\right| \neq 0$ при всех $x' \in S_\alpha$. Поскольку $\vec{v}(x') = \vec{u}(x')$ при $x' \in S_\delta^+ \cup S_\delta^-$, то в новой системе координат

$$\vec{v}'(x') = \left(u_1'(\bar{x}_\alpha) + \varepsilon_1(x'),\ \varepsilon_2(x'),\ \varepsilon_3(x')\right),\ x' \in S_\delta^+ \cup S_\delta^-.$$

Введем вектор

$$\vec{\varepsilon}(x') = (\varepsilon_1(x'),\quad \varepsilon_2(x'),\quad \varepsilon_3(x')) \in C^1(T)$$

и построим вектор

$$\vec{h}(x') = \sum_{p=1}^{3} \varepsilon_p(x')\,\vec{v}^p(x'),$$

где векторы $\vec{v}^p(x')$ реализуют минимум функционала (1. 1) в классах $W_p(S_\alpha,\ \delta,\ n)$ соответственно. Рассмотрим разность

$$\frac{\vec{v}'(x') - \vec{h}(x')}{u_1'(\bar{x}_\alpha)}.$$

Легко видеть, что она принадлежит классу $W_1(S_\alpha,\ \delta,\ n)$, а потому

$$C_{11}^{(n)}(S_\alpha,\ \delta) \leqslant \int\limits_{T(n)} W\left(\frac{\vec{v}'(x') - \vec{h}(x')}{u_1'(\bar{x}_\alpha)}\right) dx' = H_{T(n)}\left(\frac{\vec{v}'(x')}{u_1'(\bar{x}_\alpha)}\right) -$$

$$-2H_{T(n)}\left(\frac{\vec{v}'(x')}{u_1'(\bar{x}_\alpha)},\ \frac{\vec{h}(x')}{u_1'(\bar{x}_\alpha)}\right) + H_{T(n)}\left(\frac{\vec{h}(x')}{u_1'(\bar{x}_\alpha)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\left|u_1'(\bar{x}_\alpha)\right|^2}\left[H_{T(n)}\left(\vec{v}'\right) + 2\sqrt{H_{T(n)}\left(\vec{v}'\right)}\sqrt{H_{T(n)}\left(\vec{h}\right)} + H_{T(n)}\left(\vec{h}\right)\right].$$

Отсюда получаем

$$\sqrt{C_{11}^{(n)}(S_\alpha,\ \delta)\left|u_1'(\bar{x}_\alpha)\right|^2} \leqslant \sqrt{H_{T(n)}\left(\vec{v}'\right)} + \sqrt{H_{T(n)}\left(\vec{h}\right)}. \qquad (2.18)$$

Второе слагаемое справа в силу равенства

$$\varepsilon_{ik}\left(\vec{h}\right) = \varepsilon_{ik}\left(\sum_{p=1}^{3} \varepsilon_p \vec{v}^p\right) = \sum_{p=1}^{3} \varepsilon_p \varepsilon_{ik}\left(\vec{v}^p\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{3}\left(\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial x_k} v_i^p + \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial x_i} v_k^p\right)$$

допускает оценку

$$H_{T^{(n)}}(\vec{h}) \leqslant \nu_0 E_{T^{(n)}}(\vec{h}) = \nu_0 \int\limits_{T^{(n)}} \sum_{i,k=1}^{3} \varepsilon_{ik}^2 (\vec{h}(x')) dx' \leqslant$$

$$\leqslant 2\nu_0 \int\limits_{T^{(n)}} \sum_{i,k=1}^{3} \left[\sum_{p=1}^{3} \varepsilon_p^2 \sum_{p=1}^{3} \varepsilon_{ik}^2 (\vec{v}^p) + \left(\sum_{p=1}^{3} \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial x_k} v_i^p \right)^2 \right] dx' \leqslant$$

$$\leqslant 2\nu_0 \varepsilon^2 (\delta, d, \vec{u}) \sum_{p=1}^{3} E_{T^{(n)}}(\vec{v}^p) + 2\nu_0 C \left\| \vec{v}^p \right\|^2_{L_2(T^{(n)})} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\nu_0}{\mu_0} \varepsilon^2 (\delta, d, \vec{u}) \sum_{p=1}^{3} \left(\int\limits_{S_\alpha} c_{pp}(x) ds + \varepsilon(\delta, n) \right) + C_1, \delta =$$

$$= \varepsilon_1 (n, \delta, d, S_\alpha, \vec{u}).$$

Из этой оценки, неравенства (2. 18), ограниченности $\vec{u}(x)$ и $C_{11}^{(n)}(S_\alpha, \delta)$ равномерно по n и δ вытекает

$$C_{11}^{(n)}(S_\alpha, \delta) \left| u_1'(\bar{x}_\alpha) \right|^2 - C \sqrt{\varepsilon_1 (n, \delta, d, S_\alpha, \vec{u})} \leqslant H_{T^{(n)}}(\vec{v}'),$$

а так как $u_2'(\bar{x}_\alpha) = u_3'(\bar{x}_\alpha) = 0$, то

$$\sum_{p,q=1}^{3} C_{pq}^{(n)}(S_\alpha, \delta) u_p(\bar{x}_\alpha) u_q(\bar{x}_\alpha) - C_1 \varepsilon_1 (n, \delta, d, S_\alpha, \vec{u}) \leqslant$$

$$\leqslant H_{T^{(n)}}(\vec{v}), \tag{2. 19}$$

ибо квадратичные формы не зависят от выбора системы координат.

Из условия (1. 3) имеем

$$C_{pq}^{(n)}(S_\alpha, \delta) \geqslant \int\limits_{S_\alpha} c_{pq}(x) ds_x - \varepsilon(n, \delta),$$

причем $\lim\limits_{\delta\to 0} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \varepsilon(n, \delta) = 0$. Учитывая ограниченность $c_{pq}(x)$, гладкость вектора $\vec{u}(x)$ и неравенство (2. 19), получим

$$\Phi_\delta^{(n)}(\vec{u}) \geqslant \sum_\alpha{}' H_{T^{(n)}}(\vec{v}) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_\alpha{}' \int\limits_{S_\alpha} \sum_{p,q=1}^{3} c_{pq}(x) u_p(x) u_q(x) ds_x - \varepsilon_2 (n, \delta, d, \vec{u}), \tag{2. 20}$$

где

$$\lim_{d\to 0} \lim_{\delta\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \varepsilon_2 (n, \delta, d, \vec{u}) = 0.$$

Из ограниченности $c_{pq}(x)$, гладкости вектора $u(x)$ и условия (1. 3) получаем, что величина

$$\sum_{\alpha}'' \int_{S_\alpha} \sum_{p,\,q=1}^{3} c_{pq}(x)\, u_p(x)\, u_q(x)\, ds_x$$

мала как только $d = d(S_\alpha)$ достаточно мало. $\sum\limits_{\alpha}''$ — означает суммирование по тем S_α, где $\vec{u}(x) = 0$ хотя бы в одной точке $x \in S_\alpha$.

Поскольку

$$\int_{\Gamma} \sum_{p,\,q=1}^{3} c_{pq} u_p u_q ds = \left(\sum_{\alpha}' + \sum_{\alpha}''\right) \int_{S_\alpha} \sum_{p,\,q=1}^{3} c_{pq} u_p u_q ds,$$

то совместно с неравенством (2. 20) мы получаем доказываемое неравенство (2. 6).

Таким образом, теорема 2 доказана для векторов из плотного множества в пространстве $W_2^1(G)$. Доказательство утверждения теоремы 2 для произвольных $\vec{u}(x) \in W_2^1(G)$ проводится точно так же, как в работе [1].

3. Доказательство теоремы 1. Решение краевой задачи (1)—(2) при фиксированном n является решением задачи на минимум функционала

$$I\left(\vec{v}^{(n)}\right) = \int_{G^{(n)}} \left[W\left(\vec{v}^{(n)}(x)\right) - \vec{K}(x) \cdot \vec{v}^{(n)}(x)\right] dx \qquad (3.\ 1)$$

в классе векторов $\overset{0}{W}{}_2^1(G)$, где принято обозначение

$$\vec{K}(x) \cdot \vec{v}^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{3} K_i(x)\, v_i^{(n)}(x).$$

Пусть $\vec{u}^{(n)}(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(G^{(n)})$ есть решение вариационной задачи, которое, как известно, единственно. Продолжим функцию $\vec{u}^{(n)}(x)$ нулем на множество $F^{(n)}$. После такого продолжения $\vec{u}^{(n)}(x)$ будет принадлежать пространству $\overset{0}{W}{}_2^1(G)$. Тогда в силу неравенств Фридрихса и Корна [2] имеем

$$0 = I\left(\vec{0}\right) \geqslant I\left(\vec{u}^{(n)}\right) = H_G\left(\vec{u}^{(n)}\right) - \left(\vec{K},\ \vec{u}^{(n)}\right) \geqslant$$

$$\geqslant H_G\left(\vec{u}^{(n)}\right) - \sqrt{\frac{C_1 C_0}{\mu_0}} \left\|\vec{K}\right\|_{L_2(G)} \sqrt{H_G\left(\vec{u}^{(n)}\right)} =$$

$$= \left[\sqrt{H_G\left(\vec{u}^{(n)}\right)} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_1 C_0}{\mu_0}} \left\|\vec{K}\right\|_{L_2(G)}\right]^2 - \frac{C_1 C_0}{4\mu_0} \left\|\vec{K}\right\|^2_{L_2(G)},$$

при этом постоянные C_0, C_1 и μ_0 от n не зависят. Отсюда

$$H_G\left(\vec{u}^{(n)}\right) \leqslant \frac{C_1 C_0}{\mu_0} \left\| \vec{K} \right\|^2_{L_2(G)}.$$

Поскольку метрика энергетического пространства $H_G\left(\vec{u}\right)$, и метрика пространства $\overset{0}{W}{}^1_2(G)$ эквивалентны, то

$$\left\| \vec{u}^{(n)} \right\|_{\overset{0}{W}{}^1_2(G)} \leqslant C = \text{const},$$

причем C от n не зависит. Тогда последовательность решений $\vec{u}^{(n)}(x)$ краевых задач (1)—(2) слабо компактна в пространстве $\overset{0}{W}{}^1_2(G)$. Значит, можно выделить подпоследовательность $\vec{u}^{(n_k)}(x)$, слабо сходящуюся в метрике $\overset{0}{W}{}^1_2(G)$ к некоторому вектору $\vec{u}(x) \in \overset{0}{W}{}^1_2(G)$. Сразу отметим, что из принадлежности $\vec{u}(x) \in \overset{0}{W}{}^1_2(G)$ вытекает, что граничные условия (5) и (7) выполняются.

На самом деле сходимость $\vec{u}^{(n_k)}(x)$ к $\vec{u}(x)$ имеет место и по норме пространств $W^1_2(G')$ и $C(G')$, где G' — любая подобласть области $G^+ \cup G^-$, находящаяся на положительном расстоянии от Г. Мы ограничимся доказательством этого утверждения для случая однородной и изотропной среды, т. е. когда коэффициенты $c_{iklm}(x)$ постоянны.

Введем вектор

$$\vec{\varphi}(x) = \int\limits_{G^1_\delta} V(x, y)\, \vec{K}(y)\, dy, \qquad G^1_\delta = G^+_\delta \cup G^-_\delta,$$

где $V(x, y)$ — фундаментальный тензор Сомильяна [2]. Интегральный оператор с ядром $V(x, y)$ имеет слабую особенность $O(r^{-1})$, где $r = r(x, y)$ — расстояние между точками x и y. В силу теоремы о дифференцировании интегралов со слабой особенностью [2, § 21] получим, что $\vec{\varphi}(x) \in W^2_2\left(G^1_\delta\right)$ и $A\vec{\varphi}(x) = \vec{K}(x)$ почти везде в области G^1_δ.

Положим далее

$$\vec{v}^{(n)}(x) = \vec{u}^{(n)}(x) - \vec{\varphi}(x), \qquad x \in G^1_\delta.$$

Интегрируя (3. 1) по частям при $x \in G^1_\delta$, получим

$$I_{G^1_\delta}\left(\vec{v}^{(n)} + \vec{\varphi}\right) = H_{G^1_\delta}\left(\vec{v}^{(n)}\right) + 2H_{G^1_\delta}\left(\vec{v}^{(n)}, \vec{\varphi}\right) +$$

$$+ H_{G^1_\delta}\left(\vec{\varphi}\right) - \int\limits_{G^1_\delta} \vec{K}(x) \cdot \left(\vec{v}^{(n)}(x) + \vec{\varphi}(x)\right) dx =$$

$$= H_{G_\delta^1}\left(\vec{v}^{(n)}\right) + \int_{G_\delta^1} \vec{v}^{(n)}(x) \cdot A\vec{\varphi}(x)\,dx + H_{G_\delta^1}\left(\vec{\varphi}\right) +$$

$$+ \int_{\partial G_\delta^1} \vec{v}^{(n)}(x) \cdot \vec{t}\left(\vec{\varphi}(x)\right) ds_x - \int_{G_\delta^1} \vec{K}(x) \cdot \left(\vec{v}^{(n)}(x) + \vec{\varphi}(x)\right) dx =$$

$$= H_{G_\delta^1}\left(\vec{v}^{(n)}\right) + \int_{\partial G_\delta^1} \vec{v}^{(n)}(x) \cdot \vec{t}\left(\vec{\varphi}(x)\right) ds_x +$$

$$+ H_{G_\delta^1}\left(\vec{\varphi}\right) - \int_{G_\delta^1} \vec{K}(x) \cdot \vec{\varphi}(x)\,dx,$$

где ∂G_δ^1 — граница области G_δ^1. Поскольку $\vec{\varphi}(x)$ **фиксирован**, то последнее равенство можно записать так:

$$I_{G_\delta^1}\left(\vec{u}^{(n)}\right) = I^1_{G_\delta^1}\left(\vec{v}^{(n)}\right) + \text{const}, \qquad (3.2)$$

где

$$I^1_{G_\delta^1}\left(\vec{v}^{(n)}\right) = H_{G_\delta^1}\left(\vec{v}^{(n)}\right) + \int_{\partial G_\delta^1} \vec{v}^{(n)}(x) \cdot \vec{t}\left(\vec{\varphi}(x)\right) ds_x.$$

Поскольку $\vec{u}^{(n)}(x)$ есть решение уравнения (1) во всей области $G^{(n)}$, то он реализует минимум функционала $I_{G_\delta^1}$ в некотором классе векторов. Тогда в силу равенства (3. 2) $\vec{v}^{(n)}(x)$ реализует минимум функционала $I^1_{G_\delta^1}$ в некотором другом классе векторов.

Пусть $\vec{\psi}(x)$ — бесконечно дифференцируемый и финитный вектор в области G_δ^1. Тогда, если t — действительное число,

$$I^1_{G_\delta^1}\left(\vec{v}^{(n)} + t\vec{\psi}\right) \geqslant I^1_{G_\delta^1}\left(\vec{v}^{(n)}\right).$$

Отсюда, как обычно, вытекает тождество

$$H_{G_\delta^1}\left(\vec{v}^{(n)}, \vec{\psi}\right) = 0.$$

В силу первой формулы Бетти

$$0 = 2H_{G_\delta^1}\left(\vec{v}^{(n)}, \vec{\psi}\right) = \int_{G_\delta^1} \vec{v}^{(n)}(x)\, A\vec{\psi}(x)\,dx.$$

В качестве $\vec{\psi}(x)$ последовательно возьмем векторы

$$\begin{array}{ccc} (\omega_h(x, y), & 0, & 0) \\ (0, & \omega_h(x, y), & 0) \\ (0, & 0, & \omega_h(x, y)), \end{array}$$

где $\omega_h(x, y)$ — усредняющее ядро, зависящее только от $r = r(x, y)$ — расстояние между точками x и y. Тогда

$$0 = \int_{G_\delta^1} v_i^{(n)}(x) A_x \omega_h(x, y)\, dx =$$

$$= \int_{G_\delta^1} v_i^{(n)}(x) A_y \omega_h(y, x)\, dx = A_y v_{ih}^{(n)}, \quad i = 1, 2, 3,$$

т. е.

$$A\vec{v}_h^{(n)}(x) = 0, \ \ x \in G_\delta^1. \tag{3. 3}$$

Имеет место [2] следующая

Теорема. *Множество тех решений однородного уравнения теории упругости, которые квадратично-суммируемы в области B и имеют внутри B непрерывные вторые производные, образуют в $L_2(B)$ подпространство. Сходимость в этом подпространстве влечет за собой равномерную сходимость самих векторов и их производных любого порядка в каждой внутренней подобласти B.*

В силу этой теоремы и равенства (3. 3) $\vec{v}^n(x) = \lim\limits_{h\to 0} \vec{v}_h^{(n)}(x)$ имеет производные всех порядков внутри области G_δ^1 и удовлетворяет уравнению

$$A\vec{v}^{(n)}(x) = 0, \ \ x \in G_\delta^1. \tag{3. 4}$$

Таким образом, получаем

$$\vec{u}^{(n)}(x) = \vec{v}^{(n)}(x) + \vec{\varphi}(x) \in W_2^2(G_{\delta'}^1) \ \ (\delta' > \delta, \text{ т. е. } G_{\delta'}^1 \subset G_\delta^1)$$

$$\text{и } \ A\vec{u}^{(n)}(x) = \vec{K}(x)$$

почти везде в области G_δ^1.

Применяя вторично сформулированную выше теорему к вектору $\vec{v}^{(n)}(x)$ и учитывая (3. 4), получаем, что $\vec{v}^{(n)}(x)$ сходится к $\vec{v}(x)$ по подпоследовательности n_k равномерно вместе со всеми своими производными в любой области $G_{\delta'}^1 \subset G_\delta^1$ и $A\vec{v}(x) = 0$ при $x \in G_{\delta'}^1$. Но тогда, поскольку $\vec{\varphi}(x)$ непрерывен, подпоследовательность $\vec{u}^{(n_k)}(x)$ сходится равномерно к вектору $\vec{u}(x) = \vec{v}(x) + \vec{\varphi}(x)$ при $x \in G_{\delta'}^1$ $(\delta' > \delta)$. В силу принадлежности $\vec{\varphi}(x) \in W_2^1(G_\delta^1)$ имеем, что $\vec{u}^{(n_k)}(x)$ сходится к $\vec{u}(x)$ и по норме пространства $W_2^1(G_{\delta'}^1)$. Ясно, что $A\vec{u}(x) = \vec{K}(x)$ почти везде в области $G_{\delta'}^1 = G_{\delta'}^+ \cup G_{\delta'}^-$.

Поскольку при $n \to \infty$ числа $\delta > 0$ и $\delta' > 0$ можно выбрать сколько угодно малыми, то мы получаем, что подпоследовательность $\vec{u}^{(n_k)}(x)$ сходится к $\vec{u}(x)$ по норме пространств $W_2^1(G')$ и $C(G')$, где G' — любая подобласть области $G^+ \cup G^-$ и этот вектор $\vec{u}(x)$ удовлетворяют уравнению (4) почти везде в $G^+ \cup G^-$. Вектор $\vec{u}(x)$ совпадает со слабым (в метрике $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$) пределом последовательности $\vec{u}^{(n_k)}(x)$. Таким образом, установлено, что предельный вектор $\vec{u}(x)$ удовлетворяет уравнению (4) и граничным условиям (5) и (7).

Покажем, что $\vec{u}(x)$ удовлетворяет граничному условию (6). Для этого в классе векторов $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ рассмотрим функционал

$$I_C(\vec{v}) = H(\vec{v}) - (\vec{K}, \vec{v}) + \int_\Gamma C\vec{v} \cdot \vec{v} ds, \tag{3.5}$$

где $C(x)$ — тензор, определенный условием (1.3) теоремы 1. Введем новую метрику

$$H_C(\vec{v}) = H(\vec{v}) + \int_\Gamma C\vec{v} \cdot \vec{v} ds.$$

Из ограниченности и положительности тензора $C(x)$ и теорем вложения следуют неравенства

$$H(\vec{v}) \leqslant H_C(\vec{v}) \leqslant H(\vec{v}) + B\|\vec{v}\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)},$$

где B — постоянная, определяемая ограниченностью тензора $C(x)$ и теоремой вложения. Отсюда в силу эквивалентности норм $H(\vec{v})$ и пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ вытекает эквивалентность норм $H_C(\vec{v})$ и пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$. Далее, как обычно, вариационным методом доказывается, что существует и единственный вектор $\vec{v}(x)$, реализующий минимум функционала (3.5), и что этот вектор $\vec{v}(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G) \cap W_2^2(G \setminus \Gamma$, лок) и удовлетворяет уравнению (4). Покажем, что вектор $\vec{v}(x)$ удовлетворяет граничному условию (6) в смысле (6′). Для этого построим поверхности $\Gamma_\delta^+ \subset G^+$ и $\Gamma_\delta^- \subset G^-$. Пусть $\vec{\varphi}(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$, а t — действительное число. Тогда

$$I_C(\vec{v} + t\vec{\varphi}) \geqslant I_C(\vec{v}).$$

Отсюда вытекает

$$2H\left(\vec{v}, \vec{\varphi}\right) - \left(\vec{K}, \vec{\varphi}\right) + \int_{\Gamma} C\vec{v} \cdot \vec{\varphi} ds, \tag{3.6}$$

верное для любого вектора $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$.

Из этого тождества получаем

$$2\int_{G_\delta^1} W\left(\vec{v}, \vec{\varphi}\right) dx - \int_{G_\delta^1} \vec{K} \cdot \vec{\varphi} dx + 2\int_{G(\delta)} W\left(\vec{v}, \vec{\varphi}\right) dx - $$

$$- \int_{G(\delta)} \vec{K} \cdot \vec{\varphi} dx + \int_{\Gamma} C\vec{v} \cdot \vec{\varphi} ds, \tag{3.7}$$

где $G(\delta)$ — область между поверхностями Γ_δ^+ и Γ_δ^-, а $G_\delta^1 = (G^+ \cup G^-) \backslash G(\delta)$. Третье и четвертое слагаемые допускают оценку

$$\left|2\int_{G(\delta)} W\left(\vec{v}, \vec{\varphi}\right) dx - \int_{G(\delta)} \vec{K} \cdot \vec{\varphi} dx\right| \leqslant 2\sqrt{H_{G(\delta)}\left(\vec{v}\right)}\sqrt{H_{G(\delta)}\left(\vec{\varphi}\right)} +$$

$$+ \left\|\vec{K}\right\|_{L_2(G(\delta))} \cdot \left\|\vec{\varphi}\right\|_{L_2(G(\delta))} = O(\delta) \quad (\delta \to 0), \tag{3.8}$$

ибо при малом $\delta > 0$ область $G(\delta)$ имеет малую меру, а векторы $\vec{v}$ и $\vec{\varphi}$ суммируемы в соответствующих метриках. Интегрируя тождество (3.7) по частям, получим

$$\int_{G_\delta^1} \vec{\varphi} \cdot \left(A\vec{v} - \vec{K}\right) dx + \int_{\Gamma_\delta^-} \vec{t}^-\left(\vec{v}\right) \cdot \vec{\varphi} ds - \int_{\Gamma_\delta^+} \vec{t}^+\left(\vec{v}\right) \cdot \vec{\varphi} ds +$$

$$+ \int_{\Gamma} C\vec{v} \cdot \vec{\varphi} ds + \int_{G(\delta)} \left[2W\left(\vec{v}, \vec{\varphi}\right) - \vec{K} \cdot \vec{\varphi}\right] dx = 0.$$

Учитывая, что $A\vec{v} = \vec{K}$ почти везде, а также оценку (3.8), будем иметь, что на поверхности Γ выполнено условие

$$\lim_{\delta \to 0}\left[\int_{\Gamma_\delta^+} \vec{t}^+\left(\vec{v}\right) \cdot \vec{\varphi} ds - \int_{\Gamma_\delta^-} \vec{t}^-\left(\vec{v}\right) \cdot \vec{\varphi} ds\right] = \int_{\Gamma} C\vec{v} \cdot \vec{\varphi} ds,$$

верное для любого вектора $\vec{\varphi} \in W_2^1(G)$, т. е. получено граничное условие (6) в смысле (6′).

Остается показать, что предельный вектор $\vec{u}(x)$ является точкой минимума функционала $I_C\left(\vec{v}\right)$. Поскольку этот функционал имеет единственную точку минимума, то отсюда будет вытекать, что вся последовательность $\vec{u}^{(n)}(x)$ решений краевых задач (1)—(2) будет сходиться к $\vec{u}(x)$ решению задачи (4) — (7).

Пусть $\vec{h}(x)$ — произвольный вектор из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$. Построим вектор

$$\vec{h}_\delta^{(n)}(x) = \begin{cases} \vec{h}(x), & x \in G_\delta^+ \cup G_\delta^- = G_\delta^1, \\ \vec{h}_0^{(n)}(x), & x \in G^{(n)}(\delta), \end{cases}$$

где $\vec{h}_0^{(n)}(x) \in M(\vec{h})$ и реализует минимум функционала (2.1) $\Phi_\delta^{(n)}(\vec{h})$. Легко видеть, что $\vec{h}_\delta^{(n)}(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G^{(n)})$. Будем считать, что носитель $\vec{K}(x)$ полностью лежит в области $G_\delta^+ \cup G_\delta^-$. При $x \in G^{(n)}$ можем записать

$$I\left(\vec{h}_\delta^{(n)}\right) = \int\limits_{G_\delta^1} \left[W\left(\vec{h}\right) - \vec{K}\cdot\vec{h}\right] dx + \int\limits_{G^{(n)}(\delta)} W\left(\vec{h}_0^{(n)}\right) dx =$$

$$= \int\limits_{G_\delta^1} \left[W\left(\vec{h}\right) - \vec{K}\cdot\vec{h}\right] dx + \Phi_\delta^{(n)}\left(\vec{h}\right).$$

В силу теоремы 2 следует равенство

$$\lim_{\delta\to 0}\varlimsup_{n\to\infty} I\left(\vec{h}_\delta^{(n)}\right) = I_C\left(\vec{h}\right). \tag{3.9}$$

Как уже отмечалось, последовательность $\vec{u}^{(n)}(x)$ решений краевых задач (1) — (2) сходится при $n = n_k \to \infty$ к вектору $\vec{u}(x)$ по норме пространства $W_2^1(G')$, где G' — любая подобласть G, находящаяся на положительном расстоянии от поверхности Г. В частности,

$$\left\|\vec{u}^{(n)} - \vec{u}\right\|_{W_2^1(G_\delta^1)} \to 0, \quad n = n_k \to \infty.$$

Можно показать, что существует вектор $\tilde{\vec{u}}^{(n)}(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ и $\tilde{\vec{u}}^{(n)}(x) = \vec{u}^{(n)}(x)$ при $x \in G_\delta^1$, обладающий свойством:

$$\left\|\tilde{\vec{u}}^{(n)} - \vec{u}\right\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)} \to 0, \quad n = n_k \to \infty.$$

Далее,

$$I\left(\vec{u}^{(n)}\right) = \int\limits_{G_\delta^1} \left[W\left(\vec{u}^{(n)}\right) - \vec{K}\cdot\vec{u}^{(n)}\right] dx + \int\limits_{G^{(n)}(\delta)} W\left(\vec{u}^{(n)}\right) dx =$$

$$= \int\limits_{G_\delta^1} \left[W\left(\vec{u}^{(n)}\right) - \vec{K}\cdot\vec{u}^{(n)}\right] dx + \Phi_\delta^{(n)}\left(\vec{u}\right) + \Phi_\delta^{(n)}\left(\tilde{\vec{u}}^{(n)}\right) - \Phi_\delta^{(n)}\left(\vec{u}\right). \tag{3.10}$$

Из неравенства (2. 2) вытекает

$$\sqrt{\Phi_\delta^{(n)}\left(\tilde{\vec{u}}^{(n)}\right)} - \sqrt{\Phi_\delta^{(n)}\left(\vec{u}\right)} \leqslant \sqrt{\Phi_\delta^{(n)}\left(\tilde{\vec{u}}^{(n)} - \vec{u}\right)}.$$

Отсюда и из неравенства (2. 3) получим

$$\Phi_\delta^{(n)}\left(\tilde{\vec{u}}^{(n)}\right) - \Phi_\delta^{(n)}\left(\vec{u}\right) \leqslant 3C(\delta)\left\|\vec{u}\right\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)}\left\|\tilde{\vec{u}}^{(n)} - \vec{u}\right\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)}.$$

Следовательно, на основании теоремы 2 неравенство (3. 10) дает

$$\lim_{\delta\to 0}\ \lim_{n=n_k\to\infty} I\left(\vec{u}^{(n)}\right) \geqslant I_C\left(\vec{u}\right). \tag{3.11}$$

Вектор $\vec{u}^{(n)}(x)$ — точка минимума функционала (3. 1). Значит, для любого вектора $\vec{h}^{(n)}(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G^{(n)})$ имеет место

$$I\left(\vec{u}^{(n)}\right) \leqslant I\left(\vec{h}^{(n)}\right). \tag{3.12}$$

Из неравенств (3. 11), (3. 12) и (3. 9) заключаем:

$$I_C\left(\vec{u}\right) \leqslant \lim_{\delta\to 0}\ \lim_{n=n_k\to\infty} I\left(\vec{u}^{(n)}\right) \leqslant \lim_{\delta\to 0}\ \overline{\lim_{n=n_k\to\infty}}\ I\left(\vec{h}_\delta^{(n)}\right) = I_C\left(\vec{h}\right).$$

Поскольку $\vec{h}(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ — произвольный, то $\vec{u}(x)$ есть точка минимума функционала (3. 5). Тем самым теорема 1 доказана.

В заключение автор выражает глубокую благодарность проф. В. А. Марченко за постановку задачи и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Я. Хруслов. О задаче Неймана в области со сложной границей. Матем. сб. Т. 83 (125); 4 (12), 1970.

2. С. Г. Михлин. Проблема минимума квадратичного функционала. М., 1970.

3. Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Физматгиз, 1966.

Поступила 28 октября 1970 г.