О РАВНОМЕРНОЙ ВЫПУКЛОСТИ И РАВНОМЕРНОЙ ГЛАДКОСТИ ПРОСТРАНСТВ ОРЛИЧА

В. А. Акимович

Известно, что рефлексивное банахово пространство, вообще говоря, не изоморфно равномерно выпуклому пространству. Цель этой заметки — показать, что для «почти всех» пространств Орлича рефлексивность влечет равномерную выпуклость. Точная формулировка приведена ниже (теорема 3).

Пусть $\Phi(u)$ и $\Psi(u)$ — взаимно дополнительные N-функции; $\varphi(u)$ и $\psi(u)$ их производные [1, стр. 11—26]. Пусть далее μ — σ — конечная мера на множестве Δ. Рассмотрим множество μ-измеримых функций $f(x)$ таких, что для некоторого $\alpha = \alpha(f)$

$$\int_\Delta \Phi |\alpha f(x)| \, d\mu < \infty.$$

На этом множестве можно ввести норму одним из двух способов:

$$\|f\|_{M\Phi} = \inf\left\{\frac{1}{\alpha} : \alpha > 0;\ \int_\Delta \Phi |\alpha f(x)| \, d\mu \leqslant 1\right\}, \tag{1}$$

$$\|f\|_\Phi = \sup \int_\Delta u(x) \, |f(x)| \, d\mu, \tag{2}$$

где верхняя грань берется по всем $u(x) \geqslant 0$ таким, что

$$\int_{\Delta} \Psi(u(x))\, d\mu \leqslant 1.$$

Полученные пространства Орлича обозначаются соответственно $L_{M\Phi}$ и L_{Φ} [2]. Нормы (1) и (2) эквивалентны:

$$\|f\|_{M\Phi} \leqslant \|f\|_{\Phi} \leqslant 2\|f\|_{M\Phi}.$$

Говорят, что N-функция $\Phi(u)$ удовлетворяет условиям (Δ_2), если существуют $u_0 > 0$ и M такие, что

$$\Phi(2u) \leqslant M\Phi(u) \quad (u \geqslant u_0). \tag{3}$$

Если соотношение (3) выполнено при $0 < u < u_0$, то говорят, что $\Phi(u)$ удовлетворяет условию (δ_2). Если, наконец, условия (Δ_2) и (δ_2) выполнены одновременно, то говорят, что выполнено (Δ_2, δ_2) условие.

В терминах (Δ_2) и (δ_2) условий получен критерий рефлексивности пространства Орлича [2].

Теорема 1. *Пусть мера μ подчинена одному из трех требований:*

a) $\mu(\Delta) < \infty$ (случай, когда мера чисто атомная и $\mu(x_{i+1}) \times \times \mu^{-1}(x_i) \downarrow 0$ исключается);

b) $\mu(\Delta) = \infty$ и Δ содержит множество бесконечной меры, свободное от атомов;

c) $\mu(\Delta) = \infty$; мера чисто атомная;

$$0 < \inf_i \mu(x_i) \leqslant \sup_i \mu(x_i) < \infty.$$

Тогда пространство L_{Φ} (и $L_{M\Phi}$) рефлексивно в том и только в том случае, если функции $\Phi(u)$ и $\Psi(u)$ удовлетворяют соответственно условиям (Δ_2), (Δ_2, δ_2), (δ_2).

Функцию $\Phi(u)$ назовем усиленно выпуклой, если каждому $a \in (0, 1)$ соответствует $\beta(a) \in (0, 1)$ такое, что

$$\Phi\left(\frac{u + bu}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}(1 - \beta(a))\,[\Phi(u) + \Phi(bu)] \tag{4}$$

для всех $b \in [0, 1]$ и всех $u \geqslant 0$.

Банахово пространство X называется равномерно выпуклым, если его модуль выпуклости

$$\delta(\varepsilon) = \inf_{\substack{\|x\| = \|y\| = 1 \\ \|x - y\| \geqslant \varepsilon}} \left(1 - \left\|\frac{x + y}{2}\right\|\right) \quad (0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2)$$

отличен от нуля при $\varepsilon > 0$.

Банахово пространство X называется равномерно гладким, если его модуль гладкости

$$\rho(\tau) = \frac{1}{2} \sup_{\substack{\|x\| = \|y\| = 1 \\ \|x - y\| \geqslant \tau}} (\|x + \tau y\| + \|x - \tau y\| - 2)$$

при $\tau \to 0$ убывает быстрее чем τ.

Банахово пространство равномерно выпукло в том и только в том случае, если сопряженное пространство равномерно гладко.

Теорема 2. *Если нормирующая функция* $\Phi(u)$ *усиленно выпукла и удовлетворяет условию* (Δ_2, δ_2), *то пространства* $L_{M\Phi}$ *и* L_Φ *равномерно выпуклы* [2], [3].

Лемма 1. *Функция* $\Phi(u)$ *усиленно выпукла в том и только в том случае, если каждому* $\varepsilon > 0$ *можно сопоставить такое* $k(\varepsilon) > 1$, *что для всех* $u \geqslant 0$ *выполнено неравенство*

$$\varphi((1+\varepsilon)u) \geqslant k(\varepsilon)\varphi(u). \tag{5}$$

Необходимость. В неравенстве (4) возьмем $b = a = \frac{1}{1+\varepsilon}$ и перепишем его в виде

$$\Phi\left(u + \frac{\varepsilon}{2}u\right) \leqslant \left[1 - \beta\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)\right][\Phi(u) + \Phi(u + \varepsilon u)]$$

или

$$\Phi(u + \varepsilon u) - \Phi\left(u + \frac{\varepsilon}{2}u\right) \geqslant \Phi\left(u + \frac{\varepsilon}{2}u\right) - \Phi(u) + \\ + \beta\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)[\Phi(u) + \Phi(u + \varepsilon u)]. \tag{6}$$

Воспользовавшись неравенствами

$$\frac{\varepsilon u}{2}\varphi(u) \leqslant \Phi\left(u + \frac{\varepsilon}{2}u\right) - \Phi(u) \leqslant \Phi(u + \varepsilon u) - \\ - \Phi\left(u + \frac{\varepsilon}{2}u\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}u\,\varphi(u + \varepsilon u),$$

преобразуем (6) к виду

$$\frac{\varphi((1+\varepsilon)u)}{\varphi(u)} \geqslant 1 + \beta\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)\frac{\Phi(u+\varepsilon u) + \Phi(u)}{\Phi\left(u + \frac{\varepsilon}{2}u\right) - \Phi(u)} \geqslant 1 + \beta\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right).$$

Таким образом, из (4) следует (5), если положить

$$k(\varepsilon) = 1 + \beta\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right) > 1.$$

Достаточность. Прежде всего покажем, что для усиленной выпуклости достаточно, чтобы каждому $a \in (0, 1)$ соответствовало $\delta(a) \in (0, 1)$ такое, что

$$2\Phi\left(\frac{u + au}{2}\right) \leqslant \frac{1 - \delta(a)}{2}[\Phi(u) + \Phi(au)].$$

Для этого проверим, что функция

$$\Theta(a) = \frac{\Phi(u) + \Phi(au)}{\Phi\left(\frac{u + au}{2}\right)}$$

при $0 < a < 1$ не возрастает.

Функция $\Theta(a)$ — непрерывна, если $\Phi\left(\frac{u+au}{2}\right) \neq 0$ (в этом исключительном случае утверждение очевидно). Кроме того, почти всюду имеет производную и

$$\Theta'(a) = \frac{u\cdot\varphi(au)\cdot\Phi\left(\frac{u+au}{2}\right) - \frac{u}{2}\varphi\left(\frac{u+au}{2}\right)[\Phi(u)+\Phi(au)]}{\Phi^2\left[\frac{u+au}{2}\right]} \leqslant 0.$$

Для завершения доказательства покажем, что

$$\frac{\Phi(u)+\Phi(au)}{2\Phi\left(\frac{u+au}{2}\right)} \geqslant C_a > 1:$$

$$\frac{\Phi(u)+\Phi(au)}{2\Phi\left(\frac{u+au}{2}\right)} = \frac{2\Phi\left(\frac{u+au}{2}\right) + \int\limits_{\frac{u+au}{2}}^{u} \varphi(\xi)\,d\xi}{2\Phi\left(\frac{u+au}{2}\right)} -$$

$$- \frac{\int\limits_{au}^{\frac{u+au}{2}} \varphi(\xi)\,d\xi}{2\Phi\left(\frac{u+au}{2}\right)} = 1 + \frac{\int\limits_{au}^{\frac{(a+1)u}{2}} \left[\varphi\left(\xi + \frac{(1-a)u}{2}\right) - \varphi(\xi)\right] d\xi}{2\Phi\left(\frac{u+au}{2}\right)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1 + \left(k\left(\frac{2}{1+a}\right) - 1\right)\cdot \int\limits_{au}^{(a+1)\frac{u}{2}} \varphi(\xi)\,d\xi}{2\Phi\left(\frac{u+au}{2}\right)} \geqslant 1 + \frac{\left(k\left(\frac{2}{1+a}\right)-1\right)(1-a)}{1+a} = C_a.$$

В последнем неравенстве используем (5). Очевидно, $C_a > 1$.

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма, первая часть которой доказана в [1], а вторая доказывается аналогично.

Лемма 2. *Пусть для N-функций $\Phi_1(u)$ и $\Phi_2(u)$ выполнено неравенство $\Phi_1(u) \leqslant \Phi_2(u)$ для $u \geqslant u_0$ $[u \leqslant u_0]$. Тогда для дополнительных функций $\Psi_1(v)$ и $\Psi_2(v)$ справедливо неравенство*

$$\Psi_1(v) \geqslant \Psi_2(v) \text{ для } v \geqslant v_0 \ [\text{для } v \leqslant v_0].$$

Теорема 3. *Пусть мера μ ограничена условиями теоремы 1 и пространство $L_{M\Phi}$ рефлексивно. Тогда можно выбрать N-функцию $\Phi_1(u)$ так, что*

1) *нормы $\|\ \|_{M\Phi}$ и $\|\ \|_{M\Phi_1}$ эквивалентны;*
2) *пространства $L_{M\Phi_1}$ и $L_{M\Psi_1}$ равномерно выпуклы.*

Для доказательства нам потребуется следующая

Лемма 3. *Если дополнительные N-функции $\Phi(u)$ и $\Psi(v)$ удовлетворяют одному из трех условий* a) (Δ_2), b) (δ_2), c) (Δ_2, δ_2), *то существуют усиленно выпуклые N-функции $\Phi_1(u)$ и дополнительная к ним $\Psi_1(v)$, удовлетворяющие соответственно условиям:*

$$a\Phi(u) \leqslant \Phi_1(u) \leqslant b\Phi(u)$$

для $u \geqslant u'$, $u \leqslant u'$, $u \geqslant 0$, где a, b и u' — *некоторые положительные постоянные.*

Доказательство. Пусть $\Phi(u)$ и $\Psi(v)$ удовлетворяют условию (Δ_2). Тогда для некоторых u_0, v_0, M и N выполняются неравенства

$$\Phi(2u) \leqslant M\Phi(u) \quad (u \geqslant u_0), \tag{7}$$

$$\Psi(2v) \leqslant N\Psi(v) \quad (v > v_0). \tag{8}$$

Обозначим $\frac{\Psi(2v)}{N}$ через $\Psi^\circ(v)$, тогда для дополнительной функции $\Phi^0(u)$ [1] получаем выражение

$$\Phi^0(u) = \frac{\Phi\left(\frac{N}{2} \cdot u\right)}{N}$$

и для $u \geqslant \psi(v)$ имеем, по лемме 2,

$$\Phi\left(\frac{N}{2}u\right) \geqslant N\Phi(u) \quad (u \geqslant \psi(v_0)). \tag{9}$$

Кроме того, из (7) следует

$$u\varphi(u) \leqslant M\Phi(u). \tag{10}$$

Считая $\psi(v_0) \geqslant u_0$, из условий (9) и (10) получаем

$$\varphi\left[\left(\frac{N}{2}\right)^n u\right] \geqslant \frac{\Phi\left[\left(\frac{N}{2}\right)^n u\right]}{\left(\frac{N}{2}\right)^n u} \geqslant \frac{\Phi(u) \cdot 2^n}{u} \geqslant \frac{\varphi(u) \cdot 2^n}{M} \quad \text{для } u \geqslant u_0. \tag{11}$$

Пусть

$$m = [\log_2 M] + 1, \quad l = \left(\frac{N}{2}\right)^m.$$

Тогда

$$\varphi(lu) \geqslant k\varphi(u), \tag{12}$$

где

$$k = \frac{2^m}{M} > 1.$$

Возьмем последовательность точек

$$u_k = u_0 \cdot l^k \quad (k = 0, 1, 2 \ldots)$$

и определим функцию $\varphi_1(u)$ следующим образом: $\varphi_1(u)$ — непрерывна; $\varphi_1(0)=0$; $\varphi_1(u_k)=\varphi(u_k)$; $\varphi_1(u)$ — линейна в интервалах между этими точками. Докажем, что для любого $\varepsilon>0$ найдется $k_\varepsilon>1$ и что

$$\varphi_1((1+\varepsilon)u)\geqslant k_\varepsilon\varphi(u). \tag{13}$$

Будем считать, не уменьшая общности, что $1+\varepsilon\leqslant l$. Рассмотрим сначала случай, когда $(u,\ (1+\varepsilon)u)\subset(u_k,\ u_{k+1})$ для некоторого k. Тогда $\varphi_1(u)$ на интервале $(u,\ (1+\varepsilon)u)$ имеет вид

$$\varphi_1(u)=au+b,\ \text{где}\ a>0.$$

Если $b\geqslant 0$, то

$$\frac{\varphi_1((1+\varepsilon)u)}{\varphi_1(u)}\geqslant\frac{\varphi_1((1+\varepsilon)u_k)}{\varphi_1(u_k)}\geqslant\frac{\varphi_1(u_k)+\dfrac{\varphi_1(u_{k+1})-\varphi_1(u_k)}{u_{k+1}-u_k}\,\varepsilon u_k}{\varphi_1(u_k)}\geqslant$$

$$\geqslant 1+\frac{\varphi(u_{k+1})-\varphi(u_k)}{\varphi(u_k)}\cdot\frac{\varepsilon u_k}{u_{k+1}-u_k}\geqslant 1+(k-1)\cdot\frac{\varepsilon}{l-1},$$

где левое неравенство вытекает из того, что $\left[\dfrac{acx+b}{ax+b}\right]'>0$ при $a,\ b>0,\ c>1$. Если $b\leqslant 0$, определяя $\varphi_1(u)=au+b$ для $u\geqslant u_{k+1}$, получаем

$$\frac{\varphi_1(u+\varepsilon u)}{\varphi_1(u)}\geqslant\frac{\varphi_1((1+\varepsilon)u_{k+1})}{\varphi(u_{k+1})}=\frac{\varphi_1(u_{k+1})+\dfrac{\varphi_1(u_{k+1})-\varphi(u_k)}{u_{k+1}-u_k}\cdot\varepsilon u_{k+1}}{\varphi_1(u_{k+1})}=$$

$$=1+\frac{\varphi_1(u_{k+1})-\varphi_1(u_k)}{\varphi_1(u_{k+1})}\cdot\frac{\varepsilon u_{k+1}}{u_{k+1}-u_k}\geqslant 1+\frac{\varepsilon}{1-\dfrac{1}{l}}\left[1-\frac{1}{k}\right]=$$

$$=1+\frac{l\cdot\varepsilon}{l-\varepsilon}\cdot\frac{k-1}{k}.$$

Следовательно, если $(u,\ (1+\varepsilon)u)\subset(u_k,\ u_{k+1})$ для некоторого k, тогда

$$\frac{\varphi_1(u+\varepsilon u)}{\varphi_1(u)}\geqslant 1+(k-1)\cdot\frac{\varepsilon}{l-1}\min\left[1,\ \frac{l}{k}\right]. \tag{14}$$

Обозначим правую часть неравенства (14) через m_ε. Так как при $u>u_0$ один из двух интервалов $(u+\varepsilon u,\ \sqrt{1+\varepsilon}\,u)\,(\sqrt{1+\varepsilon}u,\ u)$ находится в некотором интервале $(u_k,\ u_{k+1})$, то

$$\frac{\varphi_1(u+\varepsilon u)}{\varphi_1(u)}\geqslant m_{\sqrt{1+\varepsilon}-1}\ \text{для}\ u>u_0.$$

Обозначив последнюю постоянную через k'_ε, получим (13) для $u\geqslant u_0$. Легко видеть, что k'_ε можно выбрать так, чтобы неравенство (13) имело место при всех $u\geqslant 0$

$$\Phi_1(u)=\int\limits_0^u\varphi(\eta)\,d\eta.$$

По лемме 1 функция $\Phi_1(u)$ усиленно выпукла.

Так как функция $\Phi(u)$ удовлетворяет (Δ_2) условию, для любого $c > 1$ найдется $m(c)$ такое, что

$$\varphi(cu) \leqslant m(c)\,\varphi(u) \tag{15}$$

для достаточно больших u. Тогда для любого $c > 1$ найдется u_1 такое, что

$$\varphi_1(cu) \leqslant m(l^2 c)\,\varphi_1(u), \quad (u \geqslant u_1). \tag{16}$$

Так как $\psi_1(v)$ непрерывно и монотонно возрастает,

$$\psi_1(m(l^2 c)\,v) \geqslant c\psi_1(v_0) \quad (v \geqslant \varphi_1(u_0)). \tag{17}$$

Нетрудно видеть, что из (17) следует усиленная выпуклость функции $\Psi_1(v)$.

Докажем, что существуют постоянные s_1 и s_2 такие, что для достаточно больших u

$$s_1\varphi(u) \leqslant \varphi_1(u) \leqslant s_2\varphi(u).$$

Пусть u принадлежит интервалу (u_{k-1}, u_k), тогда

$$\varphi_1(u) \leqslant \varphi_1(u_k) = \varphi(u_k) \leqslant m\left(\frac{u_k}{u}\right)\varphi(u) \leqslant m(l)\,\varphi(u)$$

и

$$\varphi_1(u) \geqslant \varphi_1(u_{k-1}) \geqslant \frac{1}{m\left(\dfrac{u}{u_{k-1}}\right)}\varphi(u) \geqslant \frac{1}{m(l)}\varphi(u)$$

для достаточно больших u. Отсюда следует, что для любого ε и достаточно больших u выполняется неравенство

$$\frac{1}{m(l)+\varepsilon}\Phi(u) \leqslant \Phi_1(u) \leqslant (m(l)+\varepsilon)\,\Phi(u).$$

Пусть $\Phi(u)$ и $\Psi(v)$ удовлетворяют условию (δ_2). Аналогично предыдущему пункту можно показать, что для некоторого $l > 1$ существуют k и u_0 такие, что

$$\varphi(lu) > k\varphi(u) \quad (\text{для } u \leqslant u_0). \tag{12'}$$

Возьмем последовательность точек

$$u_k = u_0 l^k \quad (k = 0, -1, -2, -\ldots).$$

Определим функцию $\varphi_1(u)$ следующим образом: $\varphi_1(u)$ — непрерывна; $\varphi_1(0) = 0$; $\varphi_1(u_k) = \varphi(u_k)$ для всех k; в интервалах между точками u_k функция линейна; для $u \geqslant u_0$, $\varphi_1(u)$ возрастающая линейная функция

$$\Phi_1(u) = \int_0^u \varphi(\xi)\,d\xi.$$

Доказательство производится как в предыдущем случае.

Доказательство теоремы 3. Выполнение условия (Δ_2, δ) для функций $\Phi_1(u)$ и $\psi_1(v)$ следует из усиленной выпуклости $\psi_1(v)$ и $\Phi_1(u)$.

Эквивалентность норм также следует из леммы 3.

Автор выражает глубокую благодарность М. И. Кадецу за внимание к работе и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий. Выпуклые функции и пространства Орлича. М., Физматгиз, 1958.

2. W. A. J. Luxemburg. Banach function spaces. Doctoral dissertation. Delft, 1955.

3. T. Ando. Convexity and evenness in modulared semi-ordered linear spaces. «J. Fac. Sci. Hokkaido Univ». Sa ser. 1, 1959, 14, № 2—4, 59—95.

Поступила 28 октября 1970 г.