РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ГОЛОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ НА ГРАНИЦЕ ПОЛИЭДРИЧЕСКОГО МНОЖЕСТВА

С. Ю. Фаворов

В [1—3] содержатся следующие результаты*.

Теорема 1. *Пусть функция $g(z)$ аналитическая в полицилиндре $D=\{z: z_i \in D_i,\ i=1, \ldots, n\}$, где D_i — области в C^1. Пусть далее $z^0 \in \partial D$ — особая точка функции $g(z)$, $P=\{i: z_i^0 \in \partial D_i\}$. Тогда все точки многообразия $N=\{z: z_i=z_i^0,\ i \in P,\ z_i \in D_i,\ i \bar{\in} P\}$ являются особыми точками функции $g(z)$.*

Здесь этот результат распространяется на случай связных полиэдрических множеств. Напомним определение такого множества.

Пусть область $G \subset C^n$, области $G_i \subset C^1$, $i=1, \ldots, N$, а функции $f_i(z)$ голоморфны в G. Множество $\Pi=\{z \in G: f_i(z) \in G_i,\ i=1, \ldots, N\}$ называется *связным полиэдрическим множеством*, если оно связно и компактно в G. В частном случае, когда G_i — круги, множество Π называется *аналитическим полиэдром*.

Множества вида $\{z: f_i(z)=c_i \in \partial D_i,\ i \in S,\ f_i(z) \in D_i,\ i \bar{\in} S\}$, где S — произвольная выборка из чисел $1, \ldots, N$, естественно называть *гранью* полиэдрического множества.

Мы будем рассматривать лежащие на гранях аналитические поверхности, т. е. множества, локально задаваемые голоморфным отображением $z=z(\zeta)$, $\zeta \in C^k$, $k<n$.

При некоторых условиях оказывается, что связная аналитическая поверхность, лежащая на границе полиэдрического множества и имеющая хотя бы одну общую точку с гранью полиэдрического множества, полностью лежит на этой грани.

Точнее, верна следующая

Лемма. *Пусть $\Pi \subset C^n$ — полиэдрическое множество, для которого выполнено условие*

A) $\partial G_i=\partial \bar{G}_i$, $i=1, \ldots N$.

Пусть $M \subset \bar{\Pi}$ — связная аналитическая поверхность. Тогда, если $z^0 \in M$ и $f_{i_1}(z^0)=c_1, \ldots, f_{i_p}(z^0)=c_p$, где $c_1 \in \partial D_{i_1}, \ldots, c_p \in \partial D_{i_p}$, для всех $z \in M$ $f_{i_k}(z)=c_k$, $k=1, \ldots, p$.

Доказательство. Множество тех $z' \in M$, для которых $f_{i_k}(z')=c_k$, $k=1, \ldots, p$, очевидно, не пусто и замкнуто** в M. Поэтому, учитывая связность M, для доказательства леммы достаточно показать, что указанное множество открыто в M.

---

* В [1] — первой работе в этом направлении — рассматривается случай бикруга, в [3] — теорема доказана в полном объеме.

** Топология в M считается индуцированной топологией пространства C^n.

Пусть z' принадлежит этому множеству, т. е. $f_{i_1}(z') = c_1, \ldots, f_{i_p}(z') = c_p$. Тогда в окрестности точки z' M задается голоморфным отображением $z = z(\zeta)$, $z' = z(\zeta')$.

Если предположить, что $f_i(z(\zeta))$ не равна тождественно постоянной в окрестности точки ζ', то образ окрестности точки ζ' есть окрестность точки $f_i(z(\zeta'))$. В силу условия А) в любой окрестности точки из ∂G_i найдутся точки из внутренности CG_i^*. Поэтому, если $f_i(z(\zeta')) \in \partial G_i$, найдутся точки из окрестности ζ', которые при отображении $f_i(z(\zeta))$ попадут во внутренность CG_i, что невозможно, так как $M \subset \overline{\Pi}$.

Следовательно, $f_{i_k}(z) \equiv c_k$, $k = 1, \ldots, p$ для всех точек из рассмотренной окрестности точки z' в M. Таким образом, множество тех $z' \in M$, для которых $f_{i_k}(z') = c_k$, $k = 1, \ldots, p$, открыто в M.

Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть* Π *— связное полиэдрическое множество, удовлетворяющее условию* А), $M \subset \partial\Pi$ *— связная аналитическая поверхность.*

Пусть далее для каждой точки $z \in M$ *выполнено условие*

$$\text{В) ранг матрицы} \quad \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial f_{i_1}}{\partial z_1} & \ldots\ldots\ldots & \dfrac{\partial f_{i_1}}{\partial z_n} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_{i_p}}{\partial z_1} & \ldots\ldots\ldots & \dfrac{\partial f_{i_p}}{\partial z_n} \end{matrix} \right\| \quad \text{равен } p < n,$$

где $f_{i_1}, \ldots, f_{i_p}$ *— все те функции из* $\{f_i\}_{i=1}^N$, *значения которых в рассматриваемой точке принадлежат границе соответствующей области* G_i.

Тогда функция $g(z)$, *голоморфная в* Π *и в одной точке из* M, *голоморфно продолжается из* Π *на все точки* M.

Доказательство. Обозначим множество тех точек из M, в которые функция $g(z)$ голоморфно продолжается из Π, через M_1. Обозначим далее $M_2 = M \setminus M_1$; M_1 по условию не пусто и, очевидно, открыто. Поэтому, учитывая связность M, теорема будет доказана, если мы покажем, что M_2 открыто в M.

Пусть

$$z^0 \in M_2, \quad S = \{i : f_i(z^0) \in \partial G_i\}, \quad S = \{i_1, \ldots, i_p\}.$$

Обозначим

$$d(z, z') = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |z_i - z_i'|,$$

$$d(M, N) = \inf_{z \in M,\, z' \in N} d(z, z').$$

---

* $CG_i = C^1 \setminus G_i$.

Рассмотрим такую окрестность U_1 точки z^0, что при некотором $\alpha > 0$ $d(f_i(U_1), \partial G_i) \geqslant \alpha$ при $i \overline{\in} S$. Такая окрестность U_1 существует, так как $f_i(z^0) \in G_i$ при $i \overline{\in} S$.

В силу условия В) существуют такие $z_{k_{p+1}}, \ldots, z_{k_n}$, что голоморфное отображение $w = F(z)$, определяемое равенствами $w_1 = f_{i_1}(z), \ldots, w_p = f_{i_p}, w_{p+1} = z_{k_{p+1}}, \ldots, w_n = z_{k_n}$, обратимо в некоторой окрестности U_2 точки z^0. Перейдем в окрестности $U = U_1 \cap U_2$ к новым переменным $w_1, \ldots, w_n$. Ввиду обратимости голоморфного отображения $w = F(z)$ для доказательства нашего утверждения достаточно показать существование такой окрестности точки $w^0 = F(z^0)$ в $F(M \cap U)$, что ни в одну точку ее нельзя продолжить $g(F^{-1}(w))$.

Рассмотрим какой-нибудь поликруг $B(w^0, \delta) = \{w : |w_i - w_i^0| < \delta, \quad i = 1, \ldots, n\}$ такой, что $B(w^0, \delta) \subset F(\overline{U})$ и $|f_i[F^{-1}(w)] - f_i[F^{-1}(w^0)]| < \alpha$ при $i \overline{\in} S$ и $w \in B(w^0, \delta)$. Заметим, что $f_i[F^{-1}(w)] \in G_i$ при $i \overline{\in} S$, $w \in B(w^0, \delta)$, и поэтому $w \in F(\Pi \cap U) \cap B(w^0, \delta)$ тогда и только тогда, когда $w \in B(w^0, \delta)$ и $w_k \in G_{i_k}$, $k = 1, \ldots, p$.

Применим теорему 1, положив

$$D_k = G_{i_k} \cap \{w_k : |w_k - w_k^0| < \delta\}, \quad k = 1, \ldots, p,$$

$$D_k = \{w_k : |w_k - w_k^0| < \delta\}, \quad k = p + 1, \ldots, n.$$

Функция $g(F^{-1}(w))$ голоморфна в $D = \{w : w_k \in D_k, k = 1, \ldots, n\}$, так как из того, что $w \in D$, следует, что $|w_k - w_k^0| < \delta$, $k = 1, \ldots, n$, и $w_k \in G_{i_k}$, $k = 1, \ldots, p$, т. е. $w \in F(\Pi \cap U) \cap B(w^0, \delta)$. Точка w^0 — особая для этой функции, и значит, по теореме 1 многообразие $N = \{w : w_i = w_i^0, \quad i \leqslant p, \quad |w_i - w_i^0| < \delta, \quad i > p\}$ состоит из особых точек.

Но по лемме во всех точках M $f_{i_k}(z) = f_{i_k}(z^0)$, $k = 1, \ldots, p$, и, следовательно, $F(M \cap U) \cap B(w^0, \delta) \subset N$. Поэтому $g(F^{-1}(w))$ не продолжается в точки множества $F(M \cap U) \cap B(w^0, \delta)$.

Теорема доказана.

Замечание. Условия А) и В) — необходимые. Об этом свидетельствуют следующие примеры.

Пример 1. Пусть

$$M = \{(z_1, z_2) : z_1 = 1, |z_2| < 1\},$$

$$D_1 = \{z_1 : |z_1| < 1\}, \quad D_2 = \{z_2 : |z_2| < 1, \ z_2 \overline{\in} [0, 1]\}.$$

Пусть $f(z_2)$ — функция, голоморфная в области D_2 и имеющая особенности на множестве $[0, 1]$. Тогда функция $g(z_1, z_2) = f(z_2)$ голоморфна в области $D = \{z : z_1 \in D_1, \ z_2 \in D_2\}$ и во всех точках $M \subset \partial D$, кроме точек вида $\{(z_1, z_2) : z_1 = 1, \ z_2 \in [0, 1]\}$.

Пример 2. Пусть полиэдр G и аналитическая поверхность M определены соответственно равенствами

$$G = \{(z_1, z_2) : |z_1 z_2 - 1| < 1, |z_1| < N, |z_2| < N\},$$
$$M = \{(z_1, z_2) : z_1 = 0, |z_2| < N\}.$$

Функция $g(z_1, z_2) = \frac{1}{z_2}$ голоморфна в G и во всех точках M, кроме точки $z_1 = 0$, $z_2 = 0$.

Заметим, что ранг матрицы $\|z_2, z_1\|$ в точке (0,0) равен 0, т. е. условие В) не выполнено.

Пользуюсь случаем выразить признательность Л. И. Ронкину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Иванов. Характеристика роста целой функции и ее применение к суммированию двойных степенных рядов. «Матем. сб.», 47, 1959.

2. Л. И. Ронкин. Об одном свойстве расположения особенностей на границе полицилиндра и применении его к целым функциям многих переменных. ДАН СССР, 153, № 2 (1963).

3. Л. И. Ронкин. Об одном обобщении сильной теоремы о «диске». Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 4. Изд-во Харьковск. ун-та, 1967.

Поступила 28 октября 1970 г.