О НОРМАЛЬНЫХ И ОШТУКАТУРИВАЕМЫХ КОНУСАХ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

И. Ф. Даниленко

В работе рассматриваются два свойства конуса: нормальность и оштукатуриваемость. Нормальные конусы изучались в локально выпуклых пространствах многими авторами. Что касается оштукатуриваемости конусов, понятие которых для банахового пространства было введено М. А. Красносельским [1], то это понятие, насколько известно автору, до сих пор в общих локально выпуклых пространствах не рассматривалось.

Пусть X — локально выпуклое пространство, полуупорядоченное с помощью конуса K. Исходную локально выпуклую топологию пространства обозначим τ. Определение нормальности конуса в локально выпуклом пространстве в различных эквивалентных между собой формулировках можно найти в [1—4]. Приведем здесь лишь два из них.

Конус K в локально выпуклом пространстве (X, τ) называется нормальным, если существует система полунорм, определяющих топологию пространства τ, монотонных на конусе K [2, гл. V, п. 3. 1].

Другое определение нормальности конуса в локально выпуклом пространстве (X, τ) можно сформулировать следующим образом. Для $x, y \in X$ обозначим через $[x, y]$ порядковый интервал в X с концами x и y, т. е. множество всех z, удовлетворяющих неравенствам $x \leqslant z \leqslant y$. Если множество $A \subset X$, то через $[A]$ обозначим множество $U \{[x, y] : x, y \in A\}$ — насыщение множества A по отношению порядка $\geqslant$ [2]. Пусть $\{U\}$ — фундаментальная система окрестностей нуля локально выпуклого пространства (X, τ), состоящая из абсолютно выпуклых множеств U. Множества $[U]$ симметричны, выпуклы и в совокупности образуют базис окрестностей нуля некоторой локально выпуклой топологии в X, которую обозначим τ^1_{sh}. Конус K называется нормальным по отношению к топологии τ, если топологии τ и τ^1_{sh} совпадают [2, гл. V, п. 3. 1].

Укажем иной подход к понятию нормальности конуса в локально выпуклом пространстве. Рассмотрим сначала локально выпуклое пространство (X, τ) с воспроизводящим конусом K $(X = K - K)$. Пусть топология τ определяется мажорантной системой полунорм $P = \{l\}$. Такую систему полунорм будем называть τ-комплектом. Для каждой $l \in P$ построим функционал p_l по формуле

$$p_l(x) = \inf_{u \geqslant 0,\, x} l(u) + \inf_{v \geqslant 0,\, -x} l(v).$$

Легко проверить, что система функционалов $P_+ = \{p_l\}$ является мажорантной системой полунорм на X. Локально выпуклую топологию в X, определяемую этой системой полунорм, будем обозначать τ_+. Подробное изучение свойств топологии τ_+ проводится в другой работе. Отметим здесь лишь некоторые элементарные свойства функционалов p_l и топологии τ_+. Нетрудно показать, что совокупность множеств

$$U_{l,\lambda} = \bigcup_{u,\, v \geqslant 0;\; l(u),\, l(v) \leqslant \lambda} [-v, u],$$

где l входит в τ-комплект P полунорм в X, образует базис окрестностей нуля в топологии τ_+. Заметим, что если $l \in P$ и $\lambda > 0$, то $p_{\lambda l} = \lambda p_l$, а если $l_1 \leqslant l_2$, то $p_{l_1} \leqslant p_{l_2}$. Отсюда видно, что для τ-комплекта P полунорм такого, что $\lambda l \in P$, если $l \in P$, следует, что совокупность множеств $U_l = U_{l,1}$ $(l \in P)$ образует базис окрестностей нуля в (X, τ_+). Связь между топологиями τ, τ^1_{sh} и τ_+ дается следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть (X, τ) — локально выпуклое пространство с воспроизводящим конусом K. Тогда топология τ^1_{sh} совпадает с топологией $\tau \wedge \tau_+$**).

Доказательство. Пусть V — произвольная абсолютно выпуклая окрестность нуля в топологии $\tau \wedge \tau_+$. Из определения топологии $\tau \wedge \tau_+$ следует, что существует полунорма $l \in P$ такая, что множество $U \cup U_l \subset V$, где $U = \{x : l(x) \leqslant 1\}$ — окрестность нуля в (X, τ). Множество $[U]$ — окрестность нуля в $(X, \tau^1_{\mathrm{sh}})$. Если $z \in [U]$, то существуют $x, y \in U$ такие, что $x \leqslant z \leqslant y$, следовательно,

$$\frac{z-x}{2} \in \left[0, \frac{y-x}{2}\right] \text{ и } l\left(\frac{y-x}{2}\right) \leqslant 1.$$

Тогда, по определению множества U_l получаем, что $\frac{z-x}{2} \in U_l$.

Так как $\frac{x}{2} \in \frac{1}{2} U$, то справедливо включение

$$\frac{z}{2} = \frac{z-x}{2} + \frac{x}{2} \in U_l + \frac{1}{2} U \subset V + \frac{1}{2} V = \frac{3}{2} V.$$

Элемент z из $[U]$ произволен, поэтому можно заключить, что $[U] \subset 3V$. Таким образом, доказано, что топология τ^1_{sh} сильнее топологии $\tau \wedge \tau_+$. Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что топология τ^1_{sh} слабее топологии τ и τ_+ соответственно. Ясно, что топология τ^1_{sh} слабее топологии τ. Нетрудно увидеть, что множество $U_l \subset [U]$ для любой $l \in P$, следовательно, топология τ_+ сильнее топологии τ^1_{sh}. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть (X, τ) — локально выпуклое пространство с воспроизводящим конусом K. Конус K нормален в (X, τ) тогда и только тогда, когда $\tau_+ \geqslant \tau$.*

Рассмотрим локально выпуклое пространство (X, τ) с конусом K, причем конус K не обязательно воспроизводящий в X. Выделим в X линейное подпространство $Y = K - K$ и рассмотрим локально выпуклое пространство (Y, τ_i), где τ_i — топология в Y, индуцированная из (X, τ).

Следствие 2. *Пусть (X, τ) — локально выпуклое пространство, полуупорядоченное конусом K. Конус K нормален в (X, τ) тогда и только тогда, когда $\tau_i \leqslant (\tau_i)_+$.*

Доказательство. Если конус K нормален в (X, τ), то он будет нормальным и воспроизводящим в (Y, τ_i), а значит, по следствию 1 $\tau_i \leqslant (\tau_i)_+$.

Обратно, допустим, что $\tau_i \leqslant (\tau_i)_+$. В этом случае на Y существует τ-комплект $P = \{l\}$ полунорм, монотонных на K. Обозна-

*) Топология $\tau \wedge \tau_+$ — сильнейшая локально выпуклая топология в X, мажорируемая топологиями τ и τ_+.

чим через $\overline{P}=\{\bar{l}\}$ совокупность всех распространений $l \in P$ до полунорм, непрерывных в (X, τ). Покажем, что $\bar{P}$ определяет на X топологию τ. Пусть n — полунорма, непрерывная в (X, τ), тогда существует $l \in P$ и полунорма m, непрерывная в (X, τ), такие, что

$$n(x) \leqslant l(x) \leqslant m(x) \text{ при } x \in Y.$$

Из леммы 1 [5] следует, что существует распространение $\bar{l}$, как полунормы на X, так что $n(x) \leqslant \bar{l}(x) \leqslant m(x)$ при всех $x \in X$. Значит, $\bar{l} \in \bar{P}$ и $m \geqslant \bar{l} \geqslant n$. Таким образом, доказано, что $\bar{P}$ определяет топологию τ на X. Каждая из полунорм $\bar{l} \in \bar{P}$ монотонна на конусе K, следовательно, K нормален в (X, τ).

Выделим в локально выпуклом пространстве (X, τ) еще один класс конусов.

Определение. *Пусть (X, τ) — локально выпуклое пространство. Будем говорить, что конус K допускает оштукатуривание, если существует τ-комплект $P=\{l\}$ полунорм со следующим свойством: для каждой $l \in P$ существует такой линейный функционал $x_l' \in X'$*, что $\langle x, x_l' \rangle \geqslant l(x)$ при всех $x \geqslant 0$.*

Пусть K' — конус в X', сопряженный к конусу K, т. е. K' — множество всех таких $x' \in X'$, что $\langle x, x' \rangle \geqslant 0$ для всех $x \in K$. Справедлива следующая.

Лемма 1. *Конус K в (X, τ) допускает оштукатуривание тогда и только тогда, когда для каждой выпуклой окрестности нуля U существует такой линейный функционал $x' \in X'$, что $x' + U^\circ \subset K'$, где U° — поляра множества U в X.*

Доказательство. Пусть конус K допускает оштукатуривание в (X, τ). Не уменьшая общности, можно считать, что U — абсолютно выпуклая окрестность нуля. Выберем полунорму l из τ-комплекта P полунорм так, чтобы $U \supset \{x : l(x) \leqslant 1\}$ и пусть $x_l' \in X'$ — линейный функционал, соответствующий полунорме l по определению оштукатуриваемости конуса. Для любых $x \in K$ и $x' \in U^\circ$ имеем $-x' \in U^\circ$ и $\langle x, x_l' \rangle \geqslant l(x)$; $\langle x, -x' \rangle \leqslant l(x)$. Отсюда следует, что $\langle x, x' + x_l' \rangle \geqslant 0$ для всех $x \in K$ и $x' \in U^\circ$, следовательно, $x_l' + U^\circ \subset K'$.

Пусть теперь выполнены условия леммы. Для любой l из τ-комплекта P полунорм существует такой x_l', что $x_l' + U^\circ \subset K'$, где $U=\{x : l(x) \leqslant 1\}$. Тогда для любых $x \in K$ и всех $x' \in U^\circ$ справедливо $\langle x, x_l' - x' \rangle \geqslant 0$ или $\langle x, x_l' \rangle \geqslant \langle x, x' \rangle$. Переходя в правой части последнего неравенства к супремуму по $x' \in U^\circ$ и используя равенство

$$l(x) = \sup_{x' \in U^\circ} \langle x, x' \rangle,$$

* X' — совокупность всех линейных непрерывных функционалов в пространстве (X, τ).

получаем $\langle x, x_l' \rangle \geqslant l(x)$, следовательно, конус K допускает оштукатуривание.

Замечание. Лемма 1 показывает, что в нормированном пространстве конус K допускает оштукатуривание тогда и только тогда, когда сопряженный конус K' телесен. Тогда из теоремы 3 [6] следует, что для нормированных пространств приведенное выше определение конуса, допускающего оштукатуривание, и общепринятое [1] совпадают.

Свойства конусов, допускающих оштукатуривание, даются леммой 2.

Лемма. 2. *Пусть конус K в локально выпуклом пространстве (X, τ) допускает оштукатуривание. Тогда*:

1) *конус K-нормален*;

2) $\overline{K}$ *— замыкание конуса K в (X, τ) допускает оштукатуривание*;

3) *каждая монотонная, топологически ограниченная, обобщенная последовательность $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ фундаментальна в (X, τ)*;

4) *если конус K полон в топологии τ, то он удовлетворяет условию (A')**.

Доказательство. 1) Пусть $\{x_l'\}$ $(l \in P)$ — система линейных функционалов, соответствующая τ-комплекту P полунорм, из определения оштукатуриваемости конуса. Рассмотрим множество $P' = \{l'\}$ полунорм l' вида

$$l'(x) = |\langle x, x_l' \rangle| \vee l(x).$$

Ясно, что система P' полунорм определяет в X локально выпуклую топологию τ. Для каждого $x \geqslant 0$

$$l'(x) = \langle x, x_l' \rangle,$$

следовательно, l' аддитивна на конусе K. Отсюда следует заключение о нормальности конуса K в (X, τ).

2) следует сразу из определения конуса, допускающего оштукатуривание.

3) не уменьшая общности, можно считать, что $0 \leqslant x_\alpha \uparrow$. В этом случае для каждой $l' \in P'$

$$0 \leqslant l'(x_\alpha) \uparrow \text{ и } \{l'(x_\alpha)\} \ (\alpha \in A)$$

в совокупности ограничены, следовательно, обобщенная последовательность $\{l'(x_\alpha)\}$ $(\alpha \in A)$ фундаментальна. Последовательность x_α монотонная, а полунормы l' аддитивны на K; отсюда сразу следует, что $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ фундаментальна в (X, τ).

---

* В соответствии с обозначениями из [3] (стр. 207—208) будем говорить, что конус K удовлетворяет условию (A') в локально выпуклом пространстве (X, τ), если для каждой обобщенной последовательности $x_\alpha \downarrow 0$ следует, что $\{x_\alpha\}$ сходится к нулю в топологии τ.

4) пусть конус K полон в (X, τ) и $x_\alpha \downarrow 0$. Из нормальности конуса K следует, что множество $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \geqslant \alpha_0)$ при любом α_0 топологически ограничено. Тогда по 3) заключаем, что $\{x_\alpha\}$ фундаментальна. Конус K полон в (X, τ), следовательно, $\{x_\alpha\}$ сходится к элементу $x \geqslant 0$. Нетрудно показать, что $x_\alpha \geqslant x$ для каждого $\alpha \in A$, значит, $x = 0$.

Следует заметить, что если конус K допускает оштукатуривание, но не полон, то условие (A') и даже более слабое условие (A)* может быть не выполнено. Это вытекает из одного примера, который можно найти в [7].

Следствие. *Конус K в (X, τ) допускает оштукатуривание тогда и только тогда, когда существует определяющая топологию τ система полунорм, аддитивных на K.*

Доказательство. Если конус K допускает оштукатуривание, то из доказательства леммы следует, что существует система $P' = \{l'\}$ полунорм, аддитивных на K, определяющая топологию τ.

Обратно, допустим, что топология τ определяется системой $P = \{l\}$ полунорм, аддитивных на K. Не уменьшая общности, можно считать, что P — τ-комплект полунорм. Для каждого $l \in P$ определим на $Y = K - K$ (Y — линейное подпространство в X) функционал x'_l по формуле

$$<x, x'_l> = l(u) - l(v), \text{ где } u, v \in K \text{ и } x = u - v.$$

Из аддитивности l на K следует, что x'_l — однозначно определенная линейная форма на Y. Неравенство $l(x) \geqslant |l(u) - l(v)|$, где $x = u - v$, показывает, что x'_l — непрерывный линейный функционал на Y в топологии, индуцированной из (X, τ).

По теореме Хана — Банаха существует $\overline{x}'_l$ — непрерывный линейный функционал в (X, τ), продолжение функционала x'_l. Ясно, что система функционалов $\{\overline{x}'_l\}$ $(l \in P)$ по отношению к τ-комплекту $P = \{l\}$ полунорм удовлетворяет условию из определения оштукатуриваемости конуса. Следствие доказано.

Из леммы 2 следует, что конус K, допускающий оштукатуривание в (X, τ), нормален. Для одного важного класса локально выпуклых пространств из нормальности конуса следует его оштукатуриваемость.

Локально выпуклое пространство (X, τ) называется ядерным, если каждая фундаментальная система абсолютно выпуклых окрестностей нуля $\{U\}$ обладает следующим свойством:

---

* Условие (A) для конуса в локально-выпуклом пространстве формулируется так же, как и условие (A'), но только вместо обобщенных последовательностей надо брать обычные последовательности [3, стр. 207].

Q) Для всякой окрестности нуля U существует окрестность нуля V и последовательность линейных функционалов $a_n \in X'$ такие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{V^0}(a_n) < +\infty$$

и

$$p_U(x) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, a_n\rangle| \text{ для всех } x \in X.$$

Здесь p_U — функционал Минковского, соответствующий окрестности U, а p_{V^0} — функционал Минковского, соответствующий поляре V^0 окрестности V и определенный на линейной оболочке множества V^0 в X' [8, стр. 100].

Теорема 2. *В ядерном локально выпуклом пространстве каждый нормальный конус K допускает оштукатуривание.*

Доказательство. Пусть $\{U\}$ — система из абсолютно выпуклых окрестностей нуля в (X, τ), насыщенных по отношению порядка $\geqslant$. Такая система окрестностей существует в силу нормальности конуса K.

Система полунорм $P = \{p_U\}$ образует τ-комплект полунорм в X. Для каждой $p_U \in P$ существуют V и система линейных функционалов $a_n \in X'$, удовлетворяющие условию Q из определения ядерности. Из доказательства предложения 1.21 из [4, гл. II] следует, что каждый элемент a_n представим в виде

$$a_{n,1} - a_{n,2}, \text{ где } a_{n,1},\ a_{n,2} \in K'$$

(K' — сопряженный конус из X') и

$$p_{V^0}(a_{n,i}) \leqslant 2p_{V^0}(a_n) \text{ для } i = 1,\ 2;$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{V^0}(a_{n,1}) + p_{V^0}(a_{n,2}) = c < +\infty.$$

Определим на X линейную форму a следующим образом:

$$\langle x, a\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} [\langle x, a_{n,1}\rangle + \langle x, a_{n,2}\rangle] \text{ при всех } x \in X.$$

Справедлива следующая оценка:

$$|\langle x, a\rangle| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} [p_V(x)\, p_{V^0}(a_{n,1}) + p_V(x)\, p_{V^0}(a_{n,2})] = cp_V(x),$$

следовательно, $a \in X'$ и $p_{V^0}(a) \leqslant c$. Если $x \geqslant 0$, то

$$p_U(x) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, a_n\rangle| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} [|\langle x, a_{n,1}\rangle| + |\langle x, a_{n,2}\rangle|] = \langle x, a\rangle,$$

т. е. линейный функционал a удовлетворяет необходимому условию из определения оштукатуриваемости конуса по отношению к полунорме p_U. Теорема доказана.

Пусть (D, τ) — пространство всех бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в R^k, наделенное топологией индуктивного предела пространств (D_n, τ_n) относительно тождественных вложений D_n в D. Здесь D_n означает векторное подпространство, образованное всеми функциями из D, тождественно равными нулю вне $[-n, n]^k$, а τ_n — топология в D_n, определенная полунормами

$$p^{(s)}(x) = \sup \left| \frac{\partial^{(s)} x(t)}{\partial t_1^{s_1} \ldots \partial t_k^{s_k}} \right|,$$

где $s = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$ — набор целых чисел.

Выделим в D конус K, состоящий из всех неотрицательных функций.

Пусть (D', β) — пространство, сопряженное с (2) (D, τ), наделенное сильной топологией, и K' — конус в D', сопряженный с (2) конусом K (обозначения см. [4, гл. II, п. 1.9; 2.20; 3.8]. Конус K' совпадает с множеством всех положительных мер Радона на R^k и нормален в (D', β) [4, гл. II, п. 2.20 и 3.8]. Пространство (D', β) ядерно [8, гл. 6, 6.2.6], значит, конус K' в (D', β) допускает оштукатуривание, и по следствию из леммы 2 существует система полунорм на D', аддитивных на K', определяющая топологию β.

Укажем еще один достаточно широкий класс конусов, допускающих оштукатуривание в локально выпуклом пространстве.

Пусть в локально выпуклом пространстве (X, τ) выделено выпуклое ограниченное множество F такое, что $0 \overline{\in} \overline{F}$. Рассмотрим конус

$$K = \bigcup_{\lambda \geqslant 0} \lambda F.$$

Справедлива теорема.

Теорема 3. *Конус K в (X, τ) допускает оштукатуривание, и топология $(\tau_i)_+$ нормируема*.*

Доказательство. По условию $0 \overline{\in} \overline{F}$, поэтому можно выбрать в (X, τ) τ-комплект $P = \{l\}$ полунорм таким, чтобы для каждого $l \in P$ множества $U = \{x : l(x) \leqslant 1\}$ и F не пересекались. Для каждой $l \in P$ по теореме Эйдельгайта об отделении выпуклых множеств [9, стр. 42] построим линейный функционал $x' \in X'$ такой, что

$$\sup_{x \in U} \langle x, x' \rangle \leqslant 1 \text{ и } \inf_{f \in F} \langle f, x' \rangle \geqslant 1.$$

* Топологии τ_i и $(\tau_i)_+$ определены на подпространстве $Y = K - K$ и имеют тот же смысл, что и в следствии 2 теоремы 1.

Множество F ограничено в (X, τ), поэтому для каждой $l \in P$ существует M_l такое, что

$$\sup_{f \in F} l(f) \leqslant M_l.$$

Если $x \geqslant 0$, то $x = \lambda f$, где $f \in F$, и справедливо неравенство

$$<x, x'> = \lambda <f, x'> \geqslant \lambda \frac{l(x)}{M_l}.$$

Положим $x'_l = M_l x'$, тогда $<x, x'_l> \geqslant l(x)$ при всех $x \geqslant 0$, значит, конус K допускает оштукатуривание в (X, τ). Выясним теперь, какова топология $(\tau_l)_+$ в $Y = K - K$. Определим на K функционал q, полагая

$$q(x) = \inf_{x=\lambda f,\, f \in F} \lambda.$$

Легко проверить, что q положительно однороден и полуаддитивен на K. Если $x \in K$ и $x = \lambda f$, где $f \in F$, то для каждой $l \in P$ $\lambda \leqslant l(x) \leqslant M_l \lambda$.
Первое неравенство следует из условия, что множества U и F не пересекаются, и второе — из ограниченности l на F числом M_l. Переходя в обоих неравенствах к инфимуму по λ, получим

$$q(x) \leqslant l(x) \leqslant M_l q(x).$$

В определении функционалов p_l на Y используются значения l только на конусе K, поэтому можно определить на Y функционал p_q по формуле

$$p_q(x) = \inf_{u \geqslant 0,\ x} q(u) + \inf_{v \geqslant 0,\ -x} q(v),$$

для которого, как нетрудно проверить, справедливы неравенства $p_q(x) \leqslant p_l(x) \leqslant M_l p_q(x)$ при всех $x \in Y$.

Таким образом, топология $(\tau_l)_+$, порождаемая $(\tau_l)_+$-комплектом $\{p_l\}$ $(l \in p)$, совпадает с топологией, порождаемой нормой p_q.

В заключение автор выражает благодарность проф. Б. З. Вулиху за внимание к работе и ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Красносельский. Положительные решения операторных уравнений. Физматгиз, 1962.
2. H. Shaefer. Topological vector spaces, New-York, 1966.
3. Б. З. Вулих. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., Физматгиз, 1961.
4. A. L. Peressini. Ordered topological vector spaces, New-York, 1967.
5. В. А. Соловьев. О некоторых свойствах пополнения нормированных структур. Изв. вузов, № 7, 1967, 88—99.
6. А. М. Рубинов. Бесконечномерные модели производства. Сибирск. матем. журн. т. 10, № 6, 1969, 1375—1386.
7. А. И. Векслер. О полноте и σ-полноте нормированных и линейных топологических структур. Изв. вузов, № 3 (28), 1962, 22—35.
8. А. Пич. Ядерные локально выпуклые пространства. Изд-во «Мир», 1967.
9. М. Дэй. Нормированные линейные пространства. М., ИЛ, 1961.

Поступила 19 октября 1970 г.