ЗАМЕЧАНИЯ О ТЕОРЕМАХ ТИПА ФРАГМЕНА—ЛИНДЕЛЕФА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Л. И. Ронкин

В теории аналитических функций одного комплексного переменного хорошо известно следующее утверждение, называемое теоремой Фрагмена—Линделефа для полуплоскости.

Пусть субгармоническая в полуплоскости $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ *функция* $u(w)$ $(w = \xi + i\eta)$ *удовлетворяет условиям:*

1) $u(w) \leqslant A|w| + B \quad \forall w \in \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$;

2) $\overline{\lim\limits_{\substack{w \to \xi \\ \operatorname{Im} w > 0}}} u(w) \leqslant M$;

3) $\overline{\lim\limits_{\eta \to +\infty}} \dfrac{1}{\eta} u(i\eta) = \sigma$

с некоторыми константами $A < \infty$, $B < \infty$, $M \leqslant \infty$, $-\infty \leqslant \sigma < \infty$. *Тогда*

$$u(\xi + i\eta) \leqslant \sigma\eta + M \quad \forall \xi \in R^1, \ \eta > 0.$$

В пространстве C^n естественным аналогом полуплоскости, как известно, является любая трубчатая область

$$T_S = \{z : z = x + iy, \ x \in R^n, \ y \in S\},$$

основание которой S есть открытый конус в пространстве R^n. Не нарушая общности, вершиной конуса S можно считать начало координат. Обозначим через $P(T_S)$ множество всех функций плюрисубгармонических в T_S. Назовем функцию $u(z) \in P(T_S)$ функцией не выше чем нормального типа при порядке 1, если при некоторых константах $A < \infty$, $B < \infty$, всюду в T_S выполняется неравенство

$$u(z) \leqslant A|z| + B.$$

Следующая теорема, на наш взгляд, является в случае многих переменных естественным аналогом теоремы Фрагмена—Линделефа для полуплоскости.

Теорема 1. *Пусть функция* $u(z) \in P(T_S)$ *имеет не более чем нормальный тип при порядке 1. Пусть*

$$\sup_{x \in R^n} \overline{\lim_{\substack{z \to x \\ z \in T_S}}} u(z) = M < \infty.$$

Тогда всюду в области T_S *имеет место неравенство*

$$u(x + iy) \leqslant l^*(y) + M,$$

где $l^*(y)$ есть регуляризация (т. е. наилучшая полунепрерывная сверху мажоранта) функции*

$$l(y) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} u(ity).$$

Доказательство. Рассмотрим радиальный индикатор $L(z, \zeta)$** функции $u(z)$, определяя его равенством

$$L(z, \zeta) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} u(z + t\zeta) \quad (z \in C^n, \ \zeta \in T_S).$$

Функция $u(z + t\zeta)$ не определена для произвольных значений $z \in C^n$, $\zeta \in T_S$, $t > 0$, однако она определена при наперед заданных $z \in C^n$, $\zeta \in T_S$, если t достаточно велико. Поэтому функция $L(z, \zeta)$ определена при любых $z \in C^n$, $\zeta \in T_S$. Более того, поскольку функция $u(z)$ является функцией не более чем нормального типа при порядке 1, то функции $\frac{1}{t} u(z + t\zeta)$ при $t \to +\infty$ на каждом компакте $K \subset C^n_{(z)} \times T_S$ образуют равномерно ограниченное семейство, а для функции $L(z, \zeta)$ имеет место оценка

$$L(z, \zeta) \leqslant A|\zeta|,$$

где A — константа, фигурирующая в определении функции не более чем нормального типа. Отсюда, согласно лемме Гартогса***, аналогично тому как это было сделано в [4] для случая $S = R^n$, заключаем, что

$$L(z, \zeta) \leqslant L^*(0, \zeta) \quad \forall z \in C^n, \ \zeta \in T_S, \tag{1}$$

---

* Функция $l^*(y)$ строится по функции $l(y)$ следующим образом:

$$l^*(y) = \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{|y-y'|<\varepsilon} l(y').$$

** Радиальный индикатор впервые был рассмотрен Полиа и Планшерелем [1] при изучении преобразования Фурье финитных функций. Функция $L(z, \zeta)$ определялась ими только для $z \in R^n$, $i\zeta \in R^n$. Некоторые свойства введенного в [1] индикатора были затем установлены автором [2]. В. С. Владимировым [3] изучался радиальный индикатор функций $u(z) \in P(T_S)$, медленно растущих при $\sum_{j=1}^{n} |\operatorname{Re} z_j| \to \infty$. При этом в [3], как и в [1], индикатор определялся только для чисто мнимых значений $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$. Приведенное здесь общее определение радиального индикатора было дано (при $S = R^n$) Лелоном [4], он же провел систематическое изучение свойств указанного индикатора.

*** Лемма Гартогса формулируется так:

Если $v_t(x)$, $0 < t < \infty$, — равномерно ограниченное семейство функций, субгармонических в области $D \subset R^n$, и

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} v_t(x) \leqslant A \quad \forall x \in D,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ и любого компакта $K \subset D$ найдется такое число $t_0 = t_0(K, \varepsilon)$, что при $t > t_0$

$$v_t(x) \leqslant A + \varepsilon \ \forall x \in K.$$

где $L^*(0, \zeta)$ — регуляризация функции $L(0, \zeta)$, т. е.

$$L^*(0, \zeta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{|\zeta - \zeta'| < \varepsilon} L(0, \zeta').$$

Известно [5], что для функций $v(z)$, представимых **в виде**

$$v(z) = \overline{\lim_{t \to +\infty}} v_t(z),$$

где $v_t(z)$, $0 < t < \infty$, — семейство функций, плюрисубгармонических и равномерно ограниченных в области $G \subset C^n$, в каждой точке x^0 пересечения $G \cap \{z : z = x + iy \in C^n,\ y = 0\}$ имеет место равенство

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{|x - x^0| < \varepsilon} v(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{|z - x^0| < \varepsilon} v(z). \tag{2}$$

Отсюда, с учетом сделанных выше замечаний о конструкции функции $L(z, \zeta)$, немедленно следует, что $L^*(0, y) = l^*(y)$ $\forall y \in S$, и, значит, см. (1),

$$L(z, iy) \leqslant l^*(y) \quad \forall z \in C^n,\ y \in S. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь функцию $\varphi(w)$ одного комплексного переменного $w = \xi + i\eta$, определяя ее при произвольно фиксированных $x \in R^n$ и $y \in S$ равенством

$$\varphi(w) = u(x + yw).$$

Очевидно, что функция $\varphi(w)$, определенная в полуплоскости $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$, является субгармонической и имеет не более чем нормальный тип при порядке 1. Заметим еще, что

$$\overline{\lim_{\substack{w \to \xi \\ \operatorname{Im} w > 0}}} \varphi(w) \leqslant M$$

и

$$\overline{\lim_{\eta \to +\infty}} \frac{1}{\eta} \varphi(i\eta) = \overline{\lim_{\eta \to +\infty}} \frac{1}{\eta} u(x + i\eta y) = L(x, iy). \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует, что

$$\overline{\lim_{\eta \to +\infty}} \frac{1}{\eta} \varphi(i\eta) \leqslant l^*(y).$$

Применяя к функции $\varphi(w)$ теорему **Фрагмена — Линделефа** для полуплоскости, заключаем, что

$$\varphi(i) \leqslant l^*(y) + M.$$

Но $\varphi(i) = u(x + iy)$, и, значит,

$$u(x + iy) \leqslant l^*(y) + M \quad \forall x \in R^n,\ y \in S.$$

Теорема доказана.

Для функций в C^1, не ограниченных на вещественной оси, как нетрудно видеть, имеет место следующее утверждение.

Пусть субгармоническая в C^1 функция $u(z)$ имеет не более чем нормальный тип при порядке 1** и удовлетворяет условиям*

$$u(x) \leqslant a|x| \ \forall x \in R^1; \ u(iy) \leqslant b|y| \ \forall y \in R^1.$$

Тогда

$$u(x+iy) \leqslant a|x| + b|y| \ \forall x + iy \in C^1.$$

Для плюрисубгармонических функций в C^n подобное утверждение не имеет места. Действительно, функция

$$\varphi(z_1, z_2) = \ln\left|\cos\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{z_1 z_2}\right)\right|$$

при любых вещественных x_1, x_2, y_1, y_2 удовлетворяет неравенствам

$$\varphi(x_1, x_2) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4}(|x_1| + |x_2|);$$

$$\varphi(iy_1, iy_2) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4}(|y_1| + |y_2|).$$

В то же время неравенство

$$\varphi(x_1 + iy_1, \ x_2 + iy_2) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4}(|x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2|)$$

не выполняется при всех x_1, x_2, y_1, y_2, поскольку при

$$x_2 = y_1 = 0, \ y_2 = x_1 > \frac{\sqrt{2}\ln 2}{2-\sqrt{2}}$$

$$\varphi(x_1, x_1 i) = \ln|\cos(i|x|)| > \frac{\sqrt{2}}{4}(|x_1| + |x_1|).$$

Более слабые утверждения имеют место, однако, и в случае пространства C^n, (см. [4], [6, 7]). Следующая ниже теорема является уточнением соответствующего результата Лелона*** для специального случая функций минимального типа при вещественных значениях переменных.

Теорема 2. *Пусть плюрисубгармоническая в C^n функция $u(z)$ имеет не более чем нормальный тип при порядке 1. Пусть далее*

---

* Аналогичное утверждение справедливо, конечно, и для полуплоскости.

** На рост функции $u(z)$ в C^1 можно наложить и более слабое ограничение, а именно, потребовать, чтобы функция $u(z)$ была функцией не более чем минимального типа при порядке 2.

*** Теорема Лелона формулируется следующим образом.

Пусть $u(z)$, $z \in C^n$, — плюрисубгармоническая функция, удовлетворяющая условиям:

$$1) \ \overline{\lim_{t\to+\infty}} \ \frac{1}{t} \sup_{|z|=t} u(z) = \sigma < \infty;$$

$$2) \ \overline{\lim_{t\to+\infty}} \ \frac{1}{t} u(tx) \leqslant \psi(x) \ \forall x \in R^n;$$

где функция $\psi(x)$ непрерывная и такая, что

$$\psi(tx) = t\psi(x) \ \forall t > 0.$$

*Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon' > 0$ существуют константа **d**, **зависящая** при данных σ и $\psi(x)$ от ε, но не от выбора функции $u(z)$, и константа **c**, зависящая от ε' и выбора функции $u(z)$, такие, что*

$$u(z) \leqslant \psi(x) + \varepsilon|x| + \sigma d|y| + \varepsilon'|z| + c \quad \forall z \in C^n.$$

функция $\alpha(y)$, $y \in R^n$, — *непрерывная и такая, что* $\alpha(ty) = t\alpha(y)$ $\forall t > 0$. *Тогда, если при любом* $\varepsilon > 0$ *и некоторых константах* $C_\varepsilon^{(1)} < \infty$ *и* $C_\varepsilon^{(2)} < \infty$ *выполняются неравенства*

$$u(x) \leqslant C_\varepsilon^{(1)} + \varepsilon|x| \quad \forall x \in R^n, \tag{5}$$

$$u(iy) \leqslant C_\varepsilon^{(2)} + \alpha(y) + \varepsilon|y| \quad \forall y \in R^n, \tag{6}$$

то при любом $\varepsilon > 0$ *будет также справедливо неравенство*

$$u(x + iy) \leqslant C_\varepsilon^{(3)} + \alpha(y) + \varepsilon(|x| + |y|) \quad \forall x \in R^n,\ y \in R^n \tag{7}$$

с некоторой константой $C_\varepsilon^{(3)} < \infty$.

Доказательство. Из (5) и (6) следует, что радиальный индикатор $L(z, \zeta)$ функции $u(z)$ удовлетворяет условиям

$$L(0, x) \leqslant 0 \quad \forall x \in R^n$$

и

$$L(0, iy) \leqslant \alpha(y) \quad \forall y \in R^n.$$

Отсюда ввиду (2) вытекает, что плюрисубгармоническая функция $L^*(0, \zeta)$ удовлетворяет условиям

$$L^*(0, x) \leqslant 0, \tag{8}$$

$$L^*(0, iy) \leqslant \alpha(y). \tag{9}$$

Согласно теореме 1 из (8) и (9), следует, что

$$L^*(0, x + iy) \leqslant \alpha(y),$$

и значит,

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} u(tz) \leqslant \alpha(y) \quad \forall z \in C^n.$$

Применяя к семейству функций $\frac{1}{t} u(tz)$ лемму Гартогса и учитывая при этом непрерывность функции $\alpha(y)$, заключаем далее, что при $|z| = 1$, начиная с некоторого значения $t = t_0$, выполняется неравенство

$$\frac{1}{t} u(tz) \leqslant \alpha(y) + \varepsilon,$$

или, что то же самое,

$$u(tz) \leqslant t\alpha(y) + \varepsilon t = \alpha(ty) + \varepsilon t. \tag{10}$$

Ввиду произвольности $t > t_0$ и $z \in \{z : |z| = 1\}$ из (10) немедленно следует (7). Теорема доказана.

Следствие*. *Пусть плюрисубгармоническая в* C^n *функция* $u(z)$ *имеет не более чем нормальный тип при порядке 1 и при любом* $\varepsilon > 0$ *удовлетворяет неравенствам*

$$u(iy) \leqslant (\sigma_1 + \varepsilon)|y_1| + \ldots + (\sigma_n + \varepsilon)|y_n| + C_\varepsilon^{(1)} \quad \forall y \in R^n, \tag{11}$$

* Это утверждение является распространением на случай плюрисубгармонических функций соответствующих результатов Мартино [6] и автора [7], относящихся к целым функциям и полученным другими методами.

$$u(x) \leqslant \varepsilon(|x_1| + \ldots + |x_n|) + C_\varepsilon^{(2)} \quad \forall x \in R^n, \tag{12}$$

где

$$\sigma_1 < \infty, \ \ldots, \ \sigma_n \leqslant \infty, \ C_\varepsilon^{(1)} < \infty, \ C_\varepsilon^{(2)} < \infty.$$

Тогда при любом $\varepsilon > 0$ *и некоторой константе* $C_\varepsilon^{(3)}$ *всюду в* C^n *выполняется неравенство*

$$u(x + iy) \leqslant (\sigma_1 + \varepsilon)|y_1| + \ldots + (\sigma_n + \varepsilon)|y_n| +$$
$$+ \varepsilon(|x_1| + \ldots + |x_n|) + C_\varepsilon^{(3)}. \tag{13}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Plancherel — Polya. Fonctions entieres et integrales de Fourier multiples. Comm. Math. Helv. 9 (1937), 224—248.

2. Л. И. Ронкин. О целых функциях конечной степени и о функциях вполне регулярного роста от нескольких переменных. ДАН СССР, 119, 1958, 211—214.

3. В. С. Владимиров. О плюрисубгармонических функциях в трубчатых радиальных областях I, II. Изв. АН СССР, серия матем., 29, 1965, 1123—1146; 31, 1967, 103—122.

4. P. Lelong. Целые функции n-переменных и плюрисубгармонические функции экспоненциального типа. Сб. «Современные проблемы теории аналитических функций». Изд-во «Наука», 1966.

5. P. Lelong. Fonctions plurisousharmoniques et fonctions analytigues de variables reelles. Ann. Inst. Fourier 11 (1961), 515—562.

6. A. Martineau. Sur les fonctionelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel. J. Analyse. Ierusalem 11 (1961), 1—162.

7. Л. И. Ронкин. Об одной оценке целых функций экспоненциального типа в пространстве C^n. Труды физико-технического института низких температур АН УССР. Математическая физика, функциональный анализ, 1, 1969, 203—208.

Поступила 30 сентября 1970 г.