О РОСТЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ СПЕЦИАЛЬНУЮ ОЦЕНКУ СНИЗУ

Е. Н. Сергиенко

В. И. Мацаев [1] доказал следующую теорему, которая имеет существенные приложения в теории операторов.

Теорема. *Если целая функция* $f(z)$ *при некотором* ρ, $0 < \rho < 1$ *и* $C > 0$ *допускает оценку**

$$\ln|f(re^{i\varphi})| \geqslant -C\left(\frac{r}{|\sin\varphi|}\right)^{\rho},\ 0 \leqslant r < \infty,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,$$

* Здесь и в дальнейшем буквой C, возможно с индексом, будем обозначать положительные постоянные, зависящие лишь от функции $f(z)$.

что

$$\ln|f(z)| \leqslant O(|z|) \quad \text{при } z \to \infty$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|f(t)||}{1+t^2}\, dt < \infty.$$

В настоящей работе мы докажем несколько более общую теорему.

Теорема 1. *Пусть целая функция $f(z)$ такова, что*

$$\ln|f(re^{i\varphi})| \geqslant -M\left(\frac{r^n}{|\sin n\varphi|}\right), \quad 0 \leqslant r < \infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \tag{1}$$

где $n \geqslant 1$ — целое число, а $M(x)$ — неубывающая на $[0, \infty)$ функция, представимая в виде $M(x) = \frac{x}{\lambda(x)}$, причем функция $\lambda(x) > 0$ не убывает на $[0, \infty)$, дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условиям

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\lambda(x)}} < \infty, \tag{2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{\sqrt{\lambda(x)}}\right] \downarrow 0 \quad \text{при } x \uparrow \infty, \tag{3}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x \frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{x}{\sqrt{\lambda(x)}}\right] = 0, \quad \frac{d}{dx}\left[\frac{x}{\sqrt{\lambda(x)}}\right] < \frac{1}{\sqrt{\lambda(x)}}. \tag{4}$$

Тогда

$$\ln|f(z)| \leqslant O(|z|^n) \quad \text{при } z \to \infty, \tag{5}$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\left|\ln\left|f\left(re^{i\frac{\pi k}{n}}\right)\right|\right|}{1+r^{n+1}}\, dr < \infty, \quad k = 0, 1, \ldots, 2n-1. \tag{6}$$

В качестве функции $\lambda(x)$, удовлетворяющей условиям (2—4), можно взять, например,

$$\lambda(x) = 1 + (\ln^+ x)^{2+\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0.$$

В этом случае

$$M(x) = \frac{x}{1 + (\ln^+ x)^{2+\varepsilon}}.$$

Результат В. И. Мацаева [1] получается из нашей теоремы при $n = 1$, $M(x) = x^{\rho}$, $0 < \rho < 1$, $\lambda(x) = x^{1-\rho}$.

Для доказательства теоремы 1 нам еще пришлось обобщить следующую теорему В. И. Мацаева [2].

Теорема. *Если целая функция $f(z)$ допускает оценку снизу*

$$\ln|f(re^{i\varphi})| \geqslant -C\frac{r^{\alpha}}{|\sin\varphi|^{k}},\quad \alpha > 1,\quad k \geqslant 0,$$

то рост $f(z)$ не выше нормального типа порядка α. Наше обобщение формулируется так.

Теорема 2. *Если целая функция $f(z)$ удовлетворяет во всей плоскости неравенству*

$$\ln|f(re^{i\varphi})| \geqslant -C\frac{r^{\alpha}}{|\sin n\varphi|},\tag{7}$$

где $\alpha > n$, n — целое число, то

$$\ln|f(z)| \leqslant O(|z|^{\alpha}).$$

Доказательство теоремы 2. Легко видеть, что функция $f(z)$ может иметь корни лишь на лучах

$$\arg z = \frac{k\pi}{n},\quad k = 0, 1, \ldots, 2n-1,$$

причем $f(0) \neq 0$. Не уменьшая общности, можно считать, что $f(z) \neq 0$ круге $|z| \leqslant 1$. Выберем числа β и ψ так, чтобы выполнялись условия

$$1 < \beta < \frac{\alpha}{n},\quad 0 < \psi \leqslant \frac{\pi}{n}\left(1-\frac{1}{\beta}\right).$$

Введем функцию

$$F_{\beta,\psi}(\zeta) = f\left(\zeta^{\frac{1}{n\beta}}e^{i\frac{\psi}{2}}\right),\quad \zeta = \rho e^{i\vartheta}.\tag{8}$$

Эта функция голоморфна и отлична от нуля в замкнутой верхней полуплоскости. Из (7) для нее вытекает следующая оценка снизу:

$$\ln|F_{\beta,\psi}(\rho e^{i\vartheta})| \geqslant -C\frac{\rho^{\frac{\alpha}{n\beta}}}{\left|\sin\left(\frac{\vartheta}{\beta}+\frac{n\psi}{2}\right)\right|} \geqslant -C_1\frac{\rho^{\frac{\alpha}{n\beta}}}{\left|\sin\frac{n\psi}{2}\right|}.\tag{9}$$

Как показано в работе В. И. Мацаева [2], из оценки (9) следует оценка сверху

$$\ln|F_{\beta,\psi}(\rho e^{i\vartheta})| \leqslant C_2\rho^{\frac{\alpha}{n\beta}}\left[\operatorname{cosec}\frac{n\psi}{2}\right][\operatorname{cosec}\vartheta].\tag{10}$$

Положив в этом соотношении $\zeta = r^{n\beta}e^{i\frac{n\beta\psi}{2}}$, в силу (8) получим $\ln|f(re^{i\psi})| \leqslant C_3r^{\alpha}[\operatorname{cosec} n\psi]^2$

$$\text{при}\quad 0 < \psi \leqslant \frac{\pi}{n}\left(1-\frac{1}{\beta}\right).\tag{11}$$

Аналогичное неравенство можно получить при $0 < \psi - \frac{\pi k}{n} \leqslant \frac{\pi}{n}\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$, а также при $0 > \psi - \frac{\pi k}{n} \geqslant -\frac{\pi}{n}\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)$, $k = 1, 2, \ldots, 2n$.

Таким образом, соотношение (11) имеет место в углах

$$\left|\psi - \frac{\pi k}{n}\right| \leqslant \frac{\pi}{n}\left(1 - \frac{1}{\beta}\right),\ k = 0, 1, \ldots, 2n - 1. \tag{12}$$

Положим в (10) $\psi = \frac{\pi}{n}\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)$, $\zeta = r^{n\beta} e^{in\beta\left(\varphi - \frac{\psi}{2}\right)}$,

где $\frac{\pi(k+1)}{n} - \frac{\pi}{n\beta} < \varphi < \frac{\pi k}{n} + \frac{\pi}{n\beta}$, $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$,

тогда

$$\ln\left|F_{\beta,\psi}\left(r^{n\beta} e^{in\beta\left(\varphi - \frac{\psi}{2}\right)}\right)\right| \leqslant C_2 r^{\alpha}\left[\operatorname{cosec}\frac{n\psi}{2}\right]\left[\operatorname{cosec}\frac{n\beta}{2}\left(\varphi - \frac{\psi}{2}\right)\right],$$

а отсюда следует, что

$$\ln|f(re^{i\varphi})| \leqslant Cr^{\alpha} + C.$$

Объединяя полученные оценки, находим, что соотношение (11) выполняется при $0 \leqslant \psi < 2\pi$, $1 \leqslant r < \infty$.

Обозначим через L многоугольник с $4n$ сторонами с вершинами в точках, расположенных на лучах $\arg z = \frac{k\pi}{n}$ и $\arg z = \frac{2k+1}{2n}\pi$, $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$. Модули вершин, лежащих на лучах $\arg z = \frac{k\pi}{n}$, равны $a = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{16}}$; вершин, лежащих на лучах $\arg z = \frac{2k+1}{2n}\pi$, равны $b = \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2\pi}\right)}$.

Рассмотрим функцию

$$\mu(z) = \exp\left\{-\sum_{k=0}^{n-1}\left[a^2 - \left(ze^{i\frac{k\pi}{n}}\right)^2\right]^{-4}\right\}.$$

Эта функция голоморфна внутри L и, как нетрудно проверить, допускает на Γ, Γ — граница L, оценку

$$\ln|\mu(re^{i\varphi})| \leqslant -\frac{C_4}{|\sin n\varphi|^4} + C_5. \tag{13}$$

Функция $f(Kz)\mu(z)$, где $K>0$, голоморфна внутри L, непрерывна в замыкании L, поэтому она представима интегралом Коши по Γ. Легко видеть, что

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i\,\mu\,(zK^{-1})}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(K\zeta)\,\mu(\zeta)}{\zeta-zK^{-1}}\,d\zeta.$$

Полагая в этом равенстве $K=r$, используя соотношения (11) и (13) и тот факт, что единичный круг содержится внутри L, получаем оценку

$$|f(z)|\leqslant C_6\max_{\zeta\in\Gamma}|f(K\zeta)\,\mu(\zeta)|\leqslant C_6\max_{0\leqslant\vartheta\leqslant 2\pi}\left(\exp\left\{\frac{C_3r^{\alpha}}{|\sin n\vartheta|^2}-\frac{C_4}{|\sin n\vartheta|^4}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+C_5\right\}\right)\leqslant C_7\max_{0\leqslant\vartheta\leqslant\frac{\pi}{n}}\left(\exp\left\{\frac{C_3r^{\alpha}}{(\sin n\vartheta)^2}-\frac{C_4}{(\sin n\vartheta)^4}\right\}\right).$$

Находя максимум обычным методом, получим неравенство

$$|f(z)|\leqslant C_7\exp\{C_8r^{2\alpha}\}.$$

Наконец, применяя принцип Фрагмена—Линделефа в углах $\left|\arg z-\frac{k\pi}{n}\right|\leqslant\frac{\pi}{2\alpha}$, $k=0,1,\ldots,2n-1$, учитывая при этом (11), убеждаемся в справедливости утверждения теоремы 2.

Для доказательства теоремы 1 нам потребуются свойства некоторых конформных отображений.

Положим $M_1(x)=\frac{x}{\sqrt{\lambda(x)}}$. Заметим, что в силу (2)

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{M_1(x)}{x^2}\,dx<\infty, \tag{14}$$

а в силу (3)

$$\frac{d}{dx}M_1(x)\downarrow 0 \text{ при } x\uparrow+\infty. \tag{15}$$

Рассмотрим конформные отображения $z=\varphi_1(w)$ и $z=\varphi_2(w)$ полуплоскости $\operatorname{Im}w>0$, $w=u+iv$, на области D_1 и D_2, расположенные над кривыми $y=M_1(|x|)$, $y=-M_1(|x|)$, $-\infty<x<+\infty$.

Лемма 1. *Функции $\varphi_1(w)$ и $\varphi_2(w)$, отображающие полуплоскость $\{\operatorname{Im}w>0\}$ на области D_1 и D_2 соответственно, удовлетворяют неравенствам:*

$$C_{10}|w|<|\varphi_1(w)|<C_9|w|,\ \operatorname{Im}w\geqslant 0; \tag{16}$$

$$C_{12}|w|<|\varphi_2(w)|<C_{11}|w|,\ \operatorname{Im}w\geqslant 0; \tag{17}$$

$$\operatorname{Im}\varphi_1(w)\geqslant M_1(C_{13}|w|),\ \operatorname{Im}w>0; \tag{18}$$

$$|\operatorname{Im}\varphi_2(u)|\geqslant M_1(C_{14}|u|),\ -\infty<u<+\infty. \tag{19}$$

Доказательство. Отобразим полуплоскость $\{\operatorname{Im} w > 0\}$ и область D_1 соответственно с помощью функций $w_1 = \ln w - i\frac{\pi}{2}$ и $z_1 = \ln z - i\frac{\pi}{2}$, где $\ln 1 = 0$. Пусть $G = \left\{ |\operatorname{Im} w_1| < \frac{\pi}{2} \right\}$ — образ полуплоскости $\{\operatorname{Im} w > 0\}$, а D'_1 — образ области D_1 в $z_1 = x_1 + iy_1$-плоскости. Обозначим через $w_1 = w_1(z_1)$ отображение D'_1 на G, индуцированное отображением $w = \varphi_1^{-1}(z)$ области D_1 на полуплоскость $\{\operatorname{Im} w > 0\}$.

Для оценки функций $\varphi_1(w)$ и $\varphi_2(w)$ используем результаты Варшавского [4].

Введем согласно [4] некоторые обозначения. Пусть $y_1 = \varphi_+(x_1)$ — образ кривой $y = M_1(|x|)$, $x < 0$; $y_1 = \varphi_-(x_1)$ — образ кривой $y = M_1(x)$, $x > 0$ при отображении $z_1 = \ln z - i\frac{\pi}{2}$. Кроме того, пусть

$$\vartheta(x_1) = \varphi_+(x_1) - \varphi_-(x_1); \quad \psi(x_1) = \frac{1}{2}[\varphi_+(x_1) + \varphi_-(x_1)].$$

Мы видим, что $\vartheta(x_1) = 2\varphi_+(x_1)$, $\psi(x_1) \equiv 0$,

$$\{x_1 > 0\} \cap \{D'_1\} = \{|y_1| < \varphi_+(x_1)\}.$$

Легко проверить, что по терминологии, принятой в [4, стр. 69], области G и D'_1 являются L-полосами с наклоном границы в точке $x_1 = +\infty$, равным нулю. Воспользуемся следующим результатом [4, стр. 81].

Если D'_1 является L-полосой с наклоном границы в точке $x_1 = +\infty$, равным нулю, и интегралы

$$\int_{x_1^0}^{\infty} \frac{[\varphi'_+(u)]^2}{\vartheta(u)} du, \qquad \int_{x_1^0}^{\infty} \frac{[\varphi'_-(u)]^2}{\vartheta(u)} du \tag{20}$$

сходятся, то равномерно по y_1 выполняется

$$\operatorname{Re} w_1(x_1) \equiv u_1(x_1) = \lambda + \pi \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{dt}{\vartheta(t)} + o(1), \quad x_1 \to +\infty. \tag{21}$$

Нетрудно проверить, что условия (20) выполнены в нашем случае.

Рассмотрим разность

$$Q(x_1) = \pi \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{dt}{\vartheta(t)} - \int_{x_1^0}^{x_1} dt = \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{\pi - \vartheta(t)}{\vartheta(t)} dt.$$

Заметим, что

$$\vartheta(x_1) = \pi - 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{M_1(x)}{x},$$

где $x > 0$ удовлетворяет уравнению $x_1 = \ln\sqrt{x^2 + M_1^2(x)}$. Сделав замену $t = \ln\sqrt{\tau^2 + M_1^2(\tau)}$, придем к следующему выражению для $Q(x_1)$:

$$Q[x_1(x)] = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{2\mathrm{arctg}\,\frac{M_1(\tau)}{\tau}}{\pi - 2\mathrm{arctg}\,\frac{M_1(\tau)}{\tau}}\;\frac{\tau^2 + M_1(\tau)\,M_1'(\tau)}{\tau^2 + M_1^2(\tau)}\,d\tau.$$

Отсюда, используя условия (14) и (15), получим неравенство

$$Q[x_1(x)] \leqslant C_{15}\int\limits_{x_0}^{x} \frac{M_1(\tau)\left[1 + \frac{M_1(\tau)}{\tau}\,M_1'(\tau)\right]}{\tau^2 + M_1^2(\tau)}\,d\tau \leqslant C_{16}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{M_1(\tau)}{\tau^2}\,d\tau < \infty. \tag{22}$$

Объединяя (21) и (22), получим

$$\mathrm{Re}\,w_1(x_1) \equiv u_1(x_1) = x_1 - x_1^0 + O(1) = x_1 + O(1), \quad x_1 \to +\infty. \tag{23}$$

Так как

$$z_1 = \ln z - i\frac{\pi}{2} = \ln\varphi_1(w) - i\frac{\pi}{2},$$

$$w_1 = \ln w - i\frac{\pi}{2},$$

то

$$x_1 \equiv \mathrm{Re}\,z_1 = \ln|\varphi_1(w)|,$$

$$u_1 \equiv \mathrm{Re}\,w_1 = \ln|w|.$$

Теперь (23) можно переписать так:

$$\ln|w| = \ln|\varphi_1(w)| + O(1),$$

откуда

$$C_{10}|w| < |\varphi_1(w)| < C_9|w|.$$

Проводя аналогичные рассуждения для функции $\varphi_2(w)$, получим (17).

Оценим теперь $\mathrm{Im}\,\varphi_1(w)$. Так как согласно (16) точка $z = \varphi_1(w)$, $\mathrm{Im}\,w > 0$, находится в кольце $C_{10}|w| < |z| < C_9|w|$ и лежит над кривой $y = M_1(|x|)$, то имеем

$$\mathrm{Im}\,\varphi_1(w) \geqslant \min_{t \geqslant |x|} M_1(t) = M_1(|x|),$$

где x удовлетворяет уравнению

$$\sqrt{x^2 + M_1^2(|x|)} = C_{10}|w|. \tag{24}$$

Так как $M_1(|x|) = o(|x|)$ при $|x| \to \infty$, то из (24) следует, что при достаточно больших $|w|$

$$|x| \geqslant C_{13}|w|,$$
$$\operatorname{Im}\varphi_1(w) \geqslant M_1(C_{13}|w|).$$

Аналогично получается (19). Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1. Отобразим плоскость $\xi + i\eta$ с разрезом по отрицательному мнимому лучу на угол $-\frac{\pi}{2n} < \arg z < \frac{3\pi}{2n}$ с помощью функции $z = \sqrt[n]{\zeta}$.

Положим $F(\zeta) = f\left(\sqrt[n]{\zeta}\right)$, $\zeta = \rho e^{i\vartheta}$. Тогда функция $F(\zeta)$ голоморфна в области $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{3}{2}\pi$ и удовлетворяет там неравенству

$$\ln|F(\rho e^{i\vartheta})| \geqslant -M\left(\frac{\rho}{|\sin\vartheta|}\right). \tag{25}$$

Введем функции

$$F_1(w) = F[\varphi_1(w)], \quad F_2(w) = F[\varphi_2(w)].$$

Они голоморфны в полуплоскости $\operatorname{Im} w > 0$, причем $F_1(w) \neq 0$ при $\operatorname{Im} w \geqslant 0$.

Используя (25) и (16) — (19), получим оценки:

$$\ln|F_1(w)| \geqslant -M\left(\frac{C_9|w|^2}{M_1(C_{13}|w|)}\right), \quad \operatorname{Im} w \geqslant 0, \tag{26}$$

$$\ln|F_2(u)| \geqslant -M\left(\frac{C_{11}u^2}{M_1(C_{14}|u|)}\right), \quad |u| < \infty. \tag{27}$$

Далее нам потребуется несколько лемм.

Лемма 2. Если целая функция $f(z)$ удовлетворяет условию (1), то рост $f(z)$ не выше нормального типа порядка n.

Доказательство. Заметим, что функция $\frac{1}{F_1(w)}$ голоморфна при $\operatorname{Im} w > 0$ и справедлива оценка

$$\ln\left|\frac{1}{F_1(w)}\right| \leqslant M\left(\frac{C_9|w|^2}{M_1(C_{13}|w|)}\right) = \frac{C_9|w|^2}{M_1(C_{13}|w|)\,\lambda\left[\frac{C_9|w|^2}{M_1(C_{13}|w|)}\right]} =$$

$$\frac{C_9|w|^2\sqrt{\lambda(C_{13}|w|)}}{C_{13}|w|\,\lambda\left[\frac{C_9|w|^2\sqrt{\lambda(C_{13}|w|)}}{C_{13}|w|}\right]} = C_{17}\frac{|w|\sqrt{\lambda(C_{13}|w|)}}{\lambda\left[C_{17}|w|\sqrt{\lambda(C_{13}|w|)}\right]}.$$

В силу (2) имеем

$$\ln\left|\frac{1}{F_1(w)}\right| \leqslant C_{18}\frac{|w|}{\sqrt{\lambda(C_{19}|w|)}}. \tag{28}$$

Следовательно, $\frac{1}{F_1(w)}$ — функция конечной степени в полуплоскости $\operatorname{Im} w \geqslant 0$. Кроме того, в силу (2)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^+\left|\frac{1}{F_1(t)}\right|}{1+t^2}\,dt \leqslant C_{20}\int_{1}^{\infty}\frac{dt}{t\sqrt{\lambda(t)}} < \infty. \tag{29}$$

Известно [3, стр. 315], что если $\psi(w)$ — функция конечной степени в полуплоскости $\operatorname{Im} w \geqslant 0$, то интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln^+|\psi(t)|}{1+t^2}\,dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\ln|\psi(t)||}{1+t^2}\,dt$$

сходятся или расходятся одновременно.

Поэтому из (29) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\ln|F_1(t)||}{1+t^2}\,dt < \infty. \tag{30}$$

Далее воспользуемся следующей теоремой [3, стр. 311].

Если функция $G(z)$ голоморфная и конечной степени в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ и существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|G(t)|}{1+t^2}\,dt,$$

$$\ln|G(z)| = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln|G(t)|\frac{dt}{(t-x)^2+y^2} + ky + \ln|\chi(z)|,$$

где

$$k = \varlimsup_{y\to+\infty}\frac{\ln|G(iy)|}{y},$$

$$\chi(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)\left(1-\frac{z}{\bar a_k}\right)^{-1},$$

(a_k — корни функции $G(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$).

Так как функция $F_1(w)$ не имеет корней в верхней полуплоскости, то отсюда следует возможность представления

$$\ln|F_1(w)| = \frac{v}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln|F_1(t)|\frac{dt}{(t-u)^2+v^2} + kv, \quad w = u+iv. \tag{31}$$

Так как
$$\frac{1+t^2}{(t-u)^2+v^2} \leqslant \frac{1}{v^2} + \frac{u^2+v^2}{v^2},$$
то
$$\int \ln|F_1(t)|\frac{dt}{(t-u)^2+v^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|F_1(t)|}{1+t^2}\,\frac{1+t^2}{(t-u)^2+v^2}\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{1}{v^2} + \frac{u^2+v^2}{v^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|F_1(t)||}{1+t^2}\,dt.$$

Поэтому из представления (31) получаем такую оценку для $\ln|F_1(w)|$:
$$\ln|F_1(w)| \leqslant C_{21}\frac{|w|^2}{v} + C_{22},$$
откуда следует, что в углу $0 < \delta_1 \leqslant \arg z \leqslant \pi - \delta_1$ выполняется
$$\ln|F_1(w)| \leqslant C_{23}|w|.$$

Для того чтобы перейти к оценке функции $F(\zeta)$, покажем, что при отображении $\zeta = \varphi_1(w)$ образ области $D_1 \cap \{\delta \leqslant \arg\zeta \leqslant \pi - \delta\}$ лежит внутри угла $\left\{\frac{\delta}{2} \leqslant \arg w < \pi - \frac{\delta}{2}\right\}$ при достаточно большом $|w|$. Действительно, в силу [4, стр. 105], если D'_1 является L-полосой с наклоном границы в точке $\xi_1 = +\infty$, равным γ, $|\gamma| < \frac{\pi}{2}$, то равномерно по ζ_1
$$\operatorname{Im} w_1(\zeta_1) = \pi\frac{\eta_1 - \psi(\xi_1)}{\vartheta(\xi_1)} + o(1), \quad \xi_1 \to +\infty. \tag{32}$$

Следовательно, в нашем случае для прообраза луча $\arg\zeta = \delta$ при отображении $\zeta = \varphi_1(w)$ получим
$$\arg w - \frac{\pi}{2} = \pi\frac{\delta - \frac{\pi}{2}}{\pi - 2\operatorname{arctg}\frac{M_1(\xi)}{\xi}} + o(1), \quad \xi \to +\infty,$$
и отсюда, как легко проверить, имеем
$$\arg w = \delta + o(1), \quad \xi \to +\infty.$$

Аналогично для прообраза луча $\arg\zeta = \pi - \delta$ получим соотношение
$$\arg w = \pi - \delta + o(1), \quad \xi \to +\infty.$$

Так как
$$|F_1(w)| = |F[\varphi_1(w)]| \leqslant \exp\{C_{23}|w|\} \leqslant \exp\{C_{24}|\varphi_1(w)|\},$$
то при
$$\delta \leqslant \arg\zeta \leqslant \pi - \delta$$
$$|F(\zeta)| \leqslant \exp\{C_{24}|\zeta|\}.$$

Отсюда для функции $f(z)$ в углу $\delta_1 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{n} - \delta_1$ получаем оценку

$$|f(z)| \leqslant \exp\{C_{24}|z|^n\}. \tag{33}$$

Оценка (33), очевидно, имеет место в каждом углу

$$\frac{\pi}{n}(k-1) + \delta_1 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{n}k - \delta_1,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n.$$

По теореме 2 функция $f(z)$ во всяком случае конечного порядка роста. Применив принцип Фрагмена — Линделефа в углах

$$\left|\arg z - \frac{k\pi}{n}\right| \leqslant \delta_1,\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2n-1,$$

получим утверждение леммы 2.

Лемма 3 (Валирон). *Если $f(z)$ — целая функция порядка ρ нормального типа, то существует последовательность $R_k \to +\infty$ такая, что*

$$\ln|f(R_k e^{i\varphi})| \geqslant -C_{25}R_k^{\rho},\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Доказательство. В [3, стр. 33] доказана теорема. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в круге $|z| \leqslant 2eR$, $(R > 0)$, $f(0) = 1$ и η — произвольное положительное число, не превышающее $\frac{3}{2}e$. Тогда внутри круга $|z| \leqslant R$, но вне исключительных кружков с общей суммой радиусов меньшей чем $4\eta R$,

$$\ln|f(z)| \geqslant -H(\eta)\ln M(2eR, f) \tag{34}$$

при

$$H(\eta) = 2 + \ln\frac{3e}{2\eta}.$$

Выберем последовательность R'_k такую, что $R'_{k+1} = 2R'_k$, кроме того, пусть $\eta < \frac{1}{16}$. Тогда внутри любого кольца $R'_k \leqslant |z| \leqslant R'_{k+1}$ найдется окружность $|z| = R_k$ такая, что

$$\ln|f(R_k e^{i\varphi})| \geqslant -H(\eta)\ln M(2eR'_{k+1}),$$

в силу того, что общая сумма диаметров исключительных кружков меньше чем R'_k.

Из условия леммы следует, что

$$\ln M(r, f) < Kr^{\rho},\ 0 < K < \infty.$$

Поэтому

$$\ln M(2eR'_{k+1}, f) < K(2e)^{\rho}(R'_{k+1})^{\rho} =$$
$$= K(2e)^{\rho}(2^{\rho})(R'_k)^{\rho} \leqslant C_{26}R_k^{\rho}. \tag{35}$$

Из (34) и (35) получаем, что

$$\ln|f(R_k e^{i\varphi})| \geqslant -C_{25}R_k^{\rho},\quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Функция $F_2(w)$, определенная равенством $F_2(w) = F[\varphi_2(w)]$, принадлежит классу A, т. е. сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\operatorname{Im}\frac{1}{b_k}\right|, \tag{36}$$

где b_k — корни функции $F_2(w)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} w > 0$ [3, стр. 280].

Доказательство. Заметим, что $a_k = \varphi_2(b_k)$, где a_k — корни функции $F(\zeta)$. Используя (17), получим для ряда (36) оценку

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\operatorname{Im}\frac{1}{b_k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Im} b_k}{|b_k|^2} \leqslant C_{11}^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Im} b_k}{|a_k|^2}. \tag{37}$$

Оценим теперь $\operatorname{Im} b_k$. Согласно теореме Кебе [5, стр. 88], имеем

$$\operatorname{Im} b_k \leqslant 4|\varphi_2'(b_k)|\,d_k,$$

где d_k есть расстояние от точки a_k до кривой $y = -M_1(x)$, $x > 0$. Очевидно, $d_k \leqslant M_1(|a_k|)$.

Покажем, что производная отображающей функции $\varphi_2(w)$ ограничена в полуплоскости $\operatorname{Im} w \geqslant 0$.

Отобразим область $D_2 = \{\operatorname{Im} z \geqslant -M_1(|\operatorname{Re} z|)\}$ и полуплоскость $\{\operatorname{Im} w > 0\}$ с помощью функций $z_2 = \dfrac{z-i}{z+i}$ и $w_2 = \dfrac{w-i}{w+i}$ на область D_2' и единичный круг соответственно. Пусть $z_2(w_2)$ есть отображение единичного круга на область D_2', индуцированное отображением $z = \varphi_2(w)$ полуплоскости $\{\operatorname{Im} w > 0\}$ на область D_2.

Согласно теореме Н. У. Аракеляна [6], производная функции $z = z(\zeta)$, отображающей на полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ область

$$-\frac{\psi(\rho)}{\rho} < \arg\zeta < \pi + \frac{\psi(\rho)}{\rho},\quad \zeta = \rho e^{i\vartheta},$$

где $\psi(\rho)$ не убывает, $\dfrac{\psi(\rho)}{\rho}$ не растет, $\lim\limits_{\rho\to\infty}\rho\psi''(\rho) = 0$, $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\psi(\rho)}{\rho^2}d\rho < \infty$, удовлетворяет неравенству

$$0 < k_2 \leqslant |z'(\zeta)| \leqslant k_1 < \infty \text{ при } \arg\zeta = \pi + \frac{\psi(\rho)}{\rho} \text{ и } \arg\zeta = -\frac{\psi(\rho)}{\rho}.$$

В нашем случае

$$\psi(\rho) = \rho\operatorname{arctg}\frac{M_1|x(\rho)|}{x(\rho)},$$

где функция $x(\rho)$ определяется из уравнения

$$x^2 + M_1^2(x) = \rho^2.$$

Поэтому, в силу условий (2) — (4), функция $z = \varphi_2(w)$ удовлетворяет условиям теоремы Н. У. Аракеляна.

Так как

$$\frac{\partial z}{\partial w} = \left(\frac{z+i}{w+i}\right)^2 \frac{\partial z_2}{\partial w_2},$$

то производная функции $z_2(w_2)$ также ограничена на окружности $|w_2| = 1$. По принципу максимума модуля она ограничена в замкнутом круге $|w_2| \leqslant 1$, а поэтому в силу (18) модуль производной $\frac{\partial z}{\partial w}$ также ограничен сверху при $\operatorname{Im} w \geqslant 0$.

Поэтому

$$\operatorname{Im} b_k \leqslant C_{28} M_1(|a_k|),$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\operatorname{Im}\frac{1}{b_k}\right| \leqslant C_{29} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_1(|a_k|)}{|a_k|^2}. \tag{38}$$

Пусть $n(t)$ — функция, равная числу корней функции $f(z)$ в круге радиуса t с центром в нуле. Как известно [3, стр. 42], справедливо неравенство

$$n(t) < \ln M(et, f) + C,$$

и, следовательно, $n(t) = 0(t^n)$.

Обозначим через $n_1(t)$ число корней функции $F(\zeta)$ в области $\left\{|\zeta| \leqslant t,\ \arg\zeta \neq \frac{3}{2}\pi\right\}$. Так как $n_1(t) \leqslant n\left(t^{\frac{1}{n}}\right)$, то

$$n_1(t) \leqslant C_{30} t. \tag{39}$$

Учитывая (38) и (39), записывая ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{M_1(|a_k|)}{|a_k|^2}$ в виде интеграла Стилтьеса, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\operatorname{Im}\frac{1}{b_k}\right| \leqslant C_{29}\int_1^{\infty}\frac{M_1(t)}{t^2}\,dn_1(t) =$$

$$= C_{29}\left[\frac{M_1(t)}{t}\frac{n_1(t)}{t}\Bigg|_1^{\infty} + \int_1^{\infty}\frac{n_1(t)}{t^3}\left[tM_1'(t) - 2M_1(t)\right]dt\right]. \tag{40}$$

Так как $f(z) \neq 0$, $|z| \leqslant 1$, то в силу (2) и (39) внеынтегральный член в (40) равен нулю.

Далее имеем в силу (40), (39), (2) и (3)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\operatorname{Im}\frac{1}{b_k}\right| \leqslant C_{29}\int_1^{\infty}\frac{n_1(t)\,M_1(t)}{t^2}\,dt \leqslant$$

$$C_{31}\int_1^{\infty}\frac{M_1'(t)}{t}\,dt = C_{31}\left[\frac{M_1(t)}{t}\Bigg|_1^{\infty} + \int_1^{\infty}\frac{M_1(t)}{t^2}\,dt\right] < \infty.$$

Лемма 4 доказана.

Пусть K — область в полуплоскости $\operatorname{Im} w > 0$, граница которой состоит из простой жордановой кривой C с концами t_1 и t_2 на вещественной оси. Пусть $K_1 \subset K \subset K_2$, где K_1 и K_2 полукруги с центром в нуле радиусов R_1 и R_2 ($R_2 > R_1 > 2$) соответственно, ограниченные полуокружностями C_1 и C_2 и вещественной осью. Пусть $\omega(w, \gamma)$, $\omega_1(w, \gamma)$, $\omega_2(w, \gamma)$ и $\omega_0(w, \gamma)$ — гармонические меры дуги γ относительно K, K_1, K_2 и полуплоскости $\operatorname{Im} w > 0$; $g(w_1, w_2)$, $g_1(w_1, w_2)$, $g_2(w_1, w_2)$ и $g_0(w_1, w_2)$ соответствующие функции Грина; Δ — отрезок вещественной оси.

Лемма 4. (В. И. Мацаев). *Справедливы оценки*

1) $\omega(i, C) < \omega_1(i, C) < \dfrac{8}{\pi R_1}$;

2) $\omega(i, \Delta) < \omega_2(i, \Delta) < \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\Delta}\frac{dt}{1+t^2}$, $\Delta \subset (t_1, t_2)$;

3) $\omega(i, \Delta) > \omega_1(i, \Delta) > \dfrac{3}{16\pi}\displaystyle\int_{\Delta}\frac{dt}{1+t^2}$, $\quad \Delta \subset \left(-\dfrac{R_1}{2}, \dfrac{R_1}{2}\right)$;

4) $g(i, w) < g_0(i, w) = \ln\left|\dfrac{i-w}{i-\bar{w}}\right|$, $w \in K$.

Доказательство. Докажем только неравенство 3), так как остальные неравенства доказываются аналогично. Функция $\omega(z, \Delta) - \omega_1(z, \Delta)$ равна нулю в интервале $(-R_1, R_1)$ и неотрицательна на дуге C_1. Следовательно, по принципу минимума $\omega(z, \Delta) - \omega_1(z, \Delta) > 0$ при $z \in K_1$. В частности,

$$\omega(i, \Delta) > \omega_1(i, \Delta).$$

Из представления Р. Неванлинны для гармонической в полукруге функции [7] следует

$$\omega_1(i, \Delta) = \frac{1}{\pi}\int_{\Delta}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{R_1^2}{R_1^4+t^2}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\Delta}\frac{\left(R_1^2-t^2\right)\left(R_1^2-1\right)}{(1+t^2)\left(R_1^4+t^2\right)}\,dt > \frac{3}{16\pi}\int_{\Delta}\frac{dt}{1+t^2}.$$

Мы воспользовались тем, что $R_1^2 - t^2 \geqslant \frac{3}{4} R_1^2$, $R_1^2 - 1 \geqslant \frac{1}{2} R_1^2$, $R_1^4 + t^2 \leqslant 2R_1^4$ при $R_1 > 2$ и $|t| < \frac{R_1}{2}$.

Наконец, приведем без доказательства следующую лемму.

Лемма 5 [8, стр. 316]. *Пусть функция $h(z)$ голоморфна при* $\operatorname{Im} z > 0$, $\ln|h(z)| \leqslant r(z)$, *где* $r(z)$ — *неотрицательная гармоническая в* $\operatorname{Im} z > 0$ *функция. Тогда*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|h(t)||}{1+t^2} dt < \infty.$$

Продолжим доказательство теоремы 1.

Из леммы 3 легко получить следующее утверждение. Существует последовательность $\rho_k \to +\infty$ такая, что

$$\ln|F(\rho_k e^{i\vartheta})| \geqslant -C_{32}\rho_k, \quad -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{3}{2}\pi. \tag{41}$$

Пусть $R = \rho_k$, а C — прообраз в полуплоскости $\operatorname{Im} w > 0$ множества $D_1 \cap \{|\zeta| = R\}$ при отображении $\zeta = \varphi_2(w)$. В силу (41), когда $s \in C$,

$$\ln|F_2(s)| \geqslant -C_{32}R.$$

Соединим концы t_1 и t_2 кривой C отрезком вещественной оси, и внутренность полученного контура назовем областью K. Построим для нее функцию Грина $g(w_1, w_2)$ и гармоническую меру $\omega(w, \gamma)$.

Гармоническая в K функция

$$\ln|F_2(w)| + \sum_{b_k \in K} g(w, b_k)$$

имеет представление [5, стр. 33]

$$\ln|F_2(w)| + \sum_{b_k \in K} g(w, b_k) = \int_{t_1}^{t_2} \ln|F_2(t)|\, d\omega + \int_C \ln|F_2(s)|\, d\omega. \tag{42}$$

Положим $w = i$, тогда (42) перепишется так:

$$\int_{t_1}^{t_2} \ln^+|F_2(t)|\, d\omega(i) = \int_{t_1}^{t_2} \ln^-|F_2(t)|\, d\omega(i) - \int_C \ln|F_2(s)|\, d\omega(i) + \\ + \ln|F_2(i)| + \sum_{b_k \in K} g(i, b_k).$$

В силу (17) кривая C при достаточно большом R лежит в кольце $C_{12}R < |w| < C_{11}R$. Положим $R_2 = C_{11}R$, $R_1 = C_{12}R$.

Используя лемму 4 и (41), получим

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{R_1}{2}}^{\frac{R_1}{2}} \ln^+ |F_2(t)| \frac{dt}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{-R_2}^{R_2} \ln^- |F_2(t)| \frac{dt}{1+t^2} +$$

$$+ C_{32}R\frac{8\pi}{C_{11}R} + \ln|F_2(i)| + \ln\prod_{k=1}^{\infty}\left|\frac{i-b_k}{i-\bar{b}_k}\right|.$$

Устремляя R к бесконечности по последовательности ρ_k, получим, в силу (19), (27) и (29), что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln^+|F_2(t)|}{1+t^2}dt < \infty.$$

Следовательно [3, стр. 311],

$$\ln|F_2(w)| = \frac{v}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|F_2(t)|}{(t-u)^2+v^2}dt + kv + \ln|\chi(w)|.$$

Отсюда, так как $|\chi(w)| \leqslant 1$ при $\operatorname{Im} w \geqslant 0$, получаем неравенство

$$\ln|F_2(w)| \leqslant \frac{v}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln^+|F_2(t)|}{(t-u)^2+v^2}dt + kv = q(w).$$

Легко видеть, что $q(w)$ — гармоническая в полуплоскости $\operatorname{Im} w > 0$ функция. Поэтому функция $q[\psi_2(\zeta)]$, где $\psi_2(\zeta) = \varphi_2^{-1}(w)$, гармонична в полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$. Отсюда следует, что функция $F(\zeta)$ удовлетворяет всем условиям леммы 5 с $r(\zeta) = q[\psi_2(\zeta)]$, поэтому

$$\int\limits_{1}^{\infty}\frac{|\ln|F(\rho)||}{1+\rho^2}d\rho < \infty.$$

Но так как $F(\rho) = f\left(\sqrt[n]{\rho}\right)$, то

$$\int\limits_{1}^{\infty}\frac{|\ln|f(\sqrt[n]{\rho})||}{1+\rho^2}d\rho = n\int\limits_{1}^{\infty}\frac{|\ln|f(r)||}{1+r^{2n}}r^{n-1}dr \geqslant C_{33}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{|\ln|f(r)||}{1+r^{n+1}}dr.$$

Очевидно, сходятся и все такие интегралы:

$$\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\left|\ln\left|f\left(re^{i\frac{\pi k}{n}}\right)\right|\right|}{1+r^{n+1}}dr,\quad k = 0, 1, \ldots, 2n-1.$$

Теорема 1 полностью доказана.

Теорема В. И. Мацаева, обобщением которой является теорема 1, использована им при доказательстве одной теоремы из теории несамосопряженных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве [1]. Мы сформулируем эту теорему, следуя И. Ц. Гохбергу и М. Г. Крейну [9].

Теорема. *Пусть* $A = C + T$ — *вольтерров оператор, причем* C — *неотрицательный оператор, а оператор* T *принадлежит классу* S_p *при некотором* $p < \frac{1}{2}$. *Тогда существует и конечен предел*

$$\lim_{n\to\infty} n^2 s_n(C),$$

где через $s_n(C)$ *обозначены* s-*числа** *оператора* C.

Используя вместо теоремы В. И. Мацаева теорему 1, мы установим несколько более сильную теорему.

Теорема 3. *Пусть* $A = C + T$ — *вольтерров оператор, причем* C — *нормальный оператор, а оператор* C^k *неотрицателен. Предположим, что* s-*числа оператора* T *таковы, что функция*

$$M(r) = \ln F(r) = \ln \prod_{j=1}^{\infty} [1 + r^2 s_j(T)]$$

удовлетворяет условиям (2) — (4) *теоремы 1.*

Тогда, если $\lambda_n^{(j)}(C)$ — *занумерованные в порядке убывания модулей собственные числа оператора* C, *расположенные на луче*

$$\arg \lambda_n^{(j)}(C) = \frac{2\pi j}{k}, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1,$$

существуют и конечны пределы

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{k}} \lambda_n^{(j)}(C), \quad j = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(\mu) = \frac{1}{\det[I - \mu^2 T (I - \mu^2 C)^{-1}]}.$$

Она является [9] целой функцией с нулями в точках $\pm \sqrt{\lambda_n(C)}$, причем кратность нуля равна кратности соответствующего собственного числа оператора C.

Как известно [9, стр. 309], для резольвенты нормального оператора H справедлива оценка

$$\| (I - \zeta H)^{-1} \| \leqslant \frac{1}{\zeta d\left(\frac{1}{\zeta}\right)},$$

* Напомним, что s-числа оператора C есть собственные числа оператора $(C^*C)^{\frac{1}{2}}$ с учетом кратности, занумерованные в порядке убывания.

где через $d(\zeta)$ обозначено расстояние от точки ζ до спектра оператора H.

В силу того, что оператор C^k по условию неотрицателен, спектр оператора C расположен на лучах $\arg z = \frac{2\pi j}{k}$, $j=0$, ..., 1. Нетрудно убедиться в том, что резольвента оператора C удовлетворяет оценке

$$\| (I-\mu^2 C)^{-1} \| \leqslant \frac{C(k)}{|\sin k\varphi|}.$$

На основании неравенств Вейля [9, стр. 56] имеем

$$\frac{1}{|f(\mu)|} \leqslant \prod_{j=1}^{\infty}\left[1 + C(k)\, r^2 \frac{s_j(T)}{|\sin k\varphi|^2}\right].$$

Отсюда получаем оценку снизу

$$\ln|f(\mu)| \geqslant -M\left(\frac{r\sqrt{C(k)}}{|\sin k\varphi|}\right) \geqslant -M_1\left(\frac{r^k}{|\sin k\varphi|}\right),$$

где $M_1(t) = M(t\sqrt{C(k)})$ удовлетворяет условиям (2) — (4) теоремы 1.

Согласно теореме 1, функция $f(\mu)$ не выше нормального типа порядка k и интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\ln\left|f\left(re^{i\frac{\pi j}{k}}\right)\right|\right|}{1+r^{k+1}}\, dr, \quad j=0,\ 1,\ \ldots,\ 2k-1,$$

сходятся.

Из теоремы В. К. Хеймана [10] следует, что равномерно по φ, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, существует предел

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\bar{\in} E}} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^k},$$

где $E \subset (0, \infty)$ — некоторое множество, такое, что

$$\int_E d\ln r < \infty.$$

Из конечности интеграла $\int_E d\ln r$ следует, что относительная мера $m^*(E) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1}\operatorname{mes}(E\cap(0, r))$ равна нулю. Поэтому функция $f(\mu)$ есть целая функция вполне регулярного роста в смысле Б. Я. Левина [3, стр. 182]. Отсюда следует [3, стр. 205], что множество ее корней имеет угловую плотность, т. е. для всех ϑ

и θ, $\vartheta < \theta$, кроме, может быть, счетного множества, существует предел

$$\lim_{r \to \infty} \frac{n(r, \vartheta, \theta)}{r^k},$$

где $n(r, \vartheta, \theta)$ — число корней функции $f(\mu)$ в секторе $\{|\mu| < r, \vartheta < \arg \mu < \theta\}$.

Так как все корни функции $f(\mu)$ расположены на $2k$-лучах, то существуют и конечны пределы

$$\lim_{r \to \infty} \frac{n_j(r)}{r^k}, \quad j = 0, 1, \ldots, 2k-1,$$

где $n_j(r)$ — число корней функции $f(\mu)$ на отрезке $\{|\mu| = r, \arg \mu = \frac{\pi j}{k}\}$.

Поэтому существуют и конечны пределы

$$\lim_{n \to \infty} n^{\frac{2}{k}} \lambda_n^{(j)}(C), \quad j = 0, 1, \ldots, k-1.$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность И. В. Островскому за руководство работой и Е. З. Могульскому за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Мацаев. О вольтерровых операторах, получаемых возмущением самосопряженных. ДАН СССР, 1939, № 4, 1961, 810—814.

2. В. И. Мацаев. О росте целых функций, допускающих некоторые оценки снизу. ДАН СССР, 132, № 2, 1960, 283—286.

3. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. М., Гостехиздат, 1956.

4. С. Е. Варшавский. Конформное отображение бесконечных полос. «Математика», 2:4, 1958, 67—116.

5. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции. Гостехиздат, М.—Л., 1941.

6. Н. У. Аракелян. Построение целых функций конечного порядка, равномерно убывающих внутри угла. ИАН Арм. ССР, Математика, 1, 1966, № 3, 162—191.

7. R. Nevanlinna. Über die Eigenschaften meromorphen Funktionen in einem Winkelraum, Acta Soc. Sci. Fenn., 50, № 12, 1925.

8. М. Г. Крейн. К теории целых функций экспоненциального типа. ИАН, Математика, 11, № 4, 1947.

9. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Изд-во «Наука», 1965.

10. W. K. Hayman. Question of regularity connected with the Phragmen—Lindelöf principle, Journ. de, Math. pures et appliquées, 35 (2), 1956, 115—126.

Поступила 21 сентября 1970 г.