КЛАССЫ РИССА И КРАТНЫЕ ПРАВИЛЬНЫЕ БАЗИСЫ

М. М. Драгилев

В статье рассматриваются пространства Кёте или, что то же, счетно-нормированные пространства E, имеющие абсолютный базис. Исключаются все не монтелевские пространства (например, l_1). Более того, предполагается, что E — проективный предел последовательности нормированных пространств относительно вполне непрерывных отображений. Введем основные определения.

1. Абсолютный базис (x_n) пространства E называют *правильным* [1], если в E определена производящая система норм, для которой выполнено условие

$$\frac{\| x_n \|_p}{\| x_n \|_{p+1}} \geqslant \frac{\| x_{n+1} \|_p}{\| x_{n+1} \|_{p+1}} \quad (n,\ p = 1,\ 2, \ldots). \tag{1}$$

Таковы, в частности, базисы конечномерного пространства.

2. Произвольный абсолютный базис (x_n) можно разбить на подпоследовательности, образующие правильный базис в своей замкнутой линейной оболочке. Минимальное число таких подпоследовательностей (зависящее, вообще говоря, от того, в каком порядке расположены элементы (x_n)) обозначим μ. Пусть

$$m = \inf \mu,$$

где inf берется по множеству всех перестановок (x_{j_n}). Базис (x_n) тогда и только тогда является правильным, когда $m = 1$ и $\mu = 1$. Назовем его *m-кратным правильным* базисом, если $\mu = m$ и $1 \leqslant \leqslant m \leqslant \infty$. Существуют пространства E, все базисы которых имеют кратность $m > 1$ [1].

3. Положим

$$\boldsymbol{M}_s = \{E : \inf m = s\} \quad (1 \leqslant s \leqslant \infty),$$

где inf берется по множеству всех абсолютных базисов пространства. При этом каждое пространство E попадает в один и только один из классов $\boldsymbol{M}_s$. Два пространства, принадлежащие разным классам, не изоморфны. Как мы покажем, $\boldsymbol{M}_s \neq \varnothing$ при любом s.

4. Пусть $T : E \to E$ — автоморфизм, (λ_n) — последовательность положительных чисел, (j_n) — перестановка натурального ряда. Абсолютный базис (x_n) в E и один из базисов (Tx_n), $(\lambda_n T x_n)$, $(\lambda_{j_n} T x_{j_n})$ называют соответственно *эквивалентными*, *предэквивалентными*, *квазиэквивалентными*. Говорят, что пространство E обладает *единственным абсолютным* базисом, если все абсолютные базисы в E квазиэквивалентны. Таково, например, A_r — пространство Кёте всех функций, аналитических в круге $|z| < r \leqslant \infty$ [2]. Говорят также, что E обладает *единственным правильным* базисом, если $E \in \boldsymbol{M}_1$, и все правильные базисы в E предэквивалентны. В первом случае пространство отнесем к классу $\boldsymbol{E}$, во втором — к классу $\boldsymbol{E}_1$.

В настоящей статье изучаются вопросы существования и единственности кратных правильных базисов. Пусть

$$E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n, \tag{2}$$

где $E_i \in \boldsymbol{M}_1$ $(i = 1, \ldots n)$ и s — минимальная кратность абсолютного базиса в E. Очевидно, $s \leqslant n$, но в отдельных случаях достигается точное равенство (например, если $E = A_1 \times A_\infty$ [1]. Вопрос о том, при каких условиях будет $s = n$, связывается здесь с рассмотрением специальных подмножеств класса $\boldsymbol{E}_1$, замкнутых относительно операции $\times$, называемых *классами Рисса* [3][1]. Если в (2) все пространства E_i принадлежат разным классам Рисса R_i, то в E, вообще говоря, существует n-кратный правильный базис. Если, сверх того, пространство E ядерно, то

[1] Таковы, в частности, классы R_0 и R_∞ всех пространств Кёте, изоморфных соответственно конечным и бесконечным центрам риссовских шкал [4].

все его базисы имеют одну и ту же кратность (т. е. в данном случае $s = n$). При дополнительном ограничении, согласно которому классы R_i должны быть существенно различны, все базисы в E квазиэквивалентны, т. е. пространство обладает единственным абсолютным базисом (последний результат — теорема 9 настоящей работы — получен совместно с В. П. Захарютой, см. [3] и [5]).

Статья содержит подробное изложение результатов, о которых упоминалось в заметке [3].

1. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПОДМНОЖЕСТВА КЛАССА M_1

Пусть (a_{pn}) — матрица положительных чисел, (t_n) — любая последовательность. Введем обозначения:

$$L^1(a_{pn}) = \left\{(t_n) : \forall_p \sum_n |t_n| a_{pn} < \infty\right\},$$

$$L^\infty(a_{pn}) = \left\{(t_n) : \forall_p \sup_n |t_n| a_{pn} < \infty\right\},$$

$$\overline{L}^1(a_{pn}) = \left\{(t_n) : \exists_p \sup_n \frac{|t_n|}{a_{pn}} < \infty\right\},$$

$$\overline{L}^\infty(a_{pn}) = \left\{(t_n) : \exists_p \sum_n |t_n| a_{pn} < \infty\right\}.$$

Множество $L^1(a_{pn})$ можно рассматривать как пространство Кёте (с топологией, задаваемой системой норм $\|(t_n)\|_p = \sum\limits_n |t_n| a_{pn}$ $p = 1, 2, \ldots$). Обратно, если E — счетно-нормированное пространство с абсолютным базисом (x_n), то, как легко видеть, $E \sim L^1(\|x_n\|_p)$.

Определение 1. *Матрицу (a_{pn}) назовем правильной, если $a_{pn} / a_{p+1,n} \downarrow 0$ при любом p.*

Пусть (a_{pn}) — правильная матрица. Положим

$$\Gamma(a_{pn}) = \left\{(t_n) : \forall_p \exists_q t_n \frac{a_{pn}}{a_{qn}} \to 0\right\}, \quad \Gamma'(a_{pn}) = \left\{(t_n) : \exists_p \forall_q t_n \frac{a_{qn}}{a_{pn}} \to 0\right\}.$$

Как известно, $\Gamma(a_{pn})$ — диаметральная размерность пространства $L^1(a_{pn})$*; $\Gamma'(a_{pn})$ — топологический инвариант, в некотором смысле двойственный к $\Gamma(a_{pn})$.

Определение 2. *Пусть $E \in M_1$ и (x_n) — правильный базис в E. Пространство E отнесем к классу (d_i) $(i = 1, 2, 3)$, если соответственно:*

$$1)\ \exists_p \forall_q \exists_r \frac{\|x_n\|_q^2}{\|x_n\|_p \|x_n\|_r} \to 0; \quad 2)\ \forall_p \exists_q \forall_r \frac{\|x_n\|_p^2}{\|x_n\|_p \|x_n\|_r} \to \infty;$$

$$3)\ E = E_1 \times E_2, \text{ где } E_i \in (d_i) \quad (i = 1, 2).$$

---

* Определение диаметральной размерности см. [6].

При этом безразлично, какой именно брать базис (x_n) [1]. Заметим, что $A_1 \in (d_2)$, $A_\infty \in (d_1)$. Если

$$(d) = \bigcup_{i=1}^{3} (d_i),$$

то $(d) \subset \boldsymbol{E}_1$ [1], причем выполняется строгое включение [7]. Нам будет полезна

Лемма 1 [1]. *Пространство* $E = L^1(a_{pn})$ *тогда и только тогда принадлежит классу* (d_i) $(i = 1, 2, 3)$, *когда соответственно:*

$$1)\ \underset{pq}{\exists\forall} \left(\frac{a_{qn}}{a_{pn}}\right)_{n=1}^{\infty} \in \Gamma(E) \qquad 2)\ \underset{p\ q}{\forall\exists} \left(\frac{a_{pn}}{a_{qn}}\right)_{n=1}^{\infty} \in \Gamma'(E).$$

Определение 3. (Ср. [8]). *Правильную матрицу* (α_{pn}) *назовем канонической, если выполнено одно из двух требований:*

$$\begin{aligned} &1)\ \alpha_{1n} = 1\ (n = 1, \ldots) \text{ и } \underset{p\ q}{\forall\exists} \alpha_{pn}^2 \leqslant \alpha_{qn}\ (n = 1, \ldots); \\ &2)\ \alpha_{pn} \uparrow 1\ (n = 1, \ldots) \text{ и } \underset{p\ q}{\forall\exists} \alpha_{pn} \leqslant \alpha_{qn}^2\ (n = 1, \ldots). \end{aligned} \tag{3}$$

Из леммы и определения легко вытекает

Лемма 2. *Пространство* $E = L^1(a_{pn})$ *тогда и только тогда принадлежит классу* (d_i) $(i = 1, 2, 3)$, *когда найдутся положительные числа* λ_n $(n = 1, \ldots)$ *и каноническая матрица* (α_{pn}) *(соответственно, первого и второго типа), такие, что* $L^1(\lambda_n a_{pn}) = L^1(\alpha_{pn})$. *При этом справедливы следующие утверждения:*

$$1)\ L^1(\alpha_{pn}) \in (d_1) \Longleftrightarrow \Gamma'(\alpha_{pn}) = L^\infty(\alpha_{pn}) \Longleftrightarrow \Gamma(\alpha_{pn}) = \overline{L}^1(\alpha_{pn}),$$

$$2)\ L^1(\alpha_{pn}) \in (d_2) \Longleftrightarrow \Gamma(\alpha_{pn}) = L^\infty(\alpha_{pn}) \Longleftrightarrow \Gamma'(\alpha_{pn}) = \overline{L}^1(\alpha_{pn}).$$

Отсюда видно, в частности, что диаметральная размерность пространства $E \in (d)$ полностью определяет его топологию[1]. Приведем еще некоторые следствия. Пусть

$$L^1(a_{pn}) \in (d_i) \text{ и } L^1(b_{pn}) \in (d_i)\ (i = 1, 2, 3).$$

Следствие 1.

$$\Gamma(a_{pn}) \subset \Gamma(b_{pn}) \Longleftrightarrow \underset{s\ p\ q\ r}{\forall\exists\forall\exists} \frac{b_{pn}}{b_{qn}} \frac{a_{rn}}{a_{sn}} \to \infty \Longleftrightarrow \Gamma'(a_{pn}) \supset \Gamma'(b_{pn}).$$

Пусть, далее, E — линейное топологическое пространство, $E^{(n)}$ — его подпространство конечной коразмерности n. Известно [10], что все подпространства одинаковой коразмерности изоморфны. Следовательно, если $E \sim E^{(1)}$, то $E \sim E^{(n)}$, каково бы ни было $E^{(n)}$.

Определение 4 (ср. [5]). *Говорят, что пространство* E *обладает свойством* (c), *либо свойством* $(\bar{c})$, *если при всех* n *соответственно* $E \sim E^{(n)}$ *и* $E \not\sim E^{(n)}$.

---

[1] Можно показать (см. [9]), что (d) есть в некотором смысле максимальный класс пространств Кёте, обладающий таким свойством.

Следствие 2. *Пространство $L^1(a_{pn})$ тогда и только тогда обладает свойством* (*c*), *когда*

$$\forall_s \exists_p \forall_q \exists_r \frac{a_{p,\, n+1}}{a_{q,\, n+1}} \frac{a_{rn}}{a_{sn}} \to \infty .$$

Следствие 3. *Всякое пространство класса* (*d*) *обладает либо свойством* (*c*), *либо свойством* ($\bar{c}$).

Остановимся на специальных подмножествах класса (*d*), выделенных в [1]. Пусть $a_{pn} = \exp f(\sigma_p b_n)$ $(n, p = 1,2,..)$, где $f(u)$ — неубывающая нечетная функция, логарифмически выпуклая при $u \geqslant 0$, $b_n \uparrow \infty$, $\sigma_p \uparrow \sigma$ и σ принимает одно из значений -1, 0, 1, ∞. Все пространства $L^1(a_{pn})$, для которых σ и f фиксированы (а также изоморфные им), отнесем к классу $(f)_\sigma$. В частном случае, когда $f(u) \equiv u$, имеем $(f)_0 = R_0$, $(f)_\infty = R_\infty$. Пусть вообще

$$\tau(\alpha) = \lim_{u \to \infty} \frac{f(\alpha u)}{f(u)} \; (1 < \alpha < \infty).$$

Функция $f(u)$ может иметь либо *медленный*, либо *быстрый* рост, т. е. для нее соответственно $\tau(\alpha) < \infty$ при всех α или $\tau(\alpha) \equiv \infty$. В первом случае $(f)_{-1} = (f)_0 = (f)_1 = R_0$ и $(f)_\infty = R_\infty$ (это позволяет рассматривать лишь два класса: $(f)_0$ и $(f)_\infty$). Во втором случае имеем $(f)_{-1}$ $(f)_0 \subset (d_2)$, $(f)_1$, $(f)_\infty \subset (d_1)$.

Замечание. Не известно, исчерпываются ли классы (d_1) и (d_2) подмножествами $(f)_\sigma$.

Лемма 3. [1]. *Пусть f_1 и f_2 — две функции быстрого роста, таких, что $f_2(u) \equiv f_1[f(u)]$. Тогда классы $(f_1)_{\sigma_1}$ и $(f_2)_{\sigma_2}$ либо совпадают, либо не пересекаются. Первое имеет место тогда и только тогда, когда $f(u)$ — функция медленного роста и $\sigma_1 = \sigma_2$.*

Из леммы вытекает существование бесконечного (несчетного) множества попарно не пересекающихся классов $(f)_\sigma$. Пусть $\sigma_1 \leqslant 0$ и $\sigma_2 \leqslant 0$, либо $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_2 > 0$ (т. е. $\sigma_1, \sigma_2 = -1$, 0, либо $\sigma_1, \sigma_2 = 1$, ∞). Условимся писать

$$(f_2)_{\sigma_2} \geqslant (f_1)_{\sigma_1},$$

если $f_2(u) \equiv f_1(f(u))$ (соответственно $f_1(u) \equiv f_2(f(u))$), где $f(u)$ — функция быстрого роста, а также в том случае, когда $\sigma_2 \geqslant \sigma_1$ (соответственно $\sigma_2 \leqslant \sigma_1$). Кроме того, каковы бы ни были классы $(f_2)_{\sigma_2}$ $(\sigma_2 \leqslant 0)$ и $(f_1)_{\sigma_1} (\sigma_1 > 0)$, положим $(f_2)_{\sigma_2} > (f_1)_{\sigma_1}$. Тем самым, как легко видеть, будет введено отношение порядка во множестве всех классов $(f)_\sigma$. Заметим, что $(f_1)_{\sigma_1} > (f_2)_{\sigma_2}$ влечет $(f_1)_{\sigma_1} \cap (f_2)_{\sigma_2} = \varnothing$. Существует несчетное множество классов $(f)_\sigma$, совершенно упорядоченных отношением $(>)$.

Введем дополнительные обозначения. Пусть $E \in \boldsymbol{E}_1$, (x_n) — правильный базис в E, $K(E)$ — класс всех пространств вида $L^1(\lambda_n \| x_{k_n} \|_\rho)$, где $\lambda_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $k_n \to \infty$ (не зависящий от базиса (x_n)). Положим

$$\mathscr{E}_0 = \{E \in \mathscr{E}_1 : K(E) \subset \mathscr{E}_1\}.$$

Очевидно, $\mathscr{E}_0 \neq \varnothing$, в частности, $\mathscr{E}_0 \supset (d)$. Легко проверяется также

Лемма 4. *Если $E \in \mathscr{E}_0$, то $K(E) \subset \mathscr{E}_0$.*

Заметим, что множество $K(E)$ обладает следующими двумя свойствами:

1°. Если $E_i \in K(E)$ $(i = 1, 2)$, то $E_1 \times E_2 \in K(E)$ (множество замкнуто относительно операции $\times$).

2°. $K(E_1 \times E_2) = K(E_1) \times K(E_2)$ при любых $E_i \in K(E)$*.

Определение 5. *Максимальное подмножество $R \subset \mathscr{E}_0$, обладающее свойствами 1° и 2°, назовем классом Рисса.*

Легко видеть, что всякое пространство $E \in \mathscr{E}_0$ принадлежит по меньшей мере одному классу Рисса. Этот факт полезно сопоставить с замечанием. на стр. 59.

Определение 6. *Класс Рисса R условимся называть полным, если существует пространство $E \in \mathscr{E}_0$ такое, что $R = K(E)$.* Будет показано, что классы R_0 и R_∞ (как и все вообще классы (f)) являются риссовскими, полными в смысле определения 6. Предварительно установим ряд вспомогательных предложений. Для краткости обозначим $K(E) = K(a_{pn})$, если $E = L^1(a_{pn})$.

Лемма 5. *Пусть (a_{pn}) и (b_{pn}) — правильные матрицы, удовлетворяющие условиям:* 1) $L^1(a_{pn}) \in (d_1) \cup (d_2)$; 2) $L^1(a_{pn}) \sim L^1(a_{p\,n+1})$; 3) $K(a_{pn}) \subset K(b_{pn})$. *Тогда* $K(a_{pn}) = K(b_{pn})$.

Доказательство. В силу последнего условия найдется последовательность (k_n), $k_n \uparrow \infty$, такая, что $L^1(a_{pn}) = L^1(b_{pk_n})$. Пусть (j_n), $j_n \uparrow \infty$, произвольная последовательность, не содержащая ни одного из чисел k_n (если такой последовательности нет, то доказательство уже закончено). Найдутся две последовательности (r_n) и (s_n) такие, что

$$k_{r_n} < j_{s_n} < k_{r_n + 1}$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$. Нам достаточно будет показать, что $L^1(b_{pj(s_n)}) \in K(a_{pn})$. Обозначим

$$b_{pk(r_n)} = b'_{pn} b_{pk(r_n+1)} = b''_{pn} \quad (p, n = 1, 2, \ldots).$$

Так как

$$L^1(b'_{pn}) = L^1(a_{pr_n}) \text{ и } L^1(b''_{pn}) = L^1(a_{pr_n+1}),$$

то в силу условия 2 имеем

$$\Gamma(b'_{pn}) = \Gamma(b''_{pn}), \quad \Gamma'(b'_{pn}) = \Gamma'(b''_{pn}).$$

---

* По определению $K(E_1) \times K(E_2) = \{G_1 \times G_2 : G_1 \in K(E_1),\ G_2 \in K(E_2)\}$.

В то же время по самому построению выполнены неравенства

$$\frac{b'_{pn}}{b'_{p+1,\,n}} = \frac{b_{pk(r_n)}}{b_{p+1,\,k(r_n)}} \geqslant \frac{b_{pj(s_n)}}{b_{p+1,\,j(s_n)}} \geqslant \frac{b_{pk(r_n+1)}}{b_{p+1,\,k(r_n+1)}} = \frac{b''_{pn}}{b''_{p+1,\,n}}$$

$$(p,\ n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Следовательно, $\Gamma\left(b_{pj(s_n)}\right) = \Gamma\left(b'_{pn}\right) = \Gamma\left(b''_{pn}\right)$ и $\Gamma'\left(b_{pj(s_n)}\right) = \Gamma'\left(b'_{pn}\right) = \Gamma'\left(b''_{pn}\right)$. Покажем, что пространство $L^1\left(b_{pj(s_n)}\right)$ принадлежит классу (d). В самом деле, если $L^1(a_{pn}) \in (d_i)$, то $L^1\left(b'_{pn}\right) \in (d_i)$ и $L^1\left(b''_{pn}\right) \in (d_i)$ $(i = 1,\ 2)$. По лемме 1 имеем соответственно

$$\exists_p \forall_q \left(\frac{b''_{qn}}{b''_{pn}}\right)_{n=1}^{\infty} \in \Gamma\left(b''_{pn}\right); \quad \forall_p \exists_q \left(\frac{b'_{pn}}{b'_{qn}}\right)_{n=1}^{\infty} \in \Gamma'\left(b'_{pn}\right).$$

Тем более выполнены условия:

а) $\exists_p \forall_q \left(\dfrac{b_{qj(s_n)}}{b_{pj(s_n)}}\right)_{n=1}^{\infty} \in \Gamma\left(b''_{pn}\right) = \Gamma\left(b_{pj(s_n)}\right)$;

б) $\forall_p \exists_q \left(\dfrac{b_{pj(s_n)}}{b_{qj(s_n)}}\right)_{n=1}^{\infty} \in \Gamma'\left(b'_{pn}\right) = \Gamma'\left(b_{pj(s_n)}\right)$.

Это означает, что $L^1\left(b_{pj(s_n)}\right) \in (d_1)$ и $L^1\left(b_{pj(s_n)}\right) \in (d_2)$. В обоих случаях $L^1\left(b_{pj(s_n)}\right) \sim L^1\left(a_{pr_n}\right) \sim L^1\left(a_{p,\,r_n+1}\right)$, что равносильно доказываемому.

Лемма 6. *Пусть (a_{pn}) и (b_{pn}) — правильные матрицы, удовлетворяющие условиям: 1) $L^1(a_{pn}) \in (d_1)$, либо $L^1(a_{pn}) \in (d_2)$, причем в обоих случаях матрица (a_{pn}) является канонической; 2) $L^1(a_{pn}) \supset L^1(b_{pn})$; 3) $L^1(a_{pn}) \neq L^1(b_{pn})$. Тогда найдется каноническая матрица (c_{pn}) такая, что для некоторой последовательности (k_n), $k_n \uparrow \infty$,*

$$L^1\left(a_{pk_n}\right) \supset L^1(c_{pn}) \supset L^1\left(b_{pk_n}\right),$$

и притом

$$L^1\left(a_{pk(m_n)}\right) \neq L^1(c_{pn}) \neq L^1\left(b_{pk(m_n)}\right)$$

для любой подпоследовательности $\left(k_{m_n}\right)$.

Доказательство. Так как $L^1(a_{pn}) \supset L^1(b_{pn})$, имеем

$$\forall_p \exists_q \sup_n \frac{a_{pn}}{b_{qn}} < \infty.$$

Из того, что обратное включение не выполняется, можно сделать вывод: найдутся две последовательности (j_s), $j_s \uparrow \infty$ и (p_s), $p_s \uparrow \infty$, такие, что при некотором q

$$\frac{a_{p_s j_s}}{b_{q j_s}} \to 0. \tag{4}$$

Пусть сначала $L^1(a_{pn}) \in (d_1)$. Тогда (a_{pi_n}) — каноническая матрица первого типа, удовлетворяющая условию:

$$\underset{i}{\forall}\underset{r_i}{\exists} a_{r_i j_s} > a_{ij_s}^2 \quad (s = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Положим $r_i^{(0)} = 1$, $r_i^{(1)} = i$ $(i = 1, \ldots)$ и затем для каждого i построим последовательность $r_i^{(2)}, r_i^{(3)}, \ldots r_i^{(p)}$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$a_{r_i^{(p)}, j_s} > a^2_{r_i^{(p-1)}, j_s} \quad (p = 1, 2, \ldots; \ s = 1, 2, \ldots).$$

Далее положим $s_1 = 1$. Найдем такое s_2, чтобы было

$$\frac{a_{r_1^{(0)}, j(s_1)}}{a_{r_1^{(1)}, j(s_1)}} > \frac{a_{r_2^{(0)}, j(s_2)}}{a_{r_2^{(1)}, j(s_2)}}.$$

Вообще, если числа $s_1, s_2, \ldots s_{n-1}$ уже выбраны, то s_n определим из того условия, чтобы одновременно выполнялись неравенства:

$$\frac{a_{r_{n-1}^{(0)}, j(s_{n-1})}}{a_{r_{n-1}^{(1)}, j(s_{n-1})}} > \frac{a_{r_n^{(0)}, j(s_n)}}{a_{r_n^{(1)}, j(s_n)}}; \quad \frac{a_{r_{n-1}^{(1)}, j(s_{n-1})}}{a_{r_{n-1}^{(2)}, j(s_{n-1})}} > \frac{a_{r_n^{(1)}, j(s_n)}}{a_{r_n^{(2)}, j(s_n)}}; \ \ldots$$

$$\frac{a_{r_{n-1}^{(n-2)}, j(s_{n-1})}}{a_{r_{n-1}^{(n-1)}, j(s_{n-1})}} > \frac{a_{r_n^{(n-2)}, j(s_n)}}{a_{r_n^{(n-1)}, j(s_n)}} \quad (n = 3, \ldots).$$

Потребуем, кроме того, чтобы

$$p_{s_n} > r_n^{(n-1)} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Для краткости обозначим $j(s_n) = k_n$. Положим

$$c_{pn} = a_{r_n^{(p-1)}, k_n} \quad (p, n = 1, 2, \ldots).$$

По построению при любом p для всех $n > p$ справедливо неравенство

$$\frac{c_{pn}}{c_{p+1, n}} = \frac{a_{r_n^{(p-1)}, k_n}}{a_{r_n^{(p)}, k_n}} > \frac{a_{r_{n+1}^{(p-1)}, k_{n+1}}}{a_{r_{n+1}^{(p)}, k_{n+1}}} = \frac{c_{p, n+1}}{c_{p+1, n+1}}.$$

Наряду с этим имеем

$$c_{p+1, n} = a_{r_n^{(p)}, k_n} > a^2_{r_n^{(p-1)}, k_n} = c^2_{p, n} \quad (p, n = 1, 2, \ldots).$$

Наконец, $c_{pn} = 1$ при $p = 1$ и $n = 1, 2, \ldots$.

Иными словами, матрица (c_{pn}) является канонической. Заметим теперь, что при любом $q > 2$ выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{nk_n}}{c_{qn}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{r_n^{(1)}, k_n}}{a_{r_n^{(q-1)}, k_n}} = 0.$$

Из него следует, во-первых:

$$\forall_p \exists_q \sup_n \frac{a_{pk_n}}{c_{qn}} < \infty.$$

Это означает, что $L^1(a_{pk_n}) \supset L^1(c_{pn})$. Во-вторых, существует такое q (например, $q = 3$), что при любом p

$$\frac{c_{qn}}{a_{pk_n}} \to \infty.$$

Следовательно, $L^1(a_{pk_n}) \not\supset L^1(c_{pn})$, т. е. $L^1(a_{pk_n}) \neq L^1(c_{pn})$. То же верно для любой подпоследовательности (k_{m_n}) последовательности (k_n). Кроме того, при любом n имеем

$$c_{nn} = a_{r_n^{(n-1)}, k_n} \leqslant a_{p(s_n), j(s_n)}.$$

Отсюда и из (4) следует, что при некотором q

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{nn}}{b_{qk_n}} = 0.$$

Это означает, что $L^1(c_{pn}) \supset L^1(b_{pk_n})$ и $L^1(c_{pn}) \neq L^1(b_{pk_n})$, притом $L^1(c_{pm_n}) \neq L'(b_{pk(m_n)})$ для любой подпоследовательности (m_n).

Наконец, во втором случае, когда $L^1(a_{pn}) \in (d_2)$, вместо (5) имеем

$$\forall_i \exists_{r_i} a^2_{r_i j_s} > a_{ij_s} \quad (s = 1, 2, \ldots).$$

С небольшими изменениями доказательство распространяется и на этот случай.

Теорема 1. *Пусть $E \in (d)$. Множество $K(E)$ тогда и только тогда является полным классом Рисса, когда пространство E обладает свойством (c).*

Доказательство. 1. Пусть E — пространство, обладающее свойством (c), и (a_{pn}) — правильная матрица, такая, что $E \sim L^1(a_{pn})$. Тогда $L^1(a_{pn}) \sim L^1(a_{p\, n+1})$, ибо $L^1(a_{pn+1})$ можно рассматривать как подпространство пространства $L^1(a_{pn})$ коразмерности 1. Отсюда легко можно вывести, что $E \notin (d_3)$, т. е. $E \in (d_1)$, либо $E \in (d_2)$. Но тогда по лемме 5 не существует правильной матрицы (b_{pn}), такой, что $K(b_{pn}) \supset K(a_{pn})$ и $K(b_{pn}) \neq K(a_{pn})$. Следовательно, $K(E) = K(a_{pn})$ — полный класс Рисса.

2. Обратно, если $K(E) = K(a_{pn})$ — полный класс Рисса, то нам достаточно показать, что $L^1(a_{pn}) \sim L^1(a_{pn+1})$, ибо в этом случае все подпространства E конечной коразмерности изоморфны.

Предположим, что $L^1(a_{pn}) \approx L^1(a_{pn+1})$ и пусть сначала $L^1(a_{pn}) \in \in (d_1)$. Не уменьшая общности, можем считать, что матрица (a_{pn}) — каноническая. Тогда по лемме 2 $\Gamma(a_{pn}) = \overline{L}^1(a_{pn})$, $\Gamma(a_{pn+1}) = \overline{L}^1(a_{pn+1})$. Поскольку $\Gamma(a_{pn+1}) \supset \Gamma(a_{pn})$, то $\overline{L}^1(a_{pn+1}) \supset \overline{L}'(a_{pn})$, и, следовательно, $\overline{L}^1(a_{pn+1}) \subset \overline{L}'(a_{pn+1})$. При этом $\overline{L}^1(a_{pn+1}) \neq \neq \overline{L}^1(a_{pn})$. В силу леммы 6 существует каноническая матрица (c_{pn}) такая, что

$$\overline{L}^1\left(a_{pk_n}\right) \supset \overline{L}^1(c_{pn}) \supset \overline{L}^1\left(a_{pk_n+1}\right) \tag{6}$$

для некоторой последовательности (k_n) и притом

$$L^1\left(a_{pk(m_n)}\right) \neq L^1\left(c_{pm_n}\right) \neq L^1\left(a_{pk(m_n)+1}\right),$$

какова бы ни была подпоследовательность (k_{m_n}). Так как в данном случае $\Gamma(c_{pn}) = \overline{L}^1(c_{pn})$, то выполняются (строгие) включения:

$$\Gamma\left(a_{pk(m_n)}\right) \subset \Gamma\left(c_{pm_n}\right) \subset \Gamma\left(a_{pk(m_n)+1}\right).$$

С помощью леммы 2 (следствие) находим соответственно

$$\left.\begin{aligned} &\text{а)}\ \ \underset{s}{\exists}\,\underset{p}{\forall}\,\underset{q}{\exists}\,\underset{r}{\forall}\,\lim_{n\to\infty}\frac{c_{pm_n}a_{rk(m_n)}}{c_{qm_n}a_{sk(m_n)}} = 0;\\ &\text{б)}\ \ \underset{s}{\exists}\,\underset{p}{\forall}\,\underset{q}{\exists}\,\underset{r}{\forall}\,\lim_{n\to\infty}\frac{a_{pk(m_n+1)}c_{rm_n}}{a_{qk(m_n)+1}c_{sm_n}} = 0.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

В обоих случаях s зависит от последовательности $\nu = (m_n)$, которая может быть выбрана произвольно. Фиксируя последовательность ν, остановимся на первом условии. Из него следует, что для любого числа $s_1' > s$ найдется такое $s_2' > s_1'$, что

$$\lim_{m\in\nu}\frac{c_{s_1'm}\,a_{s_2'k_m}}{c_{s_2'm}\,a_{s_1'k_m}} = 0.$$

Пользуясь этим, выделим из ν подпоследовательность $\nu^{(1)}$ тех m, для которых справедливо неравенство

$$\frac{c_{s_1'm}\,a_{s_2'k_m}}{c_{s_2'm}\,a_{s_1'k_m}} < 1.$$

К последовательности $\nu^{(1)}$ применим то же рассуждение, в результате чего найдем такие $s_3' > s_2'$ и подпоследовательность $\nu^{(2)}$, что

$$\frac{c_{s_2'm}\,a_{s_3'k_m}}{c_{s_3'm}\,a_{s_2'k_m}} < 1$$

для всех $m \in \nu^{(2)}$. Этот процесс продолжим неограниченно. Диагональная подпоследовательность ν', извлеченная из всех $\nu^{(i)}$ ($i = 1, 2, \ldots$), будет обладать следующим свойством: для каждого i найдется такое m'_i, что

$$\frac{c_{s'_i m}\, a_{s'_{i+1} k_m}}{c_{s'_{i+1} m}\, a_{s'_i k_m}} < 1$$

для всех $m > m'_i$, принадлежащих ν'. Теперь воспользуемся вторым условием (7) применительно к последовательности ν'. Диагональным методом выделим три последовательности (s''_i), ν'' и (m''_i), удовлетворяющие условию

$$\frac{a_{s''_i k_m + 1}\, c_{s''_{i+1} m}}{a_{s''_{i+1} k_m + 1}\, c_{s''_i m}} < 1,$$

где $m \in \nu''$, $m > m''_i$ и $i = 1, 2, \ldots$. При этом всегда можно добиться того, чтобы все s''_i принадлежали последовательности (s'_i). Кроме того, по построению $\nu'' \subset \nu'$. Обозначим $\nu'' = (m_n)$, $s''_i = s_i$ ($i = 1, 2, \ldots$). Тогда, если $s_i = s'_{j_i}$, имеет место тождество:

$$\frac{c_{s_i m_n}\, a_{s_{i+1} k(m_n)}}{c_{s_{i+1} m_n}\, a_{s_i k(m_n)}} = \frac{c_{s'(j_i) m_n}\, a_{s'(j_i+1) k(m_n)}}{c_{s'(j_i+1) m_n}\, a_{s'(j_i) k(m_n)}} \times$$

$$\times \frac{c_{s'(j_i+1) m_n}\, a_{s'(j_i+2) k(m_n)}}{c_{s'(j_i+2) m_n}\, a_{s'(j_i+1) k(m_n)}} \cdots \frac{c_{s'(j_{i+1}-1) m_n}\, a_{s'(j_{i+1}) k(m_n)}}{c_{s'(j_{i+1}) m_n}\, a_{s'(j_{i+1}) k(m_n)}} \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда легко вытекает, что

$$\frac{c_{s_i m_n}\, a_{s_{i+1} k(m_n)}}{c_{s_{i+1} m_n}\, a_{s_i k(m_n)}} < 1$$

для всех $n > n_i$, где n_i выбирается таким образом, чтобы было $m_{n_i} > m'_{j_i}$. Если еще потребовать, чтобы m_{n_i} было не меньше, чем m''_i, то будет выполнено неравенство

$$\frac{a_{s_i k(m_n)}}{a_{s_{i+1} k(m_n)}} > \frac{c_{s_i m_n}}{c_{s_{i+1} m_n}} > \frac{a_{s_i k(m_n)+1}}{a_{s_{i+1} k(m_n)+1}}$$
$$(n > n_i,\ i = 1, 2, \ldots).$$

Обозначим $G = L^1(c_{p m_n})$. Из последнего неравенства следует, что в пространстве $E \times G$ существует правильный базис, притом $K(E \times G) = K(E) \times K(G)$. Остается показать, что множество $K(E \times G)$ существенно шире, чем $K(E)$, и таким образом, $K(E)$ не является классом Рисса. Достаточно установить, что $G \notin K(E)$.

Предположим, что $G \in K(E)$. Тогда найдутся последовательность индексов (j_n), $j_n \uparrow \infty$, и последовательность положительных чисел (λ_n) такие, что $L^1(c_{pm_n}) = L^1(\lambda_n a_{pj_n})$. При этом для любой подпоследовательности (j_{l_n}) будет

$$L^1\left(\lambda_{l_n} a_{pj(l_n)}\right) = L^1\left(c_{pm(l_n)}\right). \tag{8}$$

Положим

$$j_n = \begin{cases} j_{l'_n}, & \text{если } j_n \leqslant k_{m_n} \\ j_{l''_n}, & \text{если } j_n > k_{m_n}. \end{cases}$$

В случае, если последовательность (l'_n) окажется бесконечной, воспользуемся неравенством

$$\frac{a_{rk(m(l'_n))}}{a_{sk(m(l'_n))}} \leqslant \frac{a_{rj(l'_n)}}{a_{sj(l'_n)}},$$

которое справедливо при любых s и $r > s$. Из него и из (6*a*) следует

$$\underset{s}{\exists} \underset{p}{\forall} \underset{q}{\exists} \underset{r}{\forall} \lim_{n \to \infty} \frac{c_{pm(l'_n)} a_{rj(l'_n)}}{c_{qm(l'_n)} a_{sj(l'_n)}} = 0.$$

Но тогда, в силу леммы 18, $\Gamma\left(a_{pj(l'_n)}\right) \not\supset \Gamma\left(c_{pm(l'_n)}\right)$, что противоречит (7).

В другом возможном случае (т. е. когда из двух последовательностей (l'_n) и (l''_n) только вторая содержит бесконечное число элементов) имеем

$$\frac{a_{pj(l''_n)}}{a_{qj(l''_n)}} < \frac{a_{pk(m(l''_n))+1}}{a_{qk(m(l''_n))+1}} \quad (q > p,\ n = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда и из (7*б*) следует

$$\underset{s}{\exists} \underset{p}{\forall} \underset{q}{\exists} \underset{r}{\forall} \lim_{n \to \infty} \frac{a_{pj(l''_n)} c_{rm(l''_n)}}{a_{qj(l''_n)} c_{sm(l''_n)}} = 0.$$

Это означает, что $\Gamma\left(a_{pj(l''_n)}\right) \not\subset \Gamma\left(c_{pm(l''_n)}\right)$, что также противоречит равенству (8).

Предположим еще, что $E \in (d_2)$. Тогда

$$\Gamma(a_{pn}) = L^\infty(a_{pn}),\quad \Gamma(a_{pn+1}) = L^\infty(a_{pn+1})$$

и вместо (6) имеем

$$L^1\left(a_{pk_n}\right) \subset L^1\left(c_{pn}\right) \subset L^1\left(a_{pk_n+1}\right).$$

Этот случай несущественно отличается от предыдущего.

Наконец, если $E \in (d_3)$, уже нетрудно показать, что $K(E)$ вообще не является классом Рисса. Теорема доказана.

Следствие. *Все классы $(f)_\sigma$ (включая R_0 и R_∞) являются полными классами Рисса.*

3. КОМПАКТНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Сформулируем необходимые и достаточные условия того, чтобы пересечение риссовских классов R_1 и R_2 было пусто. Пусть E_1 и E_2 — векторные пространства последовательностей $(t_n) = t$.

Если $E_1 \subset E_2$, обозначим через $J : E_1 \to E_2$ оператор тождественного вложения.

Как легко видеть, вложение J пространства $L'(a_{pn})$ в пространство $L'(b_{pn})$ существует тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\forall_p \exists_q \sup_n \frac{b_{pn}}{a_{qn}} < \infty. \tag{9}$$

Отсюда следует, что любое вложение J непрерывно. В частном случае, когда выполнено более сильное требование

$$\exists_p \forall_q \sup_n \frac{b_{pn}}{a_{qn}} < \infty, \tag{10}$$

оператор J оказывается компактным[1]. На этом замечании основано

Определение 7. *Оператор J назовем почти компактным, если существует последовательность (j_n), удовлетворяющая условию*

$$\exists_q \forall_p \sup_n \frac{b_{pj_n}}{a_{qj_n}} < \infty.$$

Теорема 2. *Риссовские классы R_1 и R_2 тогда и только тогда имеют пустое пересечение, когда всякое вложение J пространства $E_1 \in R_1$ в пространство $E_2 \in R_2$ (и наоборот) почти компактно.*

Доказательство. Если $R_1 \cap R_2 \neq \varnothing$, например, $E = L^1(a_{pn}) \in R_1 \cap R_2$, то тождественный оператор $J : E \to E$, очевидно, не может быть почти компактным: он удовлетворяет соотношению

$$\forall_p \exists_q \lim_{n\to\infty} \frac{a_{pn}}{a_{qn}} = \infty,$$

что противоречит (10). Обратно, если существуют (вложенные) пространства $E_1 = L^1(a_{pn}) \in R_1$ и $E_2 = L^1(a_{pn}) \in R_2$ такие, что для

[1] Определение компактного (вполне непрерывного) оператора см., напр., [10].

них оператор $J : E_1 \to F_2$ не является почти компактным, то для всякой последовательности (j_n) и любого q найдется такое p, что

$$\sup_n \frac{b_{pj_n}}{a_{qj_n}} = \infty.$$

Это позволяет выделить последовательность (j_n), удовлетворяющую условию

$$\forall_p \exists_q \frac{a_{qj_n}}{b_{pj_n}} \to 0.$$

Отсюда и из того, что J — непрерывный оператор, следует, что $L^1(a_{pj_n}) = L^1(b_{pj_n})$, т. е. $R_1 \cap R_2 \neq \varnothing$.

Следствие. *Если* $(f_2)_{\sigma_2} > (f_1)_{\sigma_1}$, то всякое вложение $J : E_2 \to E_1$, где $E_1 \in (f_1)_{\sigma_1}$ и $E_2 \in (f_2)_{\sigma_2}$ (а также наоборот) почти компактно.

В действительности все вложения $J : E_2 \to E_1$ просто компактны [5]. Более того, как показал В. Захарюта, имеет место

Теорема 3*. [5], [11]. *Если* $(f_2)_{\sigma_2} > (f_1)_{\sigma_1}$, *то всякое линейное непрерывное отображение* T *произвольного пространства* $E_2 \in (f_2)_{\sigma_2}$ *в любое пространство* $E_1 \in (f_1)_{\sigma_1}$ *компактно.*

Нам будет удобно вывести теорему 3 из следующей общей леммы, доказательство которой в основном сохраняет методику В. Захарюты. Воспользуемся специальным обозначением:

$$\omega(p, q; r, s) = \left\{ (j_n, k_n) : \sup_n \frac{a_{pj_n}}{a_{qj_n}} \frac{b_{rk_n}}{b_{sk_n}} < \infty \right\},$$

где (a_{pn}) и (b_{pn}) — любые матрицы, а (j_n) и (k_n) — последовательности, стремящиеся к ∞.

Лемма 7. Пусть (a_{pn}) *и* (b_{pn}) *— правильные матрицы, удовлетворяющие условию*

$$\exists_{p_1} \forall_{q_1} \exists_{q} \forall_{p} \exists_{p_2} \forall_{q_2} \omega(q, q_1; p_1, p) \subset \omega(q_2, q; p, p_2). \tag{11}$$

Тогда всякое непрерывное линейное отображение пространства $L^1(a_{pn})$ *в пространство* $L^1(b_{pn})$ *компактно.*

В самом деле, требование непрерывности оператора $T : L^1(a_{pn}) \to L^1(b_{pn})$ (заданного матрицей (t_{ij})) равносильно следующему: для любого p найдется такое $q = q(p)$, что

$$\sup_n \sum_{i=1}^{\infty} |t_{in}| \frac{b_{pi}}{a_{qn}} = C(p) < \infty.$$

Выбрав в соответствии с условием леммы числа p_1, $q_1 = q(p_1)$, $q > q_1$, построим для произвольного p, $p > p_1$ такую последовательность (k_n), чтобы при больших n выполнялись неравенства

$$\frac{b_{pk_n}}{b_{p_1k_n}} \frac{a_{q_1n}}{a_{qn}} \leqslant 1, \quad \frac{b_{pk_n+1}}{b_{p_1k_n+1}} \frac{a_{q_1n}}{a_{qn}} \geqslant 1.$$

* Теорема 3 предшествовала теореме 2.

Так как $(n; k_n+1) \in \omega(q, q_1; p_1, p)$, то найдется такое p_2, что $(n, k_n+1) \in \omega(q_2, q; p, p_2)$, каково бы ни было q_2, т. е.

$$\sup_n \frac{a_{q_2 n}}{a_{qn}} \frac{b_{pk_n+1}}{b_{p_2 k_n+1}} = C_1 < \infty.$$

Положив $q_2 = q(p_2)$, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{\infty} |t_{in}| \frac{b_{pi}}{a_{qn}} = \sum_{i=1}^{k_n} |t_{in}| \frac{b_{p_1 i}}{a_{q_1 n}} \frac{b_{pi}}{b_{p_1 i}} \frac{a_{q_1 n}}{a_{qn}} +$$

$$+ \sum_{i=k_n+1}^{\infty} |t_{in}| \frac{b_{p_2 i}}{a_{q_2 n}} \frac{b_{pi}}{b_{p_2 i}} \frac{a_{q_2 n}}{a_{qn}} \leqslant C(p_1) \frac{b_{pk_n} a_{q_1 n}}{b_{qk_n} a_{qn}} + C(p_2) \frac{b_{pk_n+1}}{b_{p_2 k_n+1}} \frac{a_{q_2 n}}{a_{qn}}.$$

Следовательно,

$$\varlimsup_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} |t_{in}| \frac{b_{pi}}{a_{qn}} \leqslant C(p_1) + C_1 C(p_2).$$

Так как здесь q фиксировано, а правая часть зависит только от p, то этим доказана компактность оператора T.

Следствие. [5]. *Если* $E_1 \in (d_2)$, *а* $E_2 \in (d_1)$, *то всякое непрерывное линейное отображение* $T: E_1 \to E_2$ *компактно.*

Действительно, не уменьшая общности, можем считать, что $E_1 = L^1(a_{pn})$, $E_2 = L^1(b_{pn})$, где (a_{pn}) и (b_{pn}) — правильные матрицы. По определению для любых последовательностей (j_n) и (k_n) имеем

$$\underset{q_1}{\forall}\, \underset{q}{\exists}\, \underset{q_2}{\forall}\, \frac{a_{q_2 j_n} a_{q_1 j_n}}{(a_{q j_n})^2} \to 0, \quad \underset{p_1}{\exists}\, \underset{p}{\forall}\, \underset{p_2}{\exists}\, \frac{(b_{pk_n})^2}{b_{p_2 k_n} b_{p_1 k_n}} \to 0.$$

Тем более выполнено следующее условие:

$$\underset{p_1}{\exists}\, \underset{q_1}{\forall}\, \underset{q}{\exists}\, \underset{p}{\forall}\, \underset{p_2}{\exists}\, \underset{q_2}{\forall}\, \frac{b_{pk_n} a_{q_2 j_n}}{b_{p_2 k_n} a_{q j_n}} : \frac{b_{p_1 k_n} a_{q j_n}}{b_{pk_n} a_{q_1 j_n}} \to 0.$$

Из него непосредственно следует (11).

Выведем теперь теорему 3. Пусть $(f_1)_{\sigma_1} > (f_2)_{\sigma_2}$ и пусть, например, $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_2 > 0$. Положим $a_{pn} = \exp f_1(\lambda_p a_n)$, $b_{pn} = \exp f_2(\mu_p b_n)$, где $\lambda_p \uparrow \sigma_1$, $\mu_p \uparrow \sigma_2$ и выберем произвольно числа p_1, q_1, $q > q_1$, p. Рассмотрим подробно тот случай, когда $f_2(u) \equiv f_1(f(u))$, где $f(u)$ — функция быстрого роста. Включение $(j_n, k_n) \in \omega(q, q_1; p_1, p)$ равносильно следующему:

$$\sup_n [f_1(f(\mu_{p_1} b_{k_n})) - f_1(f(\mu_p b_{k_n})) + f_1(\lambda_q a_{j_n}) - f_1(\lambda_q a_{j_n})] < \infty.$$

Это возможно лишь, если $p > p_1$ и $f_1(\lambda_q a_{j_n}) < f_1(f(\mu_p b_{k_n}))$ при больших n или, что то же,

$$\lambda_q a_{j_n} < f(\mu_p b_{k_n}).$$

Но тогда достаточно взять $p_2 > p$, чтобы при любом q_2 было

$$\lambda_{q_2} a_{j_n} < f(\mu_{p_2} b_{k_n}),$$

ибо функция $f(u)$ по условию имеет быстрый рост. Отсюда в свою очередь вытекает, что

$$\sup_n [f_1(f(\mu_p b_{k_n})) - f_1(f(\mu_{p_2} b_{k_n})) + f_1(\lambda_{q_2} a_{j_n}) - f_1(\lambda_q a_{j_n})] < \infty.$$

Следовательно, $(j_n, k_n) \in \omega(q_2, q; p, p_2)$, и, таким образом, выполнено условие (11). В других случаях доказательство аналогично.

Пусть, далее, $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — два произвольных множества локально-выпуклых пространств. Условимся писать

$$\boldsymbol{A} > \boldsymbol{B}, \tag{12}$$

если все непрерывные линейные отображения каждого пространства $E \in \boldsymbol{A}$ в любое пространство $G \in \boldsymbol{B}$ компактны. Из теоремы 3 следует, что так определенное отношение ($>$) согласуется с прежним отношением порядка во множестве всех классов $(f)_\sigma$. Отметим очевидное следствие леммы 7.

Теорема 4. *Если* $R_1 = K(a_{pn})$ *и* $R_2 = K(b_{pn})$, *где* a_{pn} *и* b_{pn} *удовлетворяют условию* (11), *то* $R_1 > R_2$.

Как видно из результатов, приведенных в [4], отношение (12) между классами Рисса не обладает, вообще говоря, свойством симметрии (т. е. $R_1 > R_2 \not\Rightarrow R_2 > R_1$). Об этом же наглядно свидетельствует следующий пример (построенный совместно с В. Захарютой).

Пример. Пусть ν_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — такие подпоследовательности натурального ряда, что $\bigcup_k \nu_k = (n)$ и $\nu_i \cap \nu_j = \varnothing$, если $i \neq j$. Положим

$$a_{pn} = \exp(pn) \quad (p, n = 1, 2, \ldots),$$

$$\lambda_n = \exp(2\sqrt{k}n), \quad b_{pn} = \lambda_n \exp\left(-\frac{kn}{\sqrt{p}}\right) (n \in \nu_k, k = 1, \ldots; p = 1, \ldots).$$

Тогда, если $E = L^1(a_{pn})$ и $G = L^1(b_{pn})$, $E \in R_\infty$, а $G \in R_0$. Существует непрерывное вложение $J : E \to G$, ибо при любом p и $q > \sqrt{p}$ имеем

$$b_{pn} = \exp\left(2\sqrt{k} \cdot n - \frac{kn}{\sqrt{p}}\right) \leqslant \exp(\sqrt{p}n) \leqslant a_{qn} \left(n \in \nu_k, k = 1, \ldots\right).$$

В то же время оператор J не является компактным, так как при всех q

$$\sup_n \frac{b_{pn}}{a_{qn}} \geqslant \sup_{\nu_p} \frac{b_{pn}}{a_{qn}} = \sup_{\nu_p} (\sqrt{p} - q) n = \infty,$$

если только $p > q^2$. Таким образом, $R_\infty \not> R_0$, в то время как $R_0 > R_\infty$ в силу теоремы 3.

Заметим в заключение, что множество всех классов Рисса содержит несчетные подмножества, совершенно упорядоченные отношением (12).

4. СЛУЧАЙ ЯДЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Будем рассматривать сужения $R(N)$ риссовских классов R на множество N ядерных пространств Кёте. Можно дать простой критерий того, чтобы классы $R_i(N)$ $(i = 1, 2)$ были связаны отношением (12).

Пусть $T = (t_{ij})$ — линейный оператор, действующий из ядерного пространства $L^1(a_{pn})$ в пространство $L^1(b_{pn})$. Введем обозначения:

$$\|(t_n)\|_p^1 = \sum_{n=1}^{\infty} |t_n| a_{pn} \quad |(t_n)|_p^1 = \sup_{1 \leqslant n < \infty} \frac{|t_n|}{a_{pn}},$$

$$\|(t_n)\|_p^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |t_n| b_{pn} \quad |(t_n)|_p^2 = \sup_{1 \leqslant n < \infty} \frac{|t_n|}{b_{pn}}, \quad (p = 1, 2, \ldots).$$

Лемма 8. Следующие утверждения 1°—3° *и соответственно* 4°—6° *эквивалентны*:

1°. *Отображение T непрерывно.*

2°. $\forall_p \exists_q \sup_j \sum_{i=1}^{\infty} |t_{ij}| \frac{b_{pi}}{a_{qj}} < \infty.$

3°. $\forall_q \exists_p \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |t_{ij}| \frac{b_{qi}}{a_{pj}} < \infty.$

4°. *Отображение T компактно.*

5°. $\exists_q \forall_p \sup_j \sum_{i=1}^{\infty} |t_{ij}| \frac{b_{pi}}{a_{qj}} < \infty.$

6. $\exists_p \forall_q \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |t_{ij}| \frac{b_{qi}}{a_{pj}} < \infty.$

Доказательство следует из общей теории линейных операторов. (Заметим, что ядерность пространства $L^1(a_{pn})$ используется лишь дважды: при доказательстве, что $1° \Rightarrow 3°$ и что $4° \Rightarrow 6°$).

Теорема 5. *Утверждение о том, что $R_1(N) > R_2(N)$, эквивалентно следующему: всякое непрерывное вложение J пространства $E \in R_1(N)$ в пространство $G = R_2(N)$ компактно.*

Доказательство. Пусть $T = (t_{ij})$ — непрерывное, но не компактное отображение пространства $E = L^1(a_{pn})$ в пространство $G = L^1(b_{pn})$. Нам достаточно показать, что существует некомпактное вложение $J: E_1 \to G_1$, где $E_1 \in R_1(N)$, а $G \in R_2(N)$. Как видно из леммы,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |t_{ij}| \frac{1}{a_{pj}} < \infty$$

при некотором p и при всех $i = 1, 2, \ldots$. Пользуясь этим, построим такую последовательность (m_i), $m_{i+1} > m_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, чтобы выполнялись неравенства

$$\sum_{j=m_i}^{\infty} |t_{ij}| \frac{b_{ii}}{a_{pj}} \leqslant 1 \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

После этого положим

$$T_s = (t_{ij}^{(s)}) \quad (s = 1, 2),$$

где

$$t_{ij}^{(1)} = \begin{cases} t_{ij}, & \text{если } j < m_i \\ 0, & \text{если } j \geqslant m_i, \end{cases} \quad t_{ij}^{(2)} = \begin{cases} t_{ij}, & \text{если } j > m_i \\ 0, & \text{если } j < m_i. \end{cases}$$

Легко видеть, что так определенные операторы T_s непрерывно действуют из $L^1(a_{pn})$ в $L^1(b_{pn})$. При этом выполняется соотношение

$$\underset{p}{\exists} \underset{q}{\forall} \sup_{i} \sum_{j=1}^{\infty} |t_{ij}^{(2)}| \frac{b_{qi}}{a_{pj}} \leqslant$$

$$\leqslant \max \left\{ \sup_{i<q} \sum_{j=m_i}^{\infty} |t_{ij}| \frac{b_{qi}}{a_{pj}}; \ 1 \right\} < \infty.$$

Отсюда можно вывести, что сопряженный оператор T_2^*, а следовательно, и T_2 — компактны. Но тогда не является компактным оператор $T_1 = T - T_2$.

По построению существует последовательность (n_j), $n_j \uparrow \infty$ такая, что

$$t_{ij}^{(1)} = \begin{cases} 0, & \text{если } i < n_j \\ t_{ij}, & \text{если } i \geqslant n_j \end{cases}$$

(следует положить $n_j = 1$ для $1 \leqslant j < m_1$ и $n_j = i$ для $m_{i-1} \leqslant$ $\leqslant j < m_i$, $i = 2, 3, \ldots$). В силу ядерности пространства $G =$ $= L^1(b_{pn})$ для произвольного p найдется такое p_1, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_{pi}}{b_{p_1 i}} = C(p, p_1) < \infty.$$

В этой связи справедливо следующее замечание: для любых q_j и p найдется такое p_1, чтобы при всех j было

$$\sup_{n_j \leqslant i < \infty} |t_{ij}| \frac{b_{p_1 i}}{a_{qj}} = C^{-1}(p, p_1) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_{pi}}{b_{p_1 i}} \times$$

$$\times \sup_{n_j \leqslant i < \infty} |t_{ij}| \frac{b_{p_1 i}}{a_{qj}} \geqslant C^{-1}(p, p_1) \sum_{i=n_j}^{\infty} |t_{ij}| \frac{b_{pi}}{a_{qj}}.$$

Так как оператор T_1 не компактен, имеем

$$\underset{q}{\forall} \underset{p}{\exists} \sup_{j} \sum_{i=n_j}^{\infty} |t_{ij}| \frac{b_{pi}}{a_{qj}} = \infty.$$

Следовательно, для каждого q можно выделить такую последовательность $(j_k^q) = \nu^q$, чтобы выполнялось условие

$$\sup_{n(j_k^q) \leqslant i < \infty} \left(\left| t_{ij_k^q} \right| \frac{b_{p_1 i}}{a_{qj_k^q}} \right) \to \infty,$$

где p_1 зависит только от q. Еще одну последовательность (i_k^q) выберем таким образом, чтобы было

$$\sup_{n(j_k^q) \leqslant i < \infty} \left(\left| t_{ij_k^q} \right| \frac{b_{p_1 i}}{a_{qj_k^q}} \right) = \left| t_{i_k^q, j_k^q} \right| \frac{b_{p_1 i_k^q}}{a_{qj_k^q}} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Существование конечного i_k^q для каждого j_k^q следует из того, что при любом p_1 все ряды

$$\sum_i \left| t_{ij_k^q} \right| b_{p_1 i} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

сходятся. Теперь с помощью несложного алгоритма построим пару вложенных пространств $E_1 = L^1(a_{pj_n}) \in R_1(N)$ и $G_1 = L^1(t_{i_n j_n} b_{pi_n}) \in R_2(N)$ с таким расчетом, чтобы оператор вложения $J: E_1 \to G_1$ не был компактным. Положим

$$i_1 = i_1^1, \; j_1 = j_1^1.$$

Затем выберем $j_2 = j_{s_2}^1$ так, чтобы $j_2 > j_1$ и одновременно $i_2 = i_{s_2}^1 > i_1$ (последнее возможно в силу того, что $i_k^q \geqslant n(j_k^q)$ при всех k и q).

Пусть (k_n) — последовательность вида 1; 1, 2; 1, 2, 3; 1, ... Будем последовательно полагать

$$j_n = j_{s_n}^{k_n},$$

где s_n каждый раз выбирается так, чтобы $j_n > j_{n-1}$ и $i_n = i^{k_n}_{s_n} > i_{n-1}$. Построенные таким образом (ядерные) пространства E_1 и G_1 удовлетворяют нужным требованиям. Действительно, из непрерывности оператора T следует:

$$\forall_p \exists_q \sup_j \sum_{i=1}^{\infty} |t_{ij}| \frac{b_{pi}}{a_{qj}} < \infty.$$

Тем более

$$\forall_p \exists_q \sup_n \frac{|t_{i_n j_n}| b_{p i_n}}{a_{q j_n}} < \infty,$$

что равносильно существованию вложения $J: E_1 \to G_1$. В то же время для любого q согласно построению найдется такое p_1, чтобы

$$\sup_n |t_{i_n j_n}| \frac{b_{p_1 i_n}}{a_{q j_n}} \geqslant \sup_{j_n \in \nu^q} |t_{i_n j_n}| \frac{b_{p_1 i_n}}{a_{q j_n}} = \infty.$$

Это означает, что оператор J не является компактным. Теорема доказана.

Замечание. По существу было доказано более общее утверждение: если $L^1(a_{pn})$ и $L^1(b_{pn})$ — любые ядерные пространства, то $K_N(a_{pn}) > K_N(b_{pn})$ тогда и только тогда, когда всякое вложение пространства $E \in K_N(a_{pn})$ в пространство $G \in K_N(b_{pn})$ компактно (здесь K_N означает подмножество всех ядерных пространств класса K).

Далее, обозначим

$$\Gamma(a_{pn};\ b_{pn}) = \left\{ (t_n) : \forall_p \exists_q\, t_n \frac{b_{pn}}{a_{qn}} \to 0 \right\},$$

$$\Gamma'(b_{pn};\ a_{pn}) = \left\{ (t_n) : \exists_q \forall_p\, t_n \frac{b_{pn}}{a_{qn}} \to 0 \right\}.$$

Как легко видеть, $\Gamma'(b_{pn};\ a_{pn}) \subset \Gamma(a_{pn};\ b_{pn})$. Из теоремы 5 (с учетом сделанного замечания) вытекают очевидные следствия:

1. $K_N(a_{pn}) > K_N(b_{pn}) \Longleftrightarrow \Gamma(a_{pn};\ b_{pn}) = \Gamma'(b_{pn};\ a_{pn})$.
2. $R_1(N) > R_2(N) \Longleftrightarrow \Gamma(a_{pn};\ b_{pn}) = \Gamma'(b_{pn};\ a_{pn})$
$(\forall L^1(a_{pn}) \in R_1(N),\ L^1(b_{pn}) \in R_2(N))$.
3. *Если* $R_1(N) > R(N)$ и $R_2(N) > R(N)$, *то* $R_1(N) \times R_2(N) > R(N)$.

4. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ КРАТНЫХ ПРАВИЛЬНЫХ БАЗИСОВ

О том, что всегда найдется пространство E с правильным базисом заданной (конечной) кратности свидетельствует

Теорема 6. *Пусть $R_i = K(E_i)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ — попарно не пересекающиеся (полные) классы Рисса. Если $E_i \in (d)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и $E = \prod_i E_i$, то в пространстве E существует n-кратный правильный базис.*

Доказательство. Для простоты ограничимся случаем $n = 2$. Выбрав по одному правильному базису в пространствах E_1 и E_2, расположим их элементы в последовательность (x_n). Ясно, что (x_n) — абсолютный базис пространства $E = E_1 \times E_2$ такой, что для него $m \leqslant 2$*. Если предположить, что $m = 1$, то, как легко видеть, $E \in (d) \subset \boldsymbol{E}_0$. Множество $R = K(E)$ замкнуто относительно операции $\times$, и функция K аддитивна на R. При этом $R_1 \neq R$, так как в противном случае было бы $R_1 \cap R_2 \neq \varnothing$ (и даже, более того, $R_1 = R_2 = R$). Следовательно, R_1 — собственная часть множества R, т. е. R_1 не является классом Рисса. Полученное противоречие говорит о том, что $m = 2$, т. е. в пространстве E существует двукратный правильный базис. В общем случае требуемое утверждение легко получается с помощью индукции.

Следствие. *Существуют пространства с бесконечно-кратным базисом.*

В самом деле, найдется счетная (бесконечная) последовательность полных риссовских классов $R_i = K(E_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ таких, что $R_i \in (d)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и $R_i \cap R_j = \varnothing$ при $j \neq i$. Выберем по одному правильному базису в каждом пространстве E_i $(i = 1, 2, \ldots)$ и занумеруем их элементы в общую последовательность (x_n). В качестве искомого пространства можно взять $L^1(\|x_n\|_p)$, где $(\|\cdot\|_p)$ — производящая система норм в том пространстве E_i, которому принадлежит элемент x_n. Действительно, базис пространства $L^1(\|x_n\|_p)$, состоящий из координатных ортов, по доказанному должен иметь кратность не меньшую, чем любое конечное число n.

Далее нам понадобится следующая лемма из [7].

Лемма 8. *Каковы бы ни были базисы (x_n) и (y_n) ядерного пространства E, найдутся две последовательности (k_n), $k_n \to \infty$, и (λ_n), $\lambda_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ такие, что*

$$L^1(\|y_n\|_p) = L^1(\lambda_n \|x_{k_n}\|_p).$$

Теорема 7. *В ядерном пространстве Кёте все базисы имеют одну и ту же кратность.*

В самом деле, это утверждение является простым следствием леммы. Пусть $E \in \boldsymbol{N}$, (x_n) и (y_n) — два базиса в E, кратности

* Для краткости мы пишем x_n вместо $(x_n, 0)$ и $(0, x_n)$.

которых равны соответственно m_1 и m_2. Найдутся две последовательности (k_n), $k_n \to \infty$, и (λ_n), $\lambda_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, такие, что $L^1(\lambda_n \| y_{k_n} \|_p) = L'(\| x_n \|_p)$. Отсюда легко можно вывести, что $m_1 \leqslant m_2$. В силу симметрии имеем $m_1 \geqslant m_2$, т. е. $m_1 = m_2$.

Следствие. *Ни один из классов* M_s $(1 \leqslant s \leqslant \infty)$ *не пуст.*

Условимся через $E^{(k)}$ при $k < 0$ обозначать произведение пространств вида $E \times G$, где $\dim G = -k$ (напомним, что при $k \geqslant 0$ $E^{(k)}$ — подпространство пространства E коразмерности k).

Справедлива следующая теорема условного характера.

Теорема 8. *Пусть при* $i = 1, 2$

$$E_i = E_{1i} \oplus E_{2i} \oplus \ldots \oplus E_{mi}, \tag{13}$$

где $E_{ji} \in R_j(N)$ $(j = 1, \ldots m)$ *и классы* $R_i(N)$ *таковы, что* $R_j(N) \cap \cap R_k(N) = \varnothing$, *если* $j \neq k$. *Следующие утверждения равносильны.*

1°. *Если* $E_1 \sim E_2$, *то существуют целые числа* s_j $(j = 1, \ldots m)$ *такие, что* $\sum\limits_1^m s_j = 0$ *и* $E_{j1} \sim E_{j2}^{s_j}$ *при всех* j.

2°. *В каждом пространстве, допускающем представление* (13), *все базисы квазиэквивалентны.*

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай, когда $m = 2$. Пусть $E_0 = E_{10} \times E_{20}$, где $E_{j0} \in R_j(N)$ $(j = 1, 2)$ и пусть (x_n) и (y_n) — два произвольных базиса в пространстве E_0. Не уменьшая общности, можем считать, что базис (x_n) состоит из двух подпоследовательностей $(x_n^{(1)})$ и $(x_n^{(2)})$, каждая из которых — правильный базис в одном из пространств E_{j0} (соответственно). На основании лемм 5 и 6 существуют последовательности (k_n), $k_n \to \infty$, и (λ_n), $\lambda_n > 0$ $(n = 1, \ldots)$ такие, что

$$L^1(\| y_n \|_p) = L^1(\lambda_n \| x_{k_n} \|_p). \tag{14}$$

При этом можно считать, что $k_n \uparrow \infty$ (в случае надобности это достигается перестановкой элементов y_n). Выделим из последовательности (k_n) две дополнительные подпоследовательности (k_{i_n}) и (k_{j_n}) с тем расчетом, чтобы выполнялись включения

$$x_{k(i_n)} \in (x_n^{(1)}), \quad x_{k(j_n)} \in (x_n^{(2)}) \quad (n = 1, \ldots).$$

Нетрудно видеть, что обе подпоследовательности бесконечны. Действительно, в силу теоремы 6 базис (x_n) в пространстве E_0 имеет кратность $m = 2$, а по теореме 7 все базисы в E_0 должны иметь одну и ту же кратность. Между тем, допустив, что одна из последовательностей (i_n) или (j_n) конечна, мы будем вынуждены заключить, что (y_n) — правильный базис в E_0 (т. е. для него $m = 1$). Обозначим:

$$E_1 = L^1(\| x_n \|_p), \quad E_2 = L^1(\| y_n \|_p),$$

$$E_{11} = L^1(\| x_n^{(1)} \|_p), \quad E_{21} = L^1(\| x_n^{(2)} \|_p),$$

$$E_{12} = L^1\ (\| y_{i_n} \|_p) = L^1\ (\| \lambda_{i_n} x_{k(i_n)} \|_p),$$
$$E_{22} = L^1\ (\| y_{j_n} \|_p) = L^1\ (\| \lambda_{j_n} x_{k(j_n)} \|_p).$$

По построению $E_1 \sim E_2 \sim E_0$, $E_1 = E_{11} \times E_{21}$, $E_2 = E_{12} \times E_{22}$, притом E_{11}, $E_{12} \in R_1(N)$, а E_{21}, $E_{22} \in R_2(N)$. Следовательно, если верно 1°, то найдется целое s, такое, что $E_{11} \sim E_{12}^{(s)}$ и $E_{21} \sim E_{22}^{(-s)}$ (для определенности будем считать, что $s > 0$). Но тогда $E_{11} \sim L^1\ (\| y_{i_{s+n}} \|_p)$ и $E_{21} \sim L^1\ (\| y_{j_{-s+n}} \|_p)$, где положено $j_{-s+l} = i_l\ (l = 1,\ 2,\ \ldots\ s)$. Так как

$$L^1\ (\| y_{i_{s+n}} \|_p) = L^1\ (\| \lambda_{i_{s+n}} x_{k(i_{s+n})} \|_p) \in R_1(N) \subset \mathscr{E}_0$$

и

$$L^1\ (\| y_{j_{-s+n}} \|_p) = L^1\ (\| \lambda_{j_{-s+n}} x_{k(j_{-s+n})} \|_p) \in R_2(N) \subset \mathscr{E}_0,$$

то основные базисы (последовательности координатных ортов) пространств $L^1(\| x_n^{(1)} \|_p)$ и $L^1\ (\| y_{i_{s+n}} \|_p)$ предэквивалентны, так же, как и основные базисы пространств $L^1\ (\| x_n^{(2)} \|_p)$ и $L^1\ (\| y_{j_{-s+n}} \|_p)$. Но тогда квазиэквивалентны базисы (x_n) и (y_n) пространства E_0. Таким образом, в рассматриваемом случае $1° \Rightarrow 2°$. В общем случае доказательство вполне аналогично. Остается заметить, что обратное утверждение (согласно которому $2° \Rightarrow 1°$) очевидно.

Как показал В. Захарюта [5] (см. также А. Дуади [12]), справедливо следующее предложение (называемое в [5] леммой А. Дуади).

Определение 8*. *Линейный оператор* $T : E \to G$ (*открытое отображение одного локально-выпуклого пространства в другое*) *называют нётеровым, если его ядро* $\mathrm{Ker}\,(T)$ *конечномерно, а множество* $T\,(E)$ *является подпространством конечной коразмерности в* G. *Индексом нётерова оператора* T *называют число* $\mathrm{ind}\, T = \dim \mathrm{Ker}\,(T) - \mathrm{codim}\, T\,(E)$.

Лемма 9. (А. Дуади [12], В. Захарюта [5]). *Пусть* $E = E_1 \times E_2$, $G = G_1 \times G_2$ *и* $T : E \to G$ — *нётеров оператор, задаваемый матрицей*

$$\begin{pmatrix} T_{11} T_{12} \\ T_{21} T_{22} \end{pmatrix}, \quad T_{ij} : E_j \to G_i \quad (i,\ j = 1,\ 2).$$

Если пространства E_j *и* G_i *таковы, что все непрерывные линейные отображения из* E_1 *в* G_2 *и из* G_1 *в* E_2 *компактны, то*

1°. *Операторы* T_{11} *и* T_{22} *нётеровы.*

2°. $\mathrm{ind}\, T_{11} + \mathrm{ind}\, T_{22} = \mathrm{ind}\, T$.

Из леммы легко можно вывести (см. [5]) утверждение 1° теоремы 8 при единственном условии: все непрерывные линейные отображения каждого пространства $E_{j_1 i_1}$ в любое пространство $E_{j_2 i_2}$, где $j_2 > j_1$ и $i_1 + i_2 = 3$, должны быть компактны. Следовательно, верна

Теорема 9. *Пусть классы* $R_i(N)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *упорядочены отношением* (12), *т. е.* $R_1(N) > R_2(N) > \ldots > R_m(N)$. *Если*

$$E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_m,$$

где $E_i \in R_i(N)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, *то в пространстве* E *все базисы квазиэквивалентны.*

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Драгилев. О правильных базисах в ядерных пространствах. «Матем. сб.», т. 68, вып. 2, 1965.

2. М. М. Драгилев. Каноническая форма базиса пространства аналитических функций. УМН, т. 15, вып. 2 (92), 1960.

3. М. М. Драгилев. О кратных правильных базисах в пространствах Кёте. ДАН СССР, т. 193, № 4, 1970.

4. Б. С. Митягин. Ядерные шкалы Рисса. ДАН СССР, т. 137, № 3, 1961.

5. В. П. Захарюта. Об изоморфизме декартовых произведений линейных топологических пространств. ФА, т. 4, вып. 2, 1970.

6. A. Pelczynski. On the approximation of S-spaces ly finite dimens. Spaces, Bull Acad. Pol. Sci 5, № 9, 1957.

7. М. М. Драгилев. О специальных размерностях, определенных на некоторых классах пространств Кёте. «Матем. сб.», т. 80, вып. 2, 1969.

8. C. Bessaga. Some remarks on Dragilev's Theorem, Studia math, 31, 1968.

9. М. М. Драгилев. О пространствах Кёте, различаемых диаметральной размерностью. СМ. Ж., т. 11, № 3, 1970.

10. А. Робертсон, В. Робертсон. Топологические векторные пространства. Изд-во «Мир», 1967.

11. И. П. Гохберг, М. Г. Крейн. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов. УМН, т. 12, вып. 2, 1957.

12. A. Donady. Indag, math. 25, № 5 (1965), 787—789.

Поступила 14 сентября 1970 г.