ОБ ОБЛАСТЯХ ГОЛОМОРФНОСТИ ФУНКЦИЙ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ ИЛИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ТЕЙЛОРОВСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Л. А. Айзенберг, А. С. Губанова

1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Обозначим через C^n n-мерное комплексное пространство, $z = (z_1, \ldots, z_n)$, w и т. д. — точки C^n, $\bar{z} = (\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$, $zw = z_1w_1 + \ldots + z_nw_n$, $|z|^2 = z\bar{z}$. Если $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — целочисленный вектор, $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, то $\|\alpha\| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}$. Пусть область $D \subset C^n$, $D \ni 0$. Будем использовать следующие обозначения: D' — наибольшая n-круговая область с центром в 0 [1, стр. 57], вписанная в область D; $M_D\,(N_D)$ — множество функций, голоморфных в D и голоморфно не продолжающихся за пределы D, таких, которые в окрестности нуля разлагаются в степенной ряд с неотрицательными (соответственно действительными) тейлоровскими коэффициентами. Если множество $E \subset C^n$, то $\tilde{E} = \left\{w : wz \neq 1, \text{ для всех } z \in E\right\}$, $E_+ = \{z : z \in E,\ z_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, n\}$, E_b — выпуклая оболочка E, E_k — n-круговая оболочка E; $C(0, z^0) = \{z : |z_i| < z_i^0,\ i = 1, \ldots, n\}$, где $z_i^0 \geqslant 0$, $\varnothing$ — пустое множество.

Область $D \subset C^n$ называется *линейно выпуклой*, если для каждой точки z^0 границы ∂D области D существует аналитическая гиперплоскость

$$\{z : a_1z_1 + \ldots + a_nz_n + b = 0, \quad |a| \neq 0\},$$

проходящая через z^0, но не пересекающая D (см. [3—5]).

Теорема. *Пусть D — линейно выпуклая область, $0 \in D \subset C^n$. Следующие условия эквивалентны:*

a) $M_D \neq \varnothing$;

b) 1) *если* $z \in D$, *то* $\bar{z} \in D$, 2) $(\partial D')_+ \subset \partial D$;

c) 1) *и* 2') $M = \left(\tilde{D}\right)_{+bk} \supset \tilde{D}$.

В частности, всякая n-круговая линейно выпуклая область входит в класс областей, для которых $M_D \neq \varnothing$. Это верно не только для линейно выпуклых областей.

Предложение 1. *Для всякой области D абсолютной сходимости степенных рядов $M_D \neq \varnothing$.*

Заметим, что условие $M_D \neq \varnothing$ не всегда выполняется даже для линейно выпуклых областей. Например, если

$$D = \{z : |z_1 + \ldots + z_{n-1} - z_n| < 1\},$$

то $M_D = \varnothing$.

Предложение 2. *Пусть D — область голоморфности, $0 \in D \subset C^n$. Для того чтобы $N_D \neq \varnothing$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: если $z \in D$, то $\bar{z} \in D$.*

Для доказательства некоторых фактов нам потребуется следующее обобщение теоремы Прингсхейма:

Предложение 3. *Если ряд*

$$\sum_{\alpha_i \geqslant 0} a_\alpha z^\alpha, \quad a_\alpha \geqslant 0, \tag{1}$$

абсолютно сходится внутри n-круговой области D и расходится вне D, то любая точка $z \in (\partial D)_+$ является особой для суммы этого ряда.

Предложение 3 дает больше информации об особых точках суммы ряда, чем ранее известное обобщение теоремы Прингсхейма [7]. Оно не может быть усилено, потому что, например, для

$$G = \{z : |z_1| + \ldots + |z_n| < 1\}$$

существует ряд с неотрицательными тейлоровскими коэффициентами, который абсолютно сходится внутри G и расходится вне G, а сумма ряда имеет на ∂G только такие особенности, о которых говорится в предложении 3.

Авторы выражают свою признательность И. В. Островскому за постановку задачи об описании областей голоморфности функций с неотрицательными тейлоровскими коэффициентами. Авторы благодарят также Л. С. Маергойза и Л. И. Ронкина за ценные замечания. Основные результаты этой заметки анонсировались авторами в [8].

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЙ

Доказательство предложения 3. Пусть точка $z^0 \in (\partial D)_+$. Ряд (1) абсолютно сходится внутри $C(0, z^0)$ и расходится в таких точках z, для которых $|z_i| > z_i^0$, $i = 1, \ldots, n$. Возьмем $z_i = z_i^0 t$, $i = 1, \ldots, n$, $t \in C^1$. Тогда ряд

$$\sum_{\alpha_i \geqslant 0} a_\alpha (z^0)^\alpha t^{\|\alpha\|} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k, \quad b_k \geqslant 0$$

абсолютно сходится в единичном круге и расходится во внешности этого круга. По теореме Прингсхейма точка $t = 1$ является особой для его суммы, поэтому точка z^0 является особой для суммы ряда (1).

Доказательство теоремы. Докажем, что $(c) \Rightarrow (a)$. Пусть $w \in \tilde{D}$, тогда $\bar{w} \in \tilde{D}$. Так как $M \supset \tilde{D}$, то существует $w^0 \in M$

такая, что $w_i^0 \geqslant |w_i|$, $w_i^0 \geqslant 0$, $w^0 = \lambda w' + (1-\lambda) w''$, где w', $w'' \in \tilde{D}$, $w_i' \geqslant 0$, $w_i'' \geqslant 0$; $i = 1, \ldots, n$. Рассмотрим функции

$$\frac{1}{(1-w'z)(1-w''z)} = \sum_{\beta_i \geqslant 0} \frac{\|\beta\|!}{\beta!} (w')^\beta z^\beta \sum_{\gamma_i \geqslant 0} \frac{\|\gamma\|!}{\gamma!} (w'')^\gamma z^\gamma =$$

$$= \sum_{\alpha_i \geqslant 0} b_\alpha z^\alpha, \quad b_\alpha \geqslant 0,$$

$$\frac{1}{1-w^0 z} = \sum_{\alpha_i \geqslant 0} \frac{\|\alpha\|!}{\alpha!} (w^0)^\alpha z^\alpha = \sum_{\alpha_i \geqslant 0} a_\alpha z^\alpha.$$

Так как

$$\frac{\|\beta+\gamma\|!}{\|\beta\|!\,\|\gamma\|!} \lambda^{\|\beta\|} (1-\lambda)^{\|\gamma\|} < 1,$$

то

$$a_\alpha = \frac{\|\alpha\|!}{\alpha!} (w^0)^\alpha = \frac{\|\alpha\|!}{\alpha!} [\lambda w' + (1-\lambda) w'']^\alpha =$$

$$= \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\|\beta+\gamma\|!}{\beta!\gamma!} \lambda^{\|\beta\|} (1-\lambda)^{\|\gamma\|} (w')^\beta (w'')^\gamma \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\|\beta\|!\,\|\gamma\|!}{\beta!\gamma!} (w')^\beta (w'')^\gamma = b_\alpha.$$

В силу неравенств $w_i^0 \geqslant |w_i|$, $i = 1, \ldots, n$, функция

$$\frac{2}{1-w^0 z} + \frac{1}{1-wz} + \frac{1}{1-\bar{w}z}$$

разлагается в окрестности нуля в ряд с неотрицательными коэффициентами, тогда этим же свойством обладает функция

$$F(z) = \frac{2}{(1-w'z)(1-w''z)} + \frac{1}{1-wz} + \frac{1}{1-\bar{w}z}.$$

Кроме того, $F(z)$ голоморфна в области D.

Если $w \in \partial\tilde{D}$, то гиперплоскость $\{z : wz = 1\}$ проходит через некоторую $z^0 \in \partial D$, но не пересекает область D. Таким образом, для каждой точки $z^0 \in \partial D$ можно построить функцию $F(z)$, голоморфную в области D и разлагающуюся в окрестности нуля в ряд с неотрицательными коэффициентами, причем z^0 является особой для $F(z)$. Применяя далее известный прием (см. [2, стр. 168—170]), можно построить функцию $f(z) \in M_D$.

Импликация $(a) \Rightarrow (b)$ является следствием предложения 3. Действительно, если $f(z) \in M_D$ и разлагается в ряд (1), то любая точка $z^0 \in (\partial D')_+$ является особой для $f(z)$. Значит, $z^0 \in \partial D$. Кроме того, имеет место условие 1), так как $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$.

Докажем, что $(b) \Rightarrow (c)$. $D' \subset D$, значит, $\tilde{D}' \supset \tilde{D}$, поэтому достаточно установить включение $M \supset \tilde{D}'$; $\tilde{D}'$ — n-круговой выпуклый компакт (см. [3, 15°]), следовательно, $\left(\tilde{D}'\right)_+$ — выпуклый компакт в положительном октанте пространства R^n. Точку x, принадлежащую некоторому множеству K, назовем выступающей точкой этого множества, если существует такая опорная к K гиперплоскость, проходящая через x, которая касается K в единственной точке x. Пусть N — множество выступающих точек $\partial\left(\left(\tilde{D}'\right)_+\right)$. Для N имеет место аналог теоремы Крейна — Мильмана о крайних точках [6, стр. 139], значит, $\left(\overline{N_b}\right) \supset \left(\tilde{D}'\right)_+$. Согласно лемме $N \subset \left(\tilde{D}\right)_+$, поэтому $\left(\overline{N_b}\right) \subset \overline{\left(\tilde{D}\right)_{+b}} = \left(\tilde{D}\right)_{+b}$. Итак, $\left(\tilde{D}\right)_{+b} \supset \left(\tilde{D}'\right)_+$. Далее $M \supset \left(\tilde{D}'\right)_{+k} = \tilde{D}'$.

Лемма. *Если x^0 — выступающая точка $\partial\left(\left(\tilde{D}'\right)_+\right)$, то $x^0 \in \left(\tilde{D}\right)_+$.*

Доказательство. Выступающие точки $\left(\tilde{D}'\right)_+$ состоят из точки O и выступающих точек $\left(\partial\left(\tilde{D}'\right)\right)_+$. Так как $0 \in \tilde{D}$, то рассмотрим случай $x^0 \in \left(\partial\left(\tilde{D}'\right)\right)_+$. Область D линейно выпукла, а следовательно, как нетрудно показать, D' тоже линейно выпукла, n-круговая линейно выпуклая область $D' \ni 0$ будет и просто выпуклой и $\tilde{\tilde{D}}' = D'$. Пусть опорная к $\left(\tilde{D}'\right)_+$ гиперплоскость в точке x^0 имеет вид $\{x : y^0 x = 1\}$, где можно утверждать, что $y_i^0 \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$. Согласно свойствам сопряженных множеств $y^0 \in \partial(D')_+$. По определению выступающей точки и двойственности точек и гиперплоскостей при переходе к сопряженным множествам через точку $y^0 \in \partial D'$ проходит только одна «опорная» к D' гиперплоскость $\{z : x^0 z = 1\}$. Учитывая, что $y^0 \in \partial D$ и $D' \subset D$, приходим к выводу, что эта же гиперплоскость является опорной и к D, следовательно, $x_0 \in \tilde{D}$.

Доказательство предложения 1. Выберем на ∂D счетное, всюду плотное множество E, состоящее из следующих точек: 1) точки $z \in \partial D$, $z_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, 2) такие z, что $z_i^{l_i} = (z_i^0)^{l_i}$ для некоторого целого $l_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, а z^0 обладает свойством 1).

Заметим, что ряд

$$\sum_{\alpha_i \geqslant 0} z_1^{l_1 \alpha_1} \ldots z_n^{l_n \alpha_n}$$

абсолютно сходится в единичном полицилиндре $C(0, I)$, $I = (1, \ldots, 1)$, и расходится вне его. Тогда по одной теореме о степенных рядах (см. [2, стр. 143]) ряд

$$\sum_{\alpha_i \geqslant 0} \frac{z_1^{l_1\alpha_1} \ldots z_n^{l_n\alpha_n}}{d_{l_1\alpha_1, \ldots, l_n\alpha_n}}$$

абсолютно сходится в D и расходится вне $\overline{D}$, где $d_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} = \sup\limits_D |z^\alpha|$. Согласно предложению 3, любая точка $z^0 \in (\partial D)_+$ является особой для суммы этого ряда, которую обозначим $F(z)$. Если $e^{i\varphi_k l_k} = 1$; $k = 1, \ldots, n$, то для $F(z)$ выполняется равенство

$$F(z_1, \ldots, z_n) = F(z_1 e^{i\varphi_1 m_1}, \ldots, z_n e^{i\varphi_n m_n}),$$

$0 \leqslant m_k \leqslant l_k - 1$; $k = 1, \ldots, n$. Это означает, что для любой точки $z^0 \in E$ существует функция, разлагающаяся в ряд (1), для которой z^0 является особой. Образуем класс K_D функций, голоморфных в D, в который войдут только функции, разлагающиеся в ряд (1), умноженные на любое комплексное число. Используя теорему Картана — Туллена [2, стр. 159], можно доказать, что для произвольной $z^0 \in E$, любого $\varepsilon > 0$ и любого компакта $Q \subset D$ существует функция $f(z)$ с разложением в ряд (1), голоморфная в D, и точка $z' \notin Q$, $z' \in D$, $|z' - z^0| < \varepsilon$, такие, что $|f(z')| > 1$, $|f(z)| < 1$ для $z \in Q$. Повторив известное построение (см. [2, стр. 168—170]), получим $\varphi(z) \in M_D$.

Докажем, что $M_D = \varnothing$, если $D = \{z : |z_1 + \ldots + z_{n-1} - z_n| < 1\}$. Заметим, что $D' = \{z : |z_1| + \ldots + |z_n| < 1\}$. Если бы $M_D \neq \varnothing$, то по теореме $(\partial D')_+ \subset \partial D$, т. е., например, точка $z^0 = \left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$, принадлежащая $(\partial D')_+$, должна принадлежать ∂D,что невозможно.

Доказательство предложения 2. Необходимое условие можно получить, повторяя рассуждения при выводе аналогичного факта в теореме.

Достаточность. Пусть $f(z)$ голоморфна в D, голоморфно не продолжается за пределы D и является суммой ряда

$$\sum_{\alpha_i \geqslant 0} b_\alpha z^\alpha.$$

Возьмем

$$\varphi(z) = \sum_{\alpha_i \geqslant 0} \overline{b}_\alpha z^\alpha.$$

Легко видеть, что D — область голоморфности $\varphi(z)$. Пусть $z^0 \in \partial D$. Либо для $F_1(z) = f(z) + \varphi(z)$, либо для $F_2(z) = i[f(z) - \varphi(z)]$ точка z^0 является особой. Итак, если $z^0 \in \partial D$, найдется функция с действительными тейлоровскими коэффициентами, для которой

γ^0 является особой. Повторив конец доказательства предложения 1, получим требуемое.

Рассмотрим пример к предложению 3. Нетрудно показать, что $G = D'$ для $D = \left\{z : \left|z_1 + \ldots + z_n + \frac{1}{2}\right| < \frac{3}{2}\right\}$, причем $(\partial D') \cap \partial D = (\partial D')_+$. Согласно теореме $M_D \neq \varnothing$. Любая $f(z) \in M_D$ имеет на ∂G только такие особенности, о которых говорится в предложении 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Фукс. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. М., Физматгиз, 1962.
2. В. С. Владимиров. Методы теории функций многих комплексных переменных. Изд-во «Наука», 1964.
3. Л. А. Айзенберг. О разложении голоморфных функций многих комплексных переменных на простейшие дроби. «Сибирск. матем. журн.», VIII, № 5, 1967, 1124—1142.
4. H. Behnke, E. Peschl. Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Konvexitat in bezug auf derlichen Ebenen in kleinen und gropen, Math. Ann., **112**, № 2 (1935), 158—177.
5. A. Martineau. Sur la topologie des espaces de fonetions holomorphes, Math. Ann., **163**, № 1 (1966), 62—88.
6. F. A. Valentine. Convex sets, Mc Graw-Hill series in higner mathematics, № 4, 1964.
7. И. И. Баврин. Распространение теоремы Прингсхейма. Уч. зап. МОПИ, т. 77 (1959), 127—130.
8. Л. А. Айзенберг, А. С. Губанова. О линейно выпуклых областях голоморфности функций с неотрицательными тейлоровскими коэффициентами. Тезисы докладов Всесоюзного симпозиума по теории голоморфных функций многих комплексных переменных. Красноярск, 1969, 5—6.

Поступила 14 сентября 1970 г.