О РОСТЕ ЦЕЛЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАКОНОВ

Н. И. Яковлева

1. Вероятностным законом будем называть неубывающую функцию $F(x)$, $-\infty < x < +\infty$, непрерывную слева и удовлетворяющую условиям

$$F(+\infty) = 1, \ F(-\infty) = 0.$$

Характеристической функцией (х. ф.) закона $F(x)$ называется функция $\varphi(t, F)$, определенная при $-\infty < t < +\infty$ равенством

$$\varphi(t, F) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x). \tag{1}$$

Если функция $\varphi(t, F)$ допускает аналитическое продолжение на всю комплексную t-плоскость до целой функции, то эту целую функцию будем обозначать тоже через $\varphi(t, F)$ и называть целой х. ф. закона $F(x)$. Известно, что в этом случае интеграл в (1) сходится абсолютно во всей t-плоскости и соотношение (1) сохраняет силу. Известно также [1, стр. 58], что для того чтобы х. ф. $\varphi(t, F)$ закона $F(x)$ была целой, необходимо и достаточно, чтобы при любом $r > 0$ выполнялось условие

$$1 - F(x) + F(-x) = O(e^{-rx}), \ x \to +\infty.$$

Напомним, что порядком роста целой функции $f(z)$ называется величина

$$\rho = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\ln \ln M(r, f)}{\ln r},$$

где

$$M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Возникает вопрос, каким может быть рост целой х. ф. и как он связан с поведением соответствующего закона.

Известно, что порядок роста целой х. ф., за исключением $\varphi(t, F) \equiv 1$, не меньше 1 [1, стр. 61], и для любого ρ, $1 \leqslant \rho \leqslant +\infty$, существует целая х. ф. порядка ρ.

Чтобы описать связь роста целой х. ф. с поведением закона $F(x)$, введем функцию

$$T(x) = 1 - F(x) + F(-x).$$

Рамачандран [2] нашел условия для того, чтобы х. ф. имела заданный порядок роста.

Результаты Рамачандрана формулируются так.

Теорема 1. *Для того чтобы закон $F(x)$ имел целую х. ф., порядок роста которой равен $\rho = 1 + \gamma$, $(0 < \gamma < +\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\underline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{\ln \ln \frac{1}{T(x)}}{\ln x} = 1 + \frac{1}{\gamma}.$$

Теорема 2. *Для того чтобы закон $F(x)$ имел целую х. ф. $\varphi(t, F)$ такую, что*

$$\overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\ln \ln \ln M(r, \varphi)}{\ln r} = \gamma, \ (0 < \gamma < +\infty),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\underline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{\ln \left(\frac{1}{x} \ln \frac{1}{T(x)} \right)}{\ln \ln x} = \frac{1}{\gamma}.$$

В настоящей работе получена теорема, обобщающая результаты Рамачандрана. Это обобщение возникло под влиянием работы М. Н. Шереметы [3].

Введем, следуя М. Н. Шеремете [3], некоторые определения.

Будем говорить, что функция $\beta(x)$, $0 \leqslant x < +\infty$, принадлежит классу L°, если она положительна, дифференцируема, монотонно возрастает к ∞ и удовлетворяет условию

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\beta[(1+\lambda(x))x]}{\beta(x)} = 1 \tag{2}$$

для любой монотонно стремящейся к 0 функции $\lambda(x)$.

Будем говорить, что функция $\alpha(x)$ принадлежит классу Λ, если $\alpha(x)$ принадлежит классу L°, и выполняется более сильное, чем (2), условие

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha(cx)}{\alpha(x)} = 1 \tag{3}$$

для любой постоянной c такой, что $0 < c < +\infty$, причем стремление равномерное относительно c при $0 < c_1 \leqslant c \leqslant c_2 < +\infty$. В литературе функции, удовлетворяющие условию (3), принято называть медленно изменяющимися (например, [4, стр. 609]).

Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — функции, принадлежащие соответственно классам Λ, L°. Для того чтобы закон $F(x)$ имел целую х. ф. $\varphi(t, F)$ такую, что*

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\alpha\left(\frac{1}{r}\ln M(r,\varphi)\right)}{\beta(\ln r)} = \gamma \quad (\gamma > 0),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\varliminf_{x\to+\infty} \frac{\beta\left[\ln\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{T(x)}\right)\right]}{\alpha(x)} = \frac{1}{\gamma}.$$

Теорема 1 Рамачандрана получается из нашего результата при

$$\alpha(x) = \ln x, \quad \beta(x) = x.$$

Чтобы получить теорему 2 Рамачандрана, достаточно положить

$$\alpha(x) = \ln\ln x, \quad \beta(x) = x.$$

В заключение введения отметим два известных в теории целых х. ф. утверждения, которыми нам придется пользоваться.

Лемма 1. [1, стр. 61]. *Если закон $F(x)$ имеет целую х. ф. $\varphi(t, F)$, то для всех $r > 0$ выполняется*

$$M(r, \varphi) = \max[\varphi(ir, F), \varphi(-ir, F)].$$

Лемма 2. [2, стр. 1240]. *Если закон $F(x)$ имеет целую х. ф. $\varphi(t, F)$, то для всех $r > 0$ и $x > 0$ выполняется*

$$M(r, \varphi) \geqslant \frac{1}{2} T(x) e^{rx}.$$

Для удобства читателя приведем доказательство леммы 2. Согласно лемме 1,

$$M(r, \varphi) = \max[\varphi(ir, F), \varphi(-ir, F)] \geqslant \frac{1}{2}[\varphi(ir, F) + \varphi(-ir, F)].$$

Имеем

$$\varphi(-ir, F) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ru} dF(u) \geqslant \int_{x}^{+\infty} e^{ru} dF(u) = -\int_{x}^{+\infty} e^{ru} d[1 - F(u)] =$$

$$= e^{rx}[1 - F(x)] + r\int_{x}^{+\infty} e^{ru}[1 - F(u)]\, du. \quad (x > 0).$$

Отсюда

$$\varphi(-ir, F) \geqslant e^{rx}[1 - F(x)].$$

Аналогично получаем

$$\varphi(ir, F) \geqslant e^{rx} F(-x).$$

Следовательно,

$$M(r, \varphi) \geqslant \frac{1}{2} e^{rx}[1 - F(x) + F(-x)],$$

что и требовалось доказать.

2. Доказательство основного результата разобьем на две части. В части I покажем, что из

$$\overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\alpha\left(\frac{1}{r}\ln M(r, \varphi)\right)}{\beta(\ln, r)} \leqslant \gamma \tag{4}$$

следует

$$\underline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{\beta\left[\ln\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{T(x)}\right)\right]}{\alpha(x)} \geqslant \frac{1}{\gamma}, \tag{5}$$

а в части II — что из

$$\underline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{\beta\left[\ln\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{T(x)}\right)\right]}{\alpha(x)} > \frac{1}{\gamma} \tag{6}$$

следует

$$\overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\alpha\left[\frac{1}{r}\ln M(r, \varphi)\right]}{\beta(\ln r)} < \gamma. \tag{7}$$

Тем самым теорема, очевидно, будет доказана.

I. Пусть выполняется (4). Если $\gamma = +\infty$, то соотношение (5) тривиально. Пусть теперь $\gamma < +\infty$, тогда для любого $\bar{\gamma} > \gamma$ найдется такое r_0, что при $r \geqslant r_0$ выполняется

$$\frac{\alpha\left(\frac{1}{r}\ln M(r,\ \varphi)\right)}{\beta(\ln r)} \leqslant \bar{\gamma}.$$

Отсюда получаем

$$\alpha\left(\frac{1}{r}\ln M(r,\ \varphi)\right) \leqslant \bar{\gamma}\beta(\ln r).$$

Следовательно,

$$M(r,\ \varphi) \leqslant \exp\{r\alpha^{-1}[\bar{\gamma}\beta(\ln r)]\}.$$

Далее, используя лемму 2, получаем

$$T(x) \leqslant 2M(r,\ \varphi)\,e^{-rx} \leqslant 2\exp\{r\alpha^{-1}[\bar{\gamma}\beta(\ln r)] - rx\}. \tag{8}$$

Выберем r следующим образом:

$$r = \exp\left\{\beta^{-1}\left[\frac{1}{\bar{\gamma}}\,\alpha\left(\frac{1}{2}x\right)\right]\right\},$$

тогда

$$\alpha^{-1}[\bar{\gamma}\beta(\ln r)] = \frac{1}{2}x,$$

и при достаточно больших x будем иметь $r \geqslant r_0$. Подставляя в (8), получим

$$T(x) \leqslant 2\exp\left\{-\frac{1}{2}rx\right\},$$

откуда

$$\ln\left(\frac{2}{x}\ln\frac{2}{T(x)}\right) \geqslant \beta^{-1}\left[\frac{1}{\bar{\gamma}}\,\alpha\left(\frac{1}{2}x\right)\right],$$

$$\frac{\beta\left[\ln\left(\frac{2}{x}\ln\frac{2}{T(x)}\right)\right]}{\alpha\left(\frac{1}{2}x\right)} \geqslant \frac{1}{\bar{\gamma}}.$$

Используя свойства (2) и (3) функций $\beta(x)$ и $\alpha(x)$, получаем

$$\varliminf_{x\to+\infty}\frac{\beta\left[\ln\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{T(x)}\right)\right]}{\alpha(x)} \geqslant \frac{1}{\bar{\gamma}},$$

откуда, устремляя $\bar{\gamma}$ к γ, находим (5).

II. Из (6) следует, что найдется δ, $0 < \delta < \gamma$ и $x_0 = x_0(\delta)$ такие, что для всех $x \geqslant x_0$ выполняется

$$\frac{\beta\left[\ln\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{T(x)}\right)\right]}{\alpha(x)} \geqslant \frac{1}{\delta},$$

откуда

$$T(x) \leqslant \exp\left\{-x \exp \Phi\left(x; \frac{1}{\delta}\right)\right\}, \quad x \geqslant x_0, \tag{9}$$

где принято обозначение

$$\Phi(x;\ c) = \beta^{-1}[c\alpha(x)].$$

Выберем

$$r_0 = \frac{1}{2} \exp \Phi\left(x_0;\ \frac{1}{\delta}\right).$$

Возьмем любое $r > r_0$ и определим $x_1 = x_1(r)$ следующим образом:

$$\exp \Phi\left(x_1;\ \frac{1}{\delta}\right) = 2r.$$

Очевидно, что $x_1 > x_0$ и

$$x_1 = \alpha^{-1}\{\delta\beta(\ln 2r)\}.$$

В дальнейшем будем считать r таким, что $x_1 = x_1(r)$ не является точкой разрыва для $F(x)$. Тем самым мы исключаем из рассмотрения не более чем счетное множество значений r, что не отразится на общности наших рассуждений.

Согласно лемме 1,

$$M(r,\ \varphi) = \max\{\varphi(ir,\ F),\ \varphi(-ir,\ F)\}.$$

Имеем

$$\varphi(-ir,\ F) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{rx} dF(x) = \int_{-\infty}^{x_1} + \int_{x_1}^{\infty} = I_1 + I_2.$$

Интегрируя по частям, получим

$$I_2 = -\int_{x_1}^{\infty} e^{rx} d[1 - F(x)] = [-e^{rx}(1 - F(x))]_{x_1}^{\infty} + r\int_{x_1}^{\infty} e^{rx}[1 -$$

$$- F(x)]\,dx \leqslant e^{rx_1}[1 - F(x_1)] + r\int_{x_1}^{\infty} e^{rx} T(x)\,dx.$$

Используя условие (9) и монотонность функции $\Phi(x;\ c)$ по x, получаем

$$\int_{x_1}^{\infty} e^{rx} T(x)\,dx \leqslant \int_{x_1}^{\infty} \exp\left\{rx - x\exp\Phi\left(x;\ \frac{1}{\delta}\right)\right\} dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{x_1}^{\infty} \exp\left\{rx - x\exp\Phi\left(x_1;\ \frac{1}{\delta}\right)\right\} dx.$$

Так как

$$\exp\Phi\left(x_1;\ \frac{1}{\delta}\right) = \exp\left\{\beta^{-1}\left[\frac{1}{\delta}\alpha(x_1)\right]\right\} =$$

$$= \exp\left\{\beta^{-1}\left[\frac{1}{\delta}\alpha(\alpha^{-1}\{\delta\beta(\ln 2r)\})\right]\right\} = 2r,$$

то

$$\int_{x_1}^{\infty} e^{rx}T(x)\,dx \leqslant \int_{x_1}^{\infty} \exp\{rx - 2rx\}\,dx = \int_{x_1}^{\infty} e^{-rx}dx = \frac{1}{r}e^{-rx_1} \leqslant \frac{1}{r}.$$

Следовательно,

$$I_2 \leqslant e^{rx_1}[1 - F(x_1)] + 1.$$

Очевидно,

$$I_1 = \int_{-\infty}^{x_1} e^{rx}dF(x) \leqslant e^{rx_1}F(x_1).$$

Таким образом, имеем оценку

$$\varphi(-ir,\ F) \leqslant e^{rx_1} + 1. \qquad (10)$$

Рассматривая

$$\varphi(ir,\ F) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rx}dF(x) = \int_{-\infty}^{-x_1} + \int_{-x_1}^{\infty},$$

аналогичным образом получаем оценку

$$\varphi(ir,\ F) \leqslant e^{rx_1} + 1. \qquad (11)$$

Из (10), (11) и леммы 1 вытекает, что

$$M(r,\ \varphi) \leqslant e^{rx_1} + 1 = \exp\{r\alpha^{-1}[\delta\beta(\ln 2r)]\} + 1,$$

откуда для достаточно больших r имеем

$$M(r,\ \varphi) \leqslant \exp\{2r\alpha^{-1}[\delta\beta(\ln 2r)]\},$$

$$\frac{1}{2r}\ln M(r,\ \varphi) \leqslant \alpha^{-1}[\delta\beta(\ln 2r)],$$

$$\frac{\alpha\left(\frac{1}{2r}\ln M(r,\varphi)\right)}{\beta(\ln 2r)} \leqslant \delta.$$

Используя свойства (2) и (3) функций $\beta(x)$ и $\alpha(x)$, получаем

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\alpha\left(\frac{1}{r}\ln M(r,\varphi)\right)}{\beta(\ln r)} \leqslant \delta$$

и так как $\delta < \gamma$, получим (7).

Теорема доказана.

Приношу глубокую благодарность И. В. Островскому за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Линник. Разложения вероятностных законов. Изд-во ЛГУ, 1960.
2. B. Ramachandran. On the order and the type of entire characteristic functions. The Annals of mathematical statistics, 33, 1962, № 4, 1238—1255.
3. М. Н. Шеремета. О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения. Известия вузов, 1967, № 2, 100—108.
4. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. ГТТИ, 1956.

Поступила 25 июля 1970 г.