О ПРОСТРАНСТВАХ КОГОМОЛОГИЙ С КОМПАКТНЫМИ НОСИТЕЛЯМИ

В. Д. Головин

А. Картан и Ж.-П. Серр показали, как может быть топологизирован комплекс коцепей открытого покрытия комплексного аналитического многообразия X с коэффициентами в когерентном аналитическом пучке F [1]. Тем самым они неявно определили некоторые локально выпуклые топологии в пространствах когомологий Чеха $H^k(X; F)$. Другие топологии в пространствах $H^k(X; F)$ могут быть определены с помощью комплекса дифференциальных форм в силу изоморфизмов Дольбо. Ю.-Т. Сиу [2] показал, что определяемые двумя способами топологии в $H^k(X; F)$ совпадают [3]. В настоящей работе аналогичная задача рассмотрена для пространств $H^k_c(X; F)$ когомологий с компактными носителями. Показано, что локально выпуклые топологии, определяемые в $H^k_c(X; F)$ соответственно с помощью открытых покрытий, замкнутых покрытий и с помощью дифференциальных форм, совпадают.

1. ОТКРЫТЫЕ ПОКРЫТИЯ

Пусть X — комплексное аналитическое многообразие, счетное в бесконечности, и F — когерентный аналитический пучок на X. Каждая точка многообразия X имеет голоморфно полную открытую окрестность U, над которой определен эпиморфизм пучков

$$\pi : O^m \to F,$$

где O — пучок ростков голоморфных функций на X. Отсюда следует изоморфизм векторных пространств

$$\Gamma(U; F) \approx \Gamma(U; O^m)/\Gamma(U; R),$$

где R — ядро эпиморфизма π. Наделим пространство $\Gamma(U; O^m)$ топологией компактной сходимости, а пространство $\Gamma(U; F)$ — соответствующей топологией факторпространства; последняя не зависит от выбора эпиморфизма π и является топологией пространства Фреше и Шварца [1].

Если U — произвольное открытое множество в X и $\mathcal{U} = (U_i)$ — его достаточно мелкое, локально конечное покрытие голоморфно полными открытыми множествами, то пространство сечений $\Gamma(U; F)$ наделим слабейшей из топологий, для которых непрерывны отображения сужения

$$\Gamma(U; F) \to \Gamma(U_i; F).$$

На самом деле эта топология не зависит от выбора покрытия $\mathcal{U}$. Для каждого компактного множества K в X пространство сечений с носителями в K $\Gamma_K(U;\ F)$ наделим топологией, индуцированной из $\Gamma(U;\ F)$.

Пусть $U = (U_i)$ — произвольное открытое покрытие многообразия X. Пространство

$$C_c^k(\boldsymbol{U};\ F) = \varinjlim \Pi \Gamma_K (U_{i_0 \dots i_k};\ F)$$

коцепей с компактными носителями покрытия $\boldsymbol{U}$, степени k и с коэффициентами в F наделим топологией локально выпуклого индуктивного предела относительно фильтрующегося множества компактных подмножеств в X. Пространство когомологий с компактными носителями покрытия $\boldsymbol{U}$

$$H_c^k(U;\ F) = \operatorname{Ker} \delta_k(\boldsymbol{U}) / \operatorname{Im} \delta_{k-1}(\boldsymbol{U})$$

наделим топологией факторпространства, где

$$\delta_k(\boldsymbol{U}) : C_c^k(\boldsymbol{U};\ F) \to C_c^{k+1}(\boldsymbol{U};\ F) —$$

кограничный оператор, очевидно, непрерывный. Наконец, пространство когомологий Чеха с компактными носителями $H_c^k(X;\ F)$ наделим топологией локально выпуклого индуктивного предела пространств $H_c^k(\boldsymbol{U};\ F)$ относительно фильтрующегося множества классов попарно эквивалентных покрытий.

Открытое покрытие многообразия X будем называть *адаптированным*, если это покрытие локально конечно и состоит из относительно компактных, голоморфно полных множеств. Очевидно, что для такого покрытия

$$C_c^k(\boldsymbol{U};\ F) = \Sigma \Gamma \left(U_{i_0 \dots i_k};\ F\right).$$

Лемма 1. *Пусть в коммутативной диаграмме топологических векторных пространств и непрерывных линейных отображений*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & B^0 & \xrightarrow{\beta_0} & B^1 & \xrightarrow{\beta_1} & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 \to A^0 & \to & C^{0,0} & \to & C^{0,1} & \to & \dots \\
\alpha_0 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 \to A^1 & \to & C^{1,0} & \to & C^{1,1} & \to & \dots \\
\alpha_1 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

все строки и столбцы, начиная со вторых, точны и входящие в них отображения являются гомоморфизмами. Тогда первый столбец и первая строка определяют соответственно коцепные комплексы A^* и B^*, для которых при каждом $k = 0, 1, \dots$ топологические векторные пространства когомологий $H^k A^*$

и $H^k B^*$ канонически изоморфны, а кограничные операторы α_k и β_k могут быть гомоморфизмами лишь одновременно.

Доказательство. Утверждения проверяются непосредственно с помощью диаграммного поиска, аналогичного доказательству А. Вейля теоремы де Рама [4].

Теорема 1. *Пусть $U=(U_i)$ и $V=(V_i)$ — адаптированные открытые покрытия многообразия X. Тогда топологические векторные пространства $H^k_c(U;\ F)$ и $H^k_c(V;\ F)$ канонически изоморфны, а кограничные операторы $\delta_k(U)$ и $\delta_k(V)$ могут быть гомоморфизмами лишь одновременно.*

Доказательство. Положим

$$C_c^{p,q}(U,\ V;\ F)=\Sigma\,\Gamma\left(U_{i_0\ldots i_p}\cap V_{j_0\ldots j_q};\ F\right),$$

и наделим это пространство топологией прямой суммы. Тогда в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \Gamma_c(X;\ F) & \to & C^0_c(V;\ F) & \to & C^1_c(V;\ F) & \to & \ldots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & C^0_c(U;\ F) & \to & C^{0,0}_c(U,\ V;\ F) & \to & C^{0,1}_c(U,\ V;\ F) & \to & \ldots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & C^1_c(U;\ F) & \to & C^{1,0}_c(U,\ V;\ F) & \to & C^{1,1}_c(U,\ V;\ F) & \to & \ldots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & &
\end{array}$$

все строки и столбцы, начиная со вторых, точны и входящие в них отображения являются гомоморфизмами топологических векторных пространств. Утверждения следуют отсюда в силу леммы 1.

Следствие. *Если U — адаптированное открытое покрытие многообразия X, то каноническое отображение*

$$H^k_c(U;\ F)\to H^k_c(X;\ F)$$

является изоморфизмом топологических векторных пространств.

2. ЗАМКНУТЫЕ ПОКРЫТИЯ

Пусть M — компактное множество в X. Пространство сечений

$$\Gamma(M;\ F)=\varinjlim\Gamma(U;\ F)$$

наделим топологией локально выпуклого индуктивного предела относительно фильтрующегося множества открытых окрестностей U множества M. Это — топология сильного сопряженного к некоторому пространству Фреше и Шварца [5, 6, 7].

Для произвольного локально конечного покрытия $\boldsymbol{M} = (M_i)$ многообразия X компактными множествами наделим пространство коцепей

$$C_c^k(\boldsymbol{M};\ F) = \sum \Gamma\left(M_{i_0 \ldots i_k};\ F\right)$$

топологией прямой суммы; это также топология сильного сопряженного к некоторому пространству Фреше и Шварца. Пространство когомологий

$$H_c^k(\boldsymbol{M};\ F) = \operatorname{Ker} \delta_k(\boldsymbol{M})/\operatorname{Im} \delta_{k-1}(\boldsymbol{M})$$

наделим топологией факторпространства, где

$$\delta_k(\boldsymbol{M}) : C_c^k(\boldsymbol{M};\ F) \to C_c^{k+1}(\boldsymbol{M};\ F) —$$

кограничный оператор.

Замкнутое покрытие многообразия X будем называть *адаптированным*, если оно локально конечно и каждый его элемент является компактным множеством, обладающим фундаментальной системой голоморфно полных открытых окрестностей.

Аналогично теореме 1 доказывается

Теорема 2. *Если $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$ — адаптированные замкнутые покрытия многообразия X, то топологические векторные пространства $H_c^k(\boldsymbol{M};\ F)$ и $H_c^k(\boldsymbol{N};\ F)$ канонически изоморфны, а кограничные операторы $\delta_k(\boldsymbol{M})$ и $\delta_k(\boldsymbol{N})$ могут быть гомоморфизмами лишь одновременно.*

Пусть теперь $\boldsymbol{M}$ — произвольное локально конечное покрытие многообразия X компактными множествами. Так как кограничный оператор $\delta_k(\boldsymbol{M})$ непрерывен, то его ядро $\operatorname{Ker} \delta_k(\boldsymbol{M}) = Z_c^k(\boldsymbol{M};\ F)$ замкнуто и, следовательно, является сильным сопряженным к некоторому пространству Фреше и Шварца. Отсюда следует, что топология пространства $Z_c^k(\boldsymbol{M};\ F)$ является сильнейшей из локально выпуклых топологий, для которых непрерывны отображения

$$Z_c^k(\boldsymbol{U};\ F) \to Z_c^k(\boldsymbol{M};\ F),$$

где $\boldsymbol{U}$ — произвольное локально конечное открытое покрытие многообразия X, в которое вписано $\boldsymbol{M}$. Тем самым пространство

$$H_c^k(\boldsymbol{M};\ F) = \varinjlim H_c^k(\boldsymbol{U};\ F)$$

является локально выпуклым индуктивным пределом относительно фильтрующегося множества локально конечных открытых покрытий, в которые вписано покрытие $\boldsymbol{M}$.

С другой стороны, если $\boldsymbol{U}$ — локально конечное покрытие многообразия X относительно компактными открытыми множествами, то топология пространства $C_c^k(\boldsymbol{U};\ F)$ является слабейшей из топологий, для которых непрерывны отображения

$$C_c^k(\boldsymbol{U};\ F) \to C_c^k(\boldsymbol{M};\ F),$$

где $\boldsymbol{M}$ — произвольное локально конечное компактное покрытие, вписанное в $\boldsymbol{U}$.

Можно также показать, что для адаптированных $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{M}$ кограничные операторы $\delta_k(\boldsymbol{U})$ и $\delta_k(\boldsymbol{M})$ могут быть гомоморфизмами лишь одновременно. Итак, имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{M}$ — адаптированные, соответственно открытое и замкнутое, покрытия многообразия X. Тогда топологические векторные пространства $H^k_c(\boldsymbol{U};\ F)$ и $H^k_c(\boldsymbol{M};\ F)$ канонически изоморфны, а кограничные операторы $\delta_k(\boldsymbol{U})$ и $\delta_k(\boldsymbol{M})$ могут быть гомоморфизмами лишь одновременно.*

Замечание. В силу теоремы 3 отделимое локально выпуклое пространство $\widetilde{H}^k_c(X;\ F)$, ассоциированное с пространством $H^k_c(X;\ F)$, является сильным сопряженным к некоторому пространству Фреше и Шварца.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Пусть E^k — пучок ростков бесконечно дифференцируемых внешних дифференциальных форм двойной степени $(0,\ k)$ на многообразии X. Эпиморфизм π определяет точную последовательность пучков

$$0 \to E^kR \to (E^k)^m \to E_k \otimes_O F \to 0$$

над некоторой окрестностью U произвольной точки. Так как E^kR — тонкий пучок, то получаем изоморфизм векторных пространств

$$\Gamma(U;\ E^k \otimes_O F) \approx \Gamma(U;\ (E^k)^m) / \Gamma(U;\ E^kR).$$

Пространство $\Gamma(U;\ (E^k)^m) = (\Gamma(U;\ E^k))^m$ наделим его обычной топологией (топологией компактной сходимости), а пространство $\Gamma(U;\ E^k \otimes_O F)$ — топологией факторпространства; последняя не зависит от выбора эпиморфизма π. Так как подпространство $\Gamma(U;\ E^kR)$ замкнуто в $\Gamma(U;\ (E^k)^m)$ (см. [8]), то пространство $\Gamma(U;\ E^k \otimes_O F)$ является пространством Фреше и Шварца.

Пусть $\boldsymbol{U}$ — достаточно мелкое, локально конечное покрытие многообразия X открытыми множествами. Пространство $\Gamma(X;\ E^k \otimes_O F)$ наделим слабейшей из топологий, для которых непрерывны отображения сужения

$$\Gamma(X;\ E^k \otimes_O F) \to \Gamma(U;\ E^k \otimes_O F) \quad (U \in \boldsymbol{U}).$$

На самом деле эта топология не зависит от выбора покрытия $\boldsymbol{U}$.

Для каждого компактного множества K в X наделим векторное пространство $\Gamma_K(X;\ E^k \otimes_O F)$ сечений с носителями в K топологией, индуцируемой из $\Gamma(X;\ E^k \otimes_O F)$. Пространство $\Gamma_c(X;\ E^k \otimes_O F)$ сечений с компактными носителями наделим топологией локально-выпуклого индуктивного предела

$$\Gamma_c(X;\ E^k \otimes_O F) = \varinjlim \Gamma_K(X;\ E^k \otimes_O F)$$

относительно фильтрующегося множества компактных подмножеств K в X.

Рассмотрим комплекс $\Gamma_c(X;\ E^*\otimes_O F)$ топологических векторных пространств $\Gamma_c(X;\ E^k\otimes_O F)$ $(k=0,\ 1,\ \ldots)$ с непрерывными кограничными операторами

$$d''_k:\Gamma_c(X;\ E^k\otimes_O F)\to\Gamma_c(X;\ E^{k+1}\otimes_O F),$$

индуцированными внешними дифференциалами

$$d'':E^k\to E^{k+1}.$$

Пространство когомологий комплекса $\Gamma_c(X;\ E^*\otimes_O F)$

$$H^k\Gamma_c(X;\ E^*\otimes_O F)=\operatorname{Ker} d''_k/\operatorname{Im} d''_{k-1}$$

наделим топологией факторпространства.

Лемма 2. *Для любого аналитического пучка F на X последовательность пучков и гомоморфизмов*

$$0\to F\to E^0\otimes_O F\xrightarrow{d''\otimes 1}E^1\otimes_O F\xrightarrow{d''\otimes 1}\ldots$$

точна.

Доказательство. По лемме Дольбо — Гротендика точна последовательность

$$0\to Z^k\to E^k\to Z^{k+1}\to 0,$$

где

$$Z^k=\operatorname{Ker}\{d'':E^k\to E^{k+1}\}$$

при $k=0,\ 1,\ \ldots$. Следовательно, точна последовательность

$$\operatorname{Tor}^{O_x}_{p+1}(Z^{k+1}_x,\ F_x)\to\operatorname{Tor}^{O_x}_{p}(Z^{k}_x,\ F_x)\to\operatorname{Tor}^{O_x}_{p}(E^{k}_x,\ F_x)$$

при $p\geqslant 0$ и $x\in X$. Так как E^k_x является плоским O_x-модулем (см. [8]), то

$$\operatorname{Tor}^{O_x}_{p}(E^{k}_x,\ F_x)=0\quad(p\geqslant 1).$$

С другой стороны, $Z^n_x=E^n_x$, где n — комплексная размерность многообразия X. Следовательно, нисходящей индукцией по k получаем

$$\operatorname{Tor}^{O_x}_{p}(Z^{k}_x,\ F_x)=0\quad(p\geqslant 1).$$

Тем самым последовательность

$$0\to Z^k\otimes_O F\to E^k\otimes_O F\to Z^{k+1}\otimes_O F\to 0$$

точна. Лемма доказана.

Теорема 4. *Если U — адаптированное открытое покрытие многообразия X, то топологические векторные пространства*

$H^k_c(U;\ F)$ и $H^k\Gamma_c(X;\ E^*\otimes_O F)$ канонически изоморфны, а кограничные операторы $\delta_k(U)$ и d''_k могут быть гомоморфизмами лишь одновременно.

Доказательство. В коммутативной диаграмме

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to & \Gamma_c(X;\ F) & \to & \Gamma_c(X;\ E^0\otimes_O F) & \to & \Gamma_c(X;\ E^1\otimes_O F) & \to \ldots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \to & C^0_c(U;\ F) & \to & C^0_c(U;\ E^0\otimes_O F) & \to & C^0_c(U;\ E^1\otimes_O F) & \to \ldots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \to & C^1_c(U;\ F) & \to & C^1_c(U;\ E^0\otimes_O F) & \to & C^1_c(U;\ E^1\otimes_O F) & \to \ldots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow &
\end{array}
$$

все строки и столбцы, начиная со вторых, точны и входящие в них отображения являются гомоморфизмами топологических векторных пространств. Для завершения доказательства достаточно воспользоваться леммой 1.

Следствие. *Нижеследующие утверждения равносильны:*

1. *Кограничный оператор*

$$d''_k : \Gamma_c(X;\ E^k\otimes_O F) \to \Gamma_c(X;\ E^{k+1}\otimes_O F)$$

является гомоморфизмом.

2. *Подпространство $d''_k\Gamma_c(X;\ E^k\otimes_O F)$ в $\Gamma_c(X;\ E^{k+1}\otimes_O F)$ замкнуто.*

3. *Пространство $H^{k+1}_c(X;\ F)$ отделимо.*

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Cartan. J.-P. Serre. Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes, C. r. Acad. sci. Paris, **237**, № 2, 1953, 128—130.
2. Y.-T. Siu. Non-countable dimensions of cohomology groups of analytic sheaves and domains of holomorphy, Math. z., **102**, № 1, 1967, 17—29.
3. В. Д. Головин. Теоремы двойственности для когомологий комплексных многообразий. «Функциональный анализ и его приложения», **4**, № 1, 1970, 33—41.
4. A. Weil. Sur les théorèmes de Rham, Comm. Math. Helv., **26**, № 2, 1952, 119—145.
5. А. Гротендик. О пространствах (F) и (DF). Сб. «Математика», **2**: 3, 1958, 81—127.
6. Ж. Себаштьян-и-Силва. О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях. Сб. «Математика», **1**: 1, 1957, 60—77.
7. Д. А. Райков. О двух классах локально выпуклых пространств. Труды Воронежск. семинара по функциональному анализу, **5**, 1957, 22—34.
8. Б. Мальгранж. Идеалы дифференцируемых функций. М., «Мир», 1968.

Поступила 25 мая 1970 г.