О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИИ ВЕЙЛЕВСКОГО СЕМЕЙСТВА УЗЛОВ

В. К. Дубовой

1. Групповой закон преобразования х. о.-ф. вейлевского семейства узлов

Пусть

$$\tau(p) = (N(p) + A,\ H_{\tilde{u},u},\ K,\ E_v),$$

где $N(p) = -N_0 p_0 + \sum_{i=1}^{3} N_i p_i$ — вейлевское семейство операторных узлов. Тогда совокупность $\left(A,\ H_{\tilde{u},u},\ K,\ E_v\right)$ является инвариантным узлом относительно собственной группы Лоренца G_+, причем

$$\tilde{u}_g^* = u_g^{-1}. \tag{1}$$

В этом случае, как следует из полученных в [1] результатов, внешнее представление $g \to v_g$ можно считать унитарным и таким, что выполняются условия:

а) *пространство E разлагается в ортогональную сумму подпространств E_0^c и E_0, каждое из которых инвариантно относительно операторов v_g. Кроме того, на E_0^c представление $g \to v_g$ разлагается в прямую сумму неприводимых представлений, определяемых соответственно либо парой $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, либо парой $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, а на E_0 $v_g = I$;*

---

* Для чтения статьи необходимо знакомство с работами [1] и [2, § 1—3]. Все рассматриваемые в статье пространства предполагаются конечномерными векторными пространствами над полем комплексных чисел.

б) *подпространства* E_0^c *и* E_0 *инвариантны относительно* $W_\tau(p)$ *— х. о.-ф. семейства узлов* $\tau(p)$, *при этом* $W_\tau(p) = I$ *на* E_0.

Подпространство E_0 соответствует тривиальному удлинению. Поэтому всюду в дальнейшем, не нарушая общности, будем предполагать, что $E_0 = 0$. Кроме того, в дальнейшем вейлевские семейства узлов $\tau(p)$, а значит и их х. о.-ф., будут рассматриваться на множестве D точек $p = (p_0, p_1, p_2, p_3) \in R^4$, удовлетворяющих условию

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 > 0.$$

Множество D является, очевидно, в R^4 внутренностью конуса

$$p_0^2 - \sum_{i=1}^{3} p_i^2 = 0.$$

Заметим, что из соотношений (см. [2])

$$\sum_{i=0}^{3} g_{ki} \tilde{u}_g N_i u_g^{-1} = N_k \quad (k = 0, 1, 2, 3) \tag{2}$$

следует, что

$$N(gp) = \tilde{u}_g N(p) u_g^{-1},$$

где gp — образ вектора p при преобразовании Лоренца g. Пусть в точке $\tilde{p} = (\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3) \in D$ оператор $N(p) + A$ имеет обратный. Тогда в точке $\tilde{p}$ определена и х. о.-ф. $W_\tau(p)$, причем

$$W_\tau(\tilde{p}) = I - iK(N(\tilde{p}) + A)^{-1}K^+.$$

Учитывая условия инвариантности [2]

$$\tilde{u}_g A = A u_g, \tag{3}$$

$$v_g K = K u_g, \tag{4}$$

$$\tilde{u}_g K^+ = K^+ v_g \tag{5}$$

семейства узлов $\tau(p)$ и (2), получаем

$$W(g\tilde{p}) = v_g W(\tilde{p}) v_g^{-1}. \tag{6}$$

Так как каждая пола двуполостного гиперболоида $l^2(p) = l^2(\tilde{p})$, $l(p) = \left(p_0^2 - \sum_{i=1}^{3} p_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ представляет собой поверхность транзитивности для группы G_+, то из (6) следует

Лемма 1. *Каждая точка* $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ *входит во множество определения х. о.-ф.* $W_\tau(p)$ *с соответствующей полой гиперболоида*

$$l^2(p) = l^2(\tilde{p}), \quad \operatorname{sign} p_0 = \operatorname{sign} \tilde{p}_0.$$

Рассмотрим х. о.-ф. $W_\tau(p)$ в системе покоя, т. е. на множестве точек области D вида $p = (p_0, 0, 0, 0)$. Так как $N_0 = I$, то

$$W_\tau(p_0, 0, 0, 0) = I - iK(A - p_0 I)^{-1}K^+.$$

Отсюда следует, что х. о.-ф. $W_\tau(p)$ совпадает в системе покоя с рассматриваемой на вещественной оси х. о.-ф. узла $\theta_\tau = (A, H, K, E)$. Учитывая этот факт и лемму 1, получаем, что х. о.-ф. $W_\tau(p)$ определена в области D_W, получающейся при исключении из области D конечного числа поверхностей вида

$$l^2(p) = \lambda_k^2, \ \operatorname{sign} p_0 = \operatorname{sign} \lambda_k,$$

где λ_k $(k = 1, \ldots, r)$ — вещественные отличные от нуля точки спектра оператора A. В [2] было показано, что в спектр оператора A с каждым значением λ входит $-\lambda$. Следовательно, справедлива

Лемма 2. *Пусть $\tau(p) = (N(p) + A, H^{\sim}_{u,u}, K, E_v)$ — вейлевское семейство узлов. Тогда х. о.-ф. $W_\tau(p)$ определена в области D_W, получающейся при исключении из области D конечного числа двуполостных гиперболоидов вида*

$$l^2(p) = \lambda_k^2 \quad (k = 1, \ldots, r'),$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r'}$ — *положительные точки спектра оператора A.*

Известно*, что х. о.-ф. узла принимает на вещественной оси значения, являющиеся унитарными операторами. Поэтому, учитывая унитарность внешнего представления $g \to v_g$ и групповой закон преобразования (6) х. о.-ф. $W_\tau(p)$, получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $W_\tau(p)$ — х. о.-ф. вейлевского семейства узлов $\tau(p)$. Тогда*

$$W_\tau^+(p) = W_\tau^{-1}(p)$$

при любом $p \in D_W$.

2. Аналитические свойства х. о.-ф. вейлевского семейства узлов

Пусть $W_\tau(p)$ — х. о.-ф. вейлевского семейства узлов $\tau(p)$. Тогда функция $W_\tau(p_0, 0, 0, 0)$ совпадает с рассматриваемой на вещественной оси х. о.-ф. узла θ_τ, поэтому она аналитична в области определения и при аналитическом продолжении в комплексную плоскость принадлежит классу $\Omega^{(F)}$**. Заметим, что функция $X(z)$, значения которой являются линейными операторами в E, принадлежит классу $\Omega^{(F)}$, если $(I^{(F)})$ $X(z)$ *голоморфна в области O_X, представляющей собой всю расширенную комплекс-*

* См. например, [4].

** См. [4].

ную плоскость, за исключением конечного числа точек, каждая из которых является полюсом;

$$(\mathrm{II}^{(F)})\ \lim_{z\to\infty} X(z) = I;$$

$$(\mathrm{III}^{(F)})\ (X(z)f,\ X(z)f) \geqslant (f, f)\ (\operatorname{Im} z > 0,\ z \in O_X,\ f \in E);$$

$$(\mathrm{IV}^{(F)})\ X^{+}(z) = X^{-1}(z)\ (\operatorname{Im} z > 0,\ z \in O_X).$$

Для вывода дальнейших аналитических свойств х. о.-ф. $W_\tau(p)$ понадобится следующая

Лемма 3. *Пусть*

$$\tau(p) = \left(-N_0 p_0 + \sum_{i=1}^{3} N_i p_i + A,\quad H_{\underset{u,\ u}{\sim}}, K, E_v\right)$$

— вейлевское семейство узлов и s — матрица, имеющая вид

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

(1′) $N(p)A = AN(sp)$;

(2′) $N_i N_j = -N_j N_i$ $(i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$;

(3′) *при любом $p \in D$ оператор $N(p)$ имеет* **обратный, причем**

$$N^{-1}(p) = l^{-2}(p)\, N(sp);$$

(4′) при любом $p = (p_0, p_1, p_2, p_3) \in D$

$$(\operatorname{sign} p_0)\, N(p) < 0,$$

при этом, если $\operatorname{sign} p_0 < 0$,

$$N^{\frac{1}{2}}(p) = N(p'),$$

где вектор $p' = (p_0', p_1', p_2', p_3')$ *определяется формулами*

$$p_0' = -\frac{1}{\sqrt{2}}(-p_0 + l(p))^{\frac{1}{2}},\quad p_i' = \frac{p_i}{[2(-p_0 + l(p))]^{\frac{1}{2}}}\quad (i = 1, 2, 3), \qquad (7)$$

и, значит, $l^2(p') = l(p)$;

(5′) *если* $p \in D$ *и* $\operatorname{sign} p_0 < 0$, *то*

$$N^{-\frac{1}{2}}(p)\, AN^{-\frac{1}{2}}(p) = l^{-1}(p)\, A.$$

Доказательство. Заметим, что операторы $\frac{1}{2}N_1$, $-\frac{1}{2}N_2$, $\frac{1}{2}N_3$ являются инфинитезимальными операторами представления

$g \to u_g$, отвечающими гиперболическим вращениям в плоскостях (p_0, p_1), (p_0, p_2), (p_0, p_3) соответственно. Так как $\tilde{u}_g = u_g^{*-1}$, то соответствующими инфинитезимальными операторами представления $g \to \tilde{u}_g$ служат $-\frac{1}{2}N_1$, $\frac{1}{2}N_2$, $-\frac{1}{2}N_3$. Поэтому из (3) получаем

$$N_i A = -AN_i, \; i = 1, 2, 3, \tag{8}$$

и (1′) доказано. Далее (2′) следует из вида операторов N_α ($\alpha = 1, 2, 3$)*. Из (2′) вытекает

$$N(p)\, N(sp) = l^2(p)\, I,$$

откуда получаем (3′).

Пусть $p \in D$. Тогда p можно представить в виде $p = g\tilde{p}$, где $\tilde{p} = (\tilde{p}_0, 0, 0, 0)$, $\tilde{p}_0 = l(p)\operatorname{sign} p_0$.
Следовательно,

$$N(p) = N(g\tilde{p}) = \tilde{u}_g N(\tilde{p})\, u_g^{-1} = -\tilde{p}_0 u_g^{*-1} u_g^{-1},$$

поэтому

$$(\operatorname{sign} p_0)\, N(p) = -|\tilde{p}_0|\, u_g^{*-1} u_g^{-1} < 0.$$

Пусть $\operatorname{sign} p_0 < 0$. В этом случае непосредственно проверяется, что

$$N^{\frac{1}{2}}(p) = N(p'),$$

где вектор p' определяется формулами (7). Так как $l^2(p') = l(p)$, то $p' \in D$. Наконец, из (1′) и (3′) следует

$$N^{-\frac{1}{2}}(p)\, AN^{-\frac{1}{2}}(p) = N^{-1}(p')\, AN^{-1}(p') = \\ = \frac{1}{l^2(p')} N(sp')\, AN^{-1}(p') = \frac{1}{l(p)} A,$$

и утверждения леммы полностью доказаны.

Пусть $W_\tau(p)$ — х. о.-ф. вейлевского семейства узлов $\tau(p) = (N(p) + A, H_{\tilde{u}, u}, K, E_v)$. Пусть $p = (p_0, p_1, p_2, p_3) \in R^4$ и $l(p) > \|A\|$. Тогда, как следует из леммы 2, $p \in D_W$. Предположим для определенности, что $\operatorname{sign} p_0 > 0$.

В этом случае, учитывая лемму 3, получаем

$$(N(-p) - A)^{-1} = N^{-\frac{1}{2}}(-p)\left(I - N^{-\frac{1}{2}}(-p)\, AN^{-\frac{1}{2}}(-p)\right)^{-1} N^{-\frac{1}{2}} \times \\ \times (-p) = N^{-\frac{1}{2}}(-p)\left(I - \frac{1}{l(p)} A\right)^{-1} N^{-\frac{1}{2}}(-p) =$$

---

* См. [2].

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{l^n(p)} N^{-\frac{1}{2}}(-p) A^n N^{-\frac{1}{2}}(-p) =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{l^{2n+2}(p)} A^{2n} N(sp) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{l^{2n+2}(p)} A^{2n+1}.$$

Поэтому

$$-W_\tau(p) = -I - iK(N(-p) - A)^{-1}K^+ =$$

$$= -I + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{l^{2n+2}(p)} KA^{2n}N(sp)K^+ =$$

$$= -i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{l^{2n+2}(p)} KA^{2n+1}K^+.$$

Проводя аналогичную выкладку, получим

$$W_\tau(-p) = I + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{l^{2n+2}(p)} KA^{2n}N(sp)K^+ +$$

$$+ i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{l^{2n+2}(p)} KA^{2n+1}K^+.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2}(W_\tau(p) + W_\tau(-p)) =$$

$$= I + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{l^{2n+2}(p)} KA^{2n+1}K^+ = \tilde{\omega}(l^2(p)), \tag{9}$$

где

$$\tilde{\omega}(\lambda) = I + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{KA^{2n+1}K^+}{\lambda^{n+1}} \quad (|\lambda| > \|A\|^2). \tag{10}$$

Далее

$$\frac{1}{2}(W_\tau(p) - W_\tau(-p)) =$$

$$= -i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{l^{2n+2}(p)} KA^{2n}N(sp)K^+ = -\sum_{j=0}^{3} \omega_j(l^2(p))p_j, \tag{11}$$

где

$$\omega_j(\lambda) = -i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{KA^{2n}N_jK^+}{\lambda^{n+1}} \quad (|\lambda| > \|A\|^2;\ j = 0, 1, 2, 3). \tag{12}$$

Следовательно,

$$W_\tau(p)=\frac{1}{2}(W_\tau(p)+W_\tau(-p))+\frac{1}{2}(W_\tau(p)-W_\tau(-p))=$$
$$=\tilde{\omega}(l^2(p))-\sum_{j=0}^{3}\omega_j(l^2(p))\,p_j. \tag{13}$$

Пусть Q_1, Q_2, Q_3 — инфинитезимальные операторы представления $g\to v_g$, отвечающие гиперболическим вращениям в плоскостях (p_0, p_1), (p_0, p_2), (p_0, p_3) соответственно. Тогда из (4), (5) получаем

$$\left.\begin{aligned} Q_\alpha K&=\frac{1}{2}KN_\alpha,\\ -\frac{1}{2}N_\alpha K^+&=K^+Q_\alpha\end{aligned}\right\}\quad(\alpha=1,2,3). \tag{14}$$

Из (12) — (14) следует

$$\omega_\alpha(\lambda)=-2\omega_0(\lambda)\,Q_\alpha=2Q_\alpha\omega_0(\lambda)\quad(|\lambda|>\|A\|^2;\ \alpha=1,2,3).$$

Поэтому (13) можно переписать в виде

$$W_\tau(p)=\tilde{\omega}(l^2(p))+\omega_0(l^2(p))\,Q(p)=$$
$$=\tilde{\omega}(l^2(p))+Q(sp)\,\omega_0(l^2(p)), \tag{15}$$

где

$$Q(p)=-Ip_0+2\sum_{\alpha=1}^{3}Q_\alpha p_\alpha.$$

Из (9) — (12) следует, что функции $\tilde{\omega}(\lambda)$ и $\omega_0(\lambda)$ определены и аналитичны в окрестности $|\lambda|>\|A\|^2$ бесконечно удаленной точки комплексной плоскости. Кроме того, если $\operatorname{Im}\lambda=0$ и $\lambda>$ $>\|A\|^2$, то

$$\tilde{\omega}(\lambda)=\frac{1}{2}\left(W_\tau(\sqrt{\lambda},0,0,0)+W_\tau(-\sqrt{\lambda},0,0,0)\right),$$
$$\omega_0(\lambda)=-\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left(W_\tau(\sqrt{\lambda},0,0,0)-W_\tau(-\sqrt{\lambda},0,0,0)\right),$$

при этом, как легко видеть, безразлично, с каким знаком берется $\sqrt{\lambda}$. Учитывая $(I^{(F)})$, получаем, что $\tilde{\omega}(\lambda)$ и $\omega_0(\lambda)$ допускают аналитическое продолжение соответственно в области, представляющие собой всю расширенную комплексную плоскость без некоторого конечного числа точек, каждая из которых является полюсом.

Выше было показано, что

$$Q_\alpha\omega_0(\lambda)=-\omega_0(\lambda)\,Q_\alpha\quad(|\lambda|>\|A\|^2;\ \alpha=1,2,3). \tag{16}$$

Далее в силу (8), (9) и (14)

$$Q_\alpha\tilde{\omega}(\lambda)=\tilde{\omega}(\lambda)\,Q_\alpha\quad(|\lambda|>\|A\|^2;\ \alpha=1,2,3). \tag{17}$$

Из связности области аналитичности $\omega(\lambda)$ и $\omega_0(\lambda)$ находим, что равенства (16) и (17) имеют место при любом λ из области аналитичности $\tilde{\omega}(\lambda)$ и $\omega_0(\lambda)$ соответственно. Наконец, используя (16) и (17), можно показать, что (15) имеет место при любом $p \in D_{W_\tau}$. Итак, доказана

Теорема 2. *Х. о.-ф. $W_\tau(p)$ вейлевского семейства узлов $\tau(p) = (N(p) + A, H_{\tilde{u}, u}, K, E_v)$ допускает представление в виде*

$$W_\tau(p) = \tilde{\omega}(l^2(p)) + \omega_0(l^2(p))\, Q(p) \quad (p \in D_{W_\tau}),$$

где $\omega(\lambda)$ и $\omega(\lambda)$ — оператор-функции, аналитические в областях, которые представляют собой всю расширенную комплексную плоскость, за исключением конечного числа точек, каждая из которых является полюсом; $Q(p) = -Ip_0 + 2\sum\limits_{\alpha=1}^{3} Q_\alpha p_\alpha$, а Q_1, Q_2, Q_3 — инфинитезимальные операторы представления $g \to v_g$, отвечающие гиперболическим вращениям в плоскостях (p_0, p_1), (p_0, p_2), (p_0, p_3) соответственно. При этом выполнены соотношения

$$\left.\begin{aligned} Q_\alpha \tilde{\omega}(\lambda) &= \tilde{\omega}(\lambda)\, Q_\alpha \\ Q_\alpha \omega_0(\lambda) &= -\omega_0(\lambda)\, Q_\alpha \end{aligned}\right\} \quad (\alpha = 1,\ 2,\ 3).$$

Дальнейшему изучению вопроса, а именно, решению обратной задачи, унитарной эквивалентности вейлевских семейств узлов, разложению х. о.-ф. вейлевского семейства узлов на элементарные множители посвящена работа [3].

Автор выражает благодарность М. С. Лившицу за постановку задачи и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. К. Дубовой. Инвариантные операторные узлы. Вестник Харьковск. ун-та, серия мех.-матем., вып. 36, 1971.

2. В. К. Дубовой. Вейлевские семейства операторных узлов и соответствующие им открытые поля. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 14. Изд-во Харьковск. ун-та, 1971.

3. В. К. Дубовой. Об основных свойствах характеристических оператор-функций вейлевских семейств узлов. Вестник Харьковск. ун-та, серия мех.-матем., вып. 37, 1971.

4. М. С. Бродский. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. «Наука», 1969.

5. М. А. Наймарк. Линейные представления группы Лоренца. М., Физматгиз, 1958.

6. И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро. Представления группы вращений и группы Лоренца. М., Физматгиз, 1955.

7. М. С. Лившиц. Операторы, колебания, волны. «Наука», 1966.

8. М. С. Лившиц, А. А. Янцевич. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. Изд-во Харьковск. ун-та, 1971.

Поступила 8 июля 1970 г.