ОЦЕНКА ВЕРХНЕЙ ГРАНИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ НА НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ ПО СИСТЕМАМ ХААРА, РАДЕМАХЕРА И УОЛША

Н. П. Хорошко

Будем обозначать через H_V класс периодических с периодом $\gamma = 1$ функций $f(x)$ с ограниченным изменением, полная вариация которых $\overset{1}{\underset{0}{V}} f$ не превосходит заданного числа $V > 0$, а через H_ω — класс непрерывных 1-периодических функций $f(x)$, модуль непрерывности $\omega(f;\ t)$ которых не превосходит заданного модуля непрерывности $\omega(t)$ $\left(0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\right)$. При $\omega(t) = Kt^\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ будем писать $KH^{(\alpha)}$.

Оценки коэффициентов Фурье по системе Хаара на различных классах функций получены в работах [1—3].

Мы даем точные оценки верхней грани коэффициентов Фурье на указанных выше классах по системам Хаара, Радемахера и Уолша, периодически продолженным с периодом $\gamma = 1$ на всю числовую ось (определение вышеуказанных систем см., напр., [4]).

Обозначим через $H_{V[a,\,b]}$ класс заданных на $[a, b]$ функций $f(x)$, для которых $\overset{b}{\underset{a}{V}} f \leqslant V$, а через

$$a_m^{(k)}(f) = \int_0^1 f(t)\, \mathrm{X}_m^{(k)}(t)\, dt,$$

$$c_{m+1}(f) = \int_0^1 f(t)\, r_{m+1}(t)\, dt,$$

$$b_{m+1}^{(i)}(f) = \int_0^1 f(t)\, \psi_{m+1}^{(i)}(t)\, dt$$

соответственно коэффициенты Фурье по системе Хаара, Радемахера и Уолша.

Лемма 1. *Если* $f(x) \in H_{V[a,b]}$, *то функция*

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(a), & x = a, \\ f(b), & x = b, \\ c = \dfrac{\int\limits_a^b f(x)\,dx}{b-a}, & a < x < b \end{cases}$$

также принадлежит классу $H_{V[a,b]}$.

При доказательстве леммы 1 различают случаи, когда в (a, b) существует точка x_0 такая, что $f(x_0) = c$ и когда такой точки нет.

Лемма 2. *Если* $f(x) \in H_V$, *то для однопериодической функции*

$$\psi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, (k-1)2^{-m}], \\ \alpha_k, & x \in \left((k-1)2^{-m}, \left(k-\frac{1}{2}\right)2^{-m}\right), \\ f\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)2^{-m}\right), & x = \left(k-\frac{1}{2}\right)2^{-m}, \\ \beta_k, & x \in \left(\left(k-\frac{1}{2}\right)2^{-m}, k\cdot 2^{-m}\right), \\ f(x), & x \in [k\cdot 2^{-m}, 1), \end{cases}$$

где α_k и β_k *определены из равенств*

$$\int\limits_{(k-1)2^{-m}}^{\left(k-\frac{1}{2}\right)2^{-m}} f(x)\,dx = \alpha_k \cdot 2^{-(m+1)},$$

$$\int\limits_{\left(k-\frac{1}{2}\right)2^{-m}}^{k\cdot 2^{-m}} f(x)\,dx = \beta_k \cdot 2^{-(m+1)},$$

справедливы соотношения:

1. $|a_m^{(k)}(f)| = |a_m^{(k)}(\psi)|$;

$$m = 0, 1, 2, \ldots; \quad k = 1, 2, \ldots, 2^m;$$

2. $\psi(x) \in H_V$;
3. $|\alpha_k - \beta_k| \leqslant \frac{V}{2}$.

Доказательство. Справедливость 1 вытекает из определения функций $X_m^{(k)}(t)$ и $\psi(x)$, 2 легко получаем при помощи леммы 1, 3 — имеем

$$2|\alpha_k - \beta_k| = |\alpha_k - f(0) + f(0) - \beta_k| + \left|\alpha_k - f\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)2^{-m}\right) + \right.$$
$$\left. + f\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)2^{-m}\right) - \beta_k\right| = |\alpha_k - \psi(0) + \psi(0) - \beta_k| +$$
$$+ \left|\alpha_k - \psi\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)2^{-m}\right) + \psi\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)2^{-m}\right) - \beta_k\right| \leqslant \overset{1}{\underset{0}{V}}\psi \leqslant V.$$

и

$$|\alpha_k - \beta_k| \leqslant \frac{V}{2}.$$

Лемма 3. *Если на $[a, b]$ функция $\psi(x)$ такая, что $\psi(a + u) = -\psi(b-u)$ $(0 \leqslant u \leqslant b-a)$ и функция $\Psi(x) = \int_a^x \psi(t)\,dt$ строго возрастает (убывает) на (a, c), $c = \frac{a+b}{2}$, и строго убывает (возрастает) на (c, b), то*

1)

$$M(V) = \sup_{f \in H_{V[a,b]}} \left| \int_a^b \psi(t) f(t)\,dt \right| = V \int_a^c |\psi(t)|\,dt = $$

$$= V \int_c^b |\psi(t)|\,dt;$$

2) *верхняя грань $M(V)$ достигается для функций вида $C \pm F(x)$, где C — любая постоянная и*

$$F(x) = \begin{cases} \frac{V}{2}, & a \leqslant x \leqslant c, \\ -\frac{V}{2}, & c < x \leqslant b. \end{cases}$$

Доказательство леммы 3 аналогично доказательству леммы 2 работы [5].

Доказательство. Учитывая условия леммы и полагая $t = b - u$, получим

$$\int_c^b f(t)\psi(t)\,dt = -\int_{b-c}^0 f(b-u)\psi(b-u)\,du =$$

$$= \int_{c-a}^0 f(b-u)\psi(a+u)\,du.$$

Пусть $a + u = t$, тогда

$$\int_c^b f(t)\psi(t)\,dt = \int_{c-a}^0 f(b-u)\psi(a+u)\,du =$$

$$= -\int_a^c f(a+b-t)\psi(t)\,dt.$$

Поэтому, какова бы ни была функция $f(t) \in H_{V[a,b]}$,

$$\left| \int_a^b f(t)\psi(t)\,dt \right| = \left| \int_a^c f(t)\psi(t)\,dt + \int_c^b f(t)\psi(t)\,dt \right| =$$

$$= \left| \int_a^c [f(t) - f(a+b-t)]\psi(t)\,dt \right| \leqslant \int_a^c |f(t) -$$

$$- f(a+b-t)| \cdot |\psi(t)|\,dt \leqslant V \int_a^c |\psi(t)|\,dt. \qquad (1')$$

Но так как $\Psi(b)=0$ и $\psi(t)$ на (a, c) сохраняет знак, то

$$\left|\int_a^b [C \pm F(t)]\,\psi(t)\,dt\right| = \left|\int_a^b C\psi(t)\,dt \pm \int_a^b F(t)\,\psi(t)\,dt\right| =$$

$$= \left|\int_a^c \frac{V}{2}\psi(t)\,dt - \int_c^b \frac{V}{2}\psi(t)\,dt\right| = V\int_a^c |\psi(t)|\,dt. \qquad (2')$$

Из (1′) и (2′) заключаем, что $M(V) = V\cdot\int_a^c |\psi(t)|\,dt$, ибо $C \pm$ $\pm F(t) \in H_{V[a,\,b]}$.

Аналогично доказывается и равенство

$$M(V) = V\cdot\int_c^b |\psi(t)|\,dt.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Для всех* $k=1, 2, \ldots, 2^m$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f\in H_V} \left|a_m^{(k)}(f)\right| = \frac{V}{4}\frac{1}{\sqrt{2^m}}.$$

Доказательство. Положим $h = 2^{-(m+1)}$, $\Delta^{(k)} = [(k-1)\,2h,$ $k\cdot 2h]$, $\Delta_1^{(k)} = [(k-1)\,2h,\ (2k-1)\,h]$, $\Delta_2^{(k)} = [(2k-1)\,h,\ k\cdot 2h]$, $(1\leqslant k\leqslant 2^m)$.

По лемме 2 для произвольной функции $f(t)\in H_V$ имеем

$$\left|a_m^{(k)}(f)\right| = \left|a_m^{(k)}(\psi)\right| = \left|\int_0^1 \psi(t)\,X_m^{(k)}(t)\,dt\right| =$$

$$= \left|\int_{\Delta^{(k)}} \psi(t)\,X_m^{(k)}(t)\,dt\right| = \sqrt{2^m}\left|\int_{\Delta_1^{(k)}} \alpha_k\,dt - \int_{\Delta_2^{(k)}} \beta_k\,dt\right| =$$

$$= h\cdot\sqrt{2^m}\,|\alpha_k - \beta_k| \leqslant \frac{V}{4}\frac{1}{\sqrt{2^m}} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots, 2^m).$$

Но для функции $f_0(t)$, равной $\frac{V}{4}$ для $0\leqslant t\leqslant(2k-1)\,h$ и равной $-\frac{V}{4}$ для $(2k-1)\,h < t < 1$, периодически продолженной с периодом $\gamma = 1$ на всю числовую ось,

$$\left|a_m^{(k)}(f_0)\right| = \frac{V}{4}\frac{1}{\sqrt{2^m}}.$$

Теорема доказана, так как $f_0(t)\in H_V$.

Теорема 2. *Для произвольного* $m = 0, 1, 2, \ldots$ *имеют место равенства*

$$\sup_{f\in H_V} \sum_{k=1}^{2^m} \left|a_m^{(k)}(f)\right| = \frac{V}{2}\frac{1}{\sqrt{2^m}} \qquad (1)$$

и

$$\sup_{f\in H_V}\left|\sum_{k=1}^{2^m} a_m^{(k)}(f)\right| = \frac{V}{4}\frac{1}{\sqrt{2^m}}. \tag{2}$$

Доказательство. Положим

$$\mathop{V}_{(k-1)2h}^{k2h} f = V_k,\ k = 1,\ 2, \ldots,\ 2^m,$$

тогда

$$\sum_{k=1}^{2^m} V_k = \mathop{V}_0^1 f.$$

Применяя лемму 3 на каждом из отрезков $\Delta^{(k)} = [(k-1)2h, k\cdot 2h]$ $(k=1, \ldots, 2^m)$, для любой функции $f(t)\in H_V$ получим

$$\sum_{k=1}^{2^m}\left|a_m^{(k)}(f)\right| = \sum_{k=1}^{2^m}\left|\int_0^1 f(t)\mathrm{X}_m^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t\right| =$$

$$= \sum_{k=1}^{2^m}\left|\int_{\Delta(k)} f(t)\,\mathrm{X}_m^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sum_{k=1}^{2^m} V_k\sqrt{2^m}\cdot h \leqslant \frac{V}{2}\frac{1}{\sqrt{2^m}}. \tag{3}$$

Знак равенства в (3) выполняется для функции

$$f_1(t) = \begin{cases} \dfrac{V}{4}, & t\in[0,\ h]\cup(3h,\ 1), \\ -\dfrac{V}{4}, & t\in(h,\ 3h], \end{cases} \tag{4}$$

периодически продолженной с периодом $\gamma = 1$ на всю числовую ось.

Ясно, что $f_1(t)\in H_V$. Равенство (1) доказано.

Для доказательства равенства (2) положим

$$\sqrt{2^m}\,\psi(t) = \mathrm{X}_m^{(k)}(t) \quad (k = 1,\ 2, \ldots,\ 2^m).$$

Тогда, если $f(t)\in H_V$,

$$\sum_{k=1}^{2^m} a_m^{(k)}(f) = \sum_{k=1}^{2^m}\int_{\Delta(k)} f(t)\,\mathrm{X}_m^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \sqrt{2^m}\left[\int_0^{\frac{h}{2}}\psi(t) f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{h}{2}}^{2h}\psi(t) f(t)\,\mathrm{d}t + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=2}^{2^m}\int_{\Delta(k)}\psi(t) f(t)\,\mathrm{d}t\right] = \sqrt{2^m}\sum_{i=1}^{2^{m+1}}\int_{(2i-1)\frac{h}{2}}^{(2i+1)\frac{h}{2}}\psi(t) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Положим

$$V_i = \bigvee_{(2i-1)\frac{h}{2}}^{(2i+1)\frac{h}{2}} f \quad (i = 1, 2, \ldots, 2^{m+1}),$$

тогда

$$\bigvee_0^1 f = \bigvee_{\frac{h}{2}}^{1+\frac{h}{2}} f = \sum_{i=1}^{2^{m+1}} V_i.$$

Применяя лемму 3 на каждом из отрезков $\left[(2i-1)\frac{h}{2},\ (2i+1)\frac{h}{2}\right]$, получим

$$\left|\sum_{k=1}^{2^m} a_m^{(k)}(f)\right| = \sqrt{2^m}\left|\sum_{i=1}^{2^{m+1}} \int_{(2i-1)\frac{h}{2}}^{(2i+1)\frac{h}{2}} \psi(t) f(t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2^m} \sum_{i=1}^{2^{m+1}} \left|\int_{(2i-1)\frac{h}{2}}^{(2i+1)\frac{h}{2}} \psi(t) f(t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2^m} \sum_{i=1}^{2^{m+1}} V_i \int_{(2i-1)\frac{h}{2}}^{ih} |\psi(t)|\,dt = \frac{V}{4}\frac{1}{\sqrt{2^m}},$$

причем для функции $f_0(t)$, введенной при доказательстве теоремы 1,

$$\left|\sum_{k=1}^{2^m} a_m^{(k)}(f_0)\right| = \frac{V}{4}\frac{1}{\sqrt{2^m}}.$$

Теорема 2 доказана.

Отметим, что в непериодическом случае

$$\sup_{f\in H_{V[0,1]}} |a_m^{(k)}(f)| = \sup_{f\in H_{V[0,1]}} \left|\sum_{k=1}^{2^m} a_m^{(k)}(f)\right| =$$

$$= \sup_{f\in H_{V[0,1]}} \sum_{k=1}^{2^m} |a_m^{(k)}(f)| = \frac{V}{2}\frac{1}{\sqrt{2^m}} (m \geqslant 0).$$

Теорема 3. *Для всех* $m = 0, 1, 2, \ldots$ *имеют место равенства*

$$1)\ \sup_{f\in H_V} |c_{m+1}(f)| = \frac{V}{4}\frac{1}{2^m}, \tag{5}$$

$$2)\quad \max_{i=1,2,\ldots,2^m} \sup_{f\in H_V} \left| b_{m+1}^{(i)}(f) \right| = \frac{V}{2}\frac{1}{2^m}, \tag{6}$$

$$3)\quad \min_{i=1,\ldots,2^m} \sup_{f\in H_V} \left| b_{m+1}^{(i)}(f) \right| = \frac{V}{4}\frac{1}{2^m}. \tag{7}$$

Доказательство. Аналогично доказательству равенства (2) теоремы 2 для любой функции $f(t) \in H_V$ будем иметь

$$|c_{m+1}(f)| = \left| \int_0^1 f(t)\, r_{m+1}(t)\, dt \right| = \left| \int_{\frac{h}{2}}^{1+\frac{h}{2}} f(t)\, r_{m+1}(t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{2^{m+1}} \left| \int_{(2i-1)\frac{h}{2}}^{(2i+1)\frac{h}{2}} f(t)\, r_{m+1}(t)\, dt \right| \leqslant \frac{V}{4}\frac{1}{2^m},$$

причем и здесь экстремальной функцией будет функция $f_0(t)$. Равенство (5) доказано.

Аналогично доказательству равенства (1) теоремы 2 доказывается равенство (6). В этом случае для $2^{s-1} < i \leqslant 2^s$ $(s = 1, 2, \ldots, m)$ экстремальной функцией будет однопериодическая функция

$$f_i(t) = \begin{cases} \frac{V}{4}, & t \in [0,\ 2^{-s} - h] \cup (2^{-s} + h,\ 1), \\ -\frac{V}{4}, & t \in (2^{-s} - h,\ 2^{-s} + h] \end{cases}$$

Учитывая это и то, что

$$b_{m+1}^{(1)}(f) = c_{m+1}(f),$$

убеждаемся в справедливости равенства (7). Теорема 3 доказана.

Пусть $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности. Через $H_{\omega[a,b]}$ будем обозначать класс заданных на $[a, b]$ функций, для которых $\omega(f;\ t) \leqslant \omega(t)$.

Лемма 4. (Н. П. Корнейчук, [5]). *Если интегрируемая на $[a, b]$ функция $\psi(t)$ такая, что $\psi(a+u) = -\psi(b-u)$ $(0 \leqslant u \leqslant b-a)$ и функция $\Psi(x) = \int_a^x \psi(t)\, dt$ строго возрастает (убывает) на (a, c), $c = \frac{a+b}{2}$, и строго убывает (возрастает) на (c, b), то*

1)

$$M(\omega, \psi) = \sup_{f\in H_{\omega[a,b]}} \left| \int_a^b \psi(t) f(t)\, dt \right| = \int_a^c |\psi(t)|\, \omega[(a+b) - 2t]\, dt =$$

$$= \int_c^b |\psi(t)|\, \omega[2t - (a+b)]\, dt;$$

2) верхняя грань $M(\omega, \psi)$ достигается для функций $C \pm$ $\pm F(x)$, где

$$F(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}\omega\,[(a+b)-2x], & a\leqslant x\leqslant\frac{a+b}{2},\\ \frac{1}{2}\omega\,[2x-(a+b)], & \frac{a+b}{2}\leqslant x\leqslant b.\end{cases}$$

Теорема 4. *Каков бы ни был выпуклый вверх модуль непрерывности* $\omega(t)$ $\left(0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\right)$,

$$\sup_{f\in H_\omega}\sum_{k=1}^{2^m}\left|a_m^{(k)}(f)\right| = 2^{\frac{3m-2}{2}}\int_0^{2^{-m}}\omega(t)\,dt. \tag{8}$$

Доказательство Известно (см. [3, теорема 1]), что

$$\sup_{f\in H_\omega}\left|a_m^{(k)}(f)\right| = \frac{\sqrt{2^m}}{2}\int_0^{2^{-m}}\omega(t)\,dt. \tag{9}$$

Учитывая (9), легко получить (8).

Следствие 1. *Если* $\omega(t)=Kt^\alpha$ $(0<\alpha\leqslant 1)$, *то*

$$\sup_{f\in KH^\alpha}\sum_{k=1}^{2^m}\left|a_m^{(k)}(f)\right| = \frac{K}{2(\alpha+1)\sqrt{2^{m(2\alpha-1)}}}. \tag{9'}$$

Из равенства (9') немедленно следует один результат, полученный Чисельским и Муселаком [6]: если $f(t)\in KH^{(\alpha)}$ $\left(\frac{1}{2}<\alpha\leqslant\right.$ $\left.\leqslant 1\right)$, то

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^m}\left|a_m^{(k)}(f)\right|<\infty.$$

Теорема 5. *Для произвольного выпуклого вверх модуля непрерывности* $\omega(t)$

$$\sup_{f\in H_\omega}\left|\sum_{k=1}^{2^m}a_m^{(k)}(f)\right| = 2^{\frac{3}{2}m}\int_0^{2^{-(m+1)}}\omega(t)\,dt.$$

Доказательство. Положим $\sqrt{2^m}\psi(t)=X_m^{(k)}(t)$, тогда для произвольной функции $f(t)\in H_\omega$ получим

$$\sum_{k=1}^{2^m}a_m^{(k)}(f)=\sum_{k=1}^{2^m}\int_{\Delta^{(k)}}f(t)\,X_m^{(k)}(t)\,dt=$$

$$= \sqrt{2^m}\left[\int_0^{\frac{h}{2}} \psi(t) f(t)\,dt + \int_{\frac{h}{2}}^{2h} \psi(t) f(t)\,dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=2}^{2^m} \int_{\Delta^{(k)}} \psi(t) f(t)\,dt \right] = \sqrt{2^m} \sum_{i=1}^{2^{m+1}} \int_{(2i-1)\frac{h}{2}}^{(2i+1)\frac{h}{2}} \psi(t) f(t)\,dt.$$

Применяя лемму 4 на каждом из отрезков

$$\left[(2i-1)\frac{h}{2}, \quad (2i+1)\frac{h}{2}\right] \; (i = 1, 2, \ldots, 2^{m+1}),$$

получим

$$\left|\sum_{k=1}^{2^m} a_m^{(k)}(f)\right| \leqslant \sqrt{2^m} \sum_{i=1}^{2^{m+1}} \left| \int_{(2i-1)\frac{h}{2}}^{(2i+1)\frac{h}{2}} \psi(t) f(t)\,dt \right| =$$

$$= \sqrt{2^m} \sum_{i=1}^{2^{m+1}} \int_{(2i-1)\frac{h}{2}}^{ih} |\psi(t)|\,\omega(2ih - 2t)\,dt =$$

$$= 2^{\frac{3}{2}m} \int_0^{2^{-(m+1)}} \omega(t)\,dt \tag{10}$$

Знак равенства в (10) выполняется для функции

$$f_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,\omega(2t), & t \in \left[0, \frac{h}{2}\right], \\ \frac{1}{2}\,\omega(2h - 2t), & t \in \left[\frac{h}{2}, h\right], \\ -\frac{1}{2}\,\omega(2t - 2h), & t \in \left[h, \frac{3}{2}h\right], \\ \frac{1}{2}\,\omega(4h - 2t), & t \in \left[\frac{3}{2}h, 2h\right], \end{cases}$$

периодически продолженной с периодом $\gamma = 2h$ на всю числовую ось, причем $f_2(t) \in H_\omega$. Теорема доказана.

Следствие. *Для функций класса* $KH^{(\alpha)}$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$

$$\sup_{f \in KH^{(\alpha)}} \left|\sum_{k=1}^{2^m} a_m^{(k)}(f)\right| = \frac{K}{2(\alpha+1)} \frac{1}{\sqrt{2^{m(2\alpha-1)+2\alpha}}}.$$

Автор выражает благодарность Н. П. Корнейчуку за постановку задач и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Л. Ульянов. О рядах по системе Хаара. «Матем. сб.», т. 63 (105) : 3, 1964.

2. Б. И. Голубов. «Изв. АН СССР, серия матем.», т. 26, № 6, 1964, 1271—1296.

3. Н. П. Хорошко. Материалы межвузовской конференции молодых ученых-математиков. Изд-во Харьковск. ун-та, 1967, 116—124.

4. С. Качмаж, Г. Штейнгауз. Теория ортогональных рядов. Физматгиз, 1958.

5. Н. П. Корнейчук. Про екстремальні властивості періодичних функцій. Доп. АН УРСР, № 8, 1962, 933—938.

6. Z. Ciesielski, J. Musielak. On absolute convergense of Haar series, Collog. Math. 7, № 1, 1959, 61—65.

Поступила 10 февраля 1970 г.