О НЕКОТОРЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ $C(X)$

Е. А. Горин

Полупростая коммутативная банахова алгебра A над полем комплексных чисел, реализованная в соответствии с гельфандовским представлением как алгебра непрерывных функций на своем пространстве максимальных идеалов X, называется *нормальной* (в смысле Шилова), если для любых двух непересекающихся замкнутых подмножеств компакта X существует такая функция из A, которая равна 1 на одном из этих множеств и равна 0 на другом из них. Никаких условий на норму или модуль отделяющей функции здесь не налагается, и в принципе могут существовать нетривиальные нормальные замкнутые подалгебры в $C(X)$. Впервые такой пример был построен Мак-Киссиком [1].

С другой стороны, если идемпотенты в каждой из факторалгебр $A/I(Y)$, где $I(Y)$ — идеал функций из A, равных 0 на Y, ограничены в совокупности, то A совпадает с $C(X)$. Этот результат первоначально был получен Кацнельсоном [2] для симметричных A, а затем распространен на произвольные нормальные алгебры в нашей работе [3]. Кроме того, Гликсберг [4] независимо рассматривал случай алгебр с равномерной сходимостью.

В результатах такого типа условие нормальности нетрудно заменить более слабым условием аппроксимативной нормальности. Любопытно, что в надлежащей формулировке они сохраняются для банаховых пространств непрерывных функций на компакте и, стало быть, не зависят от теории Гельфанда. Правда, полностью игнорировать мультипликативную структуру нельзя: для пространств функций из условия типа ограниченности идемпотентов следует только существование открытого покрытия, сужение на элементы которого содержит все финитные непрерывные функции.

Основная часть данной работы посвящена подробному изложению намеченных выше результатов. Кроме того, в п. 4 для сепарабельных (это условие существенно) полупростых банаховых алгебр устанавливается изоморфизм с $C(X)$ в предположении, что логарифмы модулей обратимых элементов алгебры образуют замкнутое подмножество в $C(X)$. Частный случай этого утверждения, относящийся к алгебрам с равномерной сходимостью, фактически содержался в [5]. Здесь мы приводим упрощенный вариант доказательства общего утверждения, основанный на одной теореме Бернара [6].

1. Вспомогательные леммы

Пусть X — непустое множество. Если $X_1, X_2 \subseteq X$, причем $X_1 \cap X_2 = \varnothing$, то через ψ_{X_1, X_2} мы будем обозначать функцию на $X_1 \cup X_2$, принимающую всюду на X_1 значение -1, а на X_2 — значение $+1$. Для любых $\alpha, \beta > 0$ через $\Pi_{\alpha,\beta}$ обозначим совокупность комплексных ζ, для которых $|\mathrm{Re}\,\zeta| < \alpha$, $|\mathrm{Im}\,\zeta| < \beta$.

Пусть a, b и ε — фиксированные положительные числа. Пусть, далее, S — некоторое выпуклое множество комплексных функций на X, для которых $f(X) \subseteq \Pi_{a,b}$, а $\sum$ — такая система подмножеств множества X, что объединение двух множеств из $\sum$ снова есть элемент $\sum$ и, кроме того, $f^{-1}(C \setminus \Pi_{1+\varepsilon,\varepsilon}) \in \sum$ при любом $f \in S$.

Лемма 1. *Если для любых непересекающихся подмножеств X_1, $X_2 \in \sum$ существует такая функция $f \in S$, что $|f - \psi_{X_1,X_2}| < \varepsilon$ всюду на объединении этих подмножеств, то при $\alpha > 1 + \varepsilon$, $\beta > \varepsilon$ найдется и такая функция $f \in S$, для которой $|f - \psi_{X_1, X_2}| < \varepsilon$ и, кроме того, $f(X) \subseteq \Pi_{\alpha,\beta}$.*

Замечание. В дальнейшем нас в основном будет интересовать только тот случай, когда $\sum$ — система всех замкнутых или компактных подмножеств топологического пространства X, а S — шар некоторого банахова пространства непрерывных функций на X.

Доказательство. Заметим сперва, что для любых трех взаимно-непересекающихся множеств $X_0, X_1, X_2 \in \sum$ имеется такая функция $g \in S$, что $|g| < \varepsilon$ на X_0 и $|g - \psi_{X_1, X_2}| < \varepsilon$ на $X_1 \cup X_2$.

Пусть $\alpha_0 = a$, $\beta_0 = b$. По условию для любых $X_1, X_2 \in \sum$, не имеющих общих точек, имеется такая функция $f_0 \in S$, что $|f_0 - \psi_{X_1, X_2}| < \varepsilon$ и $f_0(X) \subseteq \Pi_{\alpha_0, \beta_0}$.

Пусть $X_0 = f_0^{-1}(C \setminus \Pi_{1+\varepsilon, \varepsilon})$. Тогда $X_0 \in \sum$ и X_0 не имеет общих точек с $X_1 \cup X_2$. Возьмем указанную в начале доказательства функцию $g_0 = g$ и положим $f_1 = \frac{1}{2}(f_0 + g_0)$. Тогда $f_1 \in S$, причем $|f_1 - \psi_{X_1, X_2}| < \varepsilon$ и, как легко видеть, $f_1(X) \subseteq \Pi_{\alpha_1, \beta_1}$, где

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\alpha_0 + 1 + \varepsilon), \quad \beta_1 = \frac{1}{2}(\beta_0 + \varepsilon).$$

Таким образом, условие леммы фактически выполняется с заменой α_0, β_0 на α_1, β_1. Повторяя тот же прием, мы сможем заменить α_0, β_0 на α_n, β_n, где α_n, β_n определяются соотношениями

$$\alpha_n = \frac{1}{2}(\alpha_{n-1} + 1 + \varepsilon), \beta_n = \frac{1}{2}(\beta_{n-1} + \varepsilon).$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1 + \varepsilon, \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = \varepsilon,$$

то лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть E_0 — нормированное пространство с нормой $|\cdot|$ и E — линейное подпространство пространства E_0, снабженное собственной нормой $\|\cdot\| \geqslant |\cdot|$, относительно которой оно является банаховым. Пусть K и θ — фиксированные положительные числа, причем $\theta < 1$. Если для любого $f_0 \in E_0$ существует такое $f \in E$, что $|f - f_0| \leqslant \theta |f_0|$ и $\|f\| \leqslant K|f|$, то $E = E_0$ и $\|\cdot\| \leqslant \frac{K}{1-\theta}|\cdot|$.*

Это очевидно.

Напомним, что пространство E функций на X называется аппроксимативно нормальным, если для любой пары непересекающихся множеств из некоторой системы $\sum$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $f \in E$, что $|f - \psi_{X_1, X_2}| < \varepsilon$. Мы будем иметь дело с более специальными классами.

Если X — локально компактное хаусдорфово пространство, то через $C_0(X)$ будем обозначать совокупность всех непрерывных функций на X, для которых при любом $\varepsilon > 0$ множество $\{x : |f(x)| \geqslant \varepsilon\}$ компактно. Ясно, что $C_0(X)$ является банаховым пространством относительно sup-нормы (которой оно и наделяется).

Определение. *Пусть $K > 1$. Нормированное пространство $E \subset C_0(X)$ с нормой, удовлетворяющей условию $\|\cdot\| \geqslant \sup_X |\cdot|$, называется K-нормальным, если для любых двух непересекающихся компактов X_1, X_2 и любого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $f \in E$, для которой $|f - \psi_{X_1, X_2}| < \varepsilon$ и $\|f\| \leqslant K$.*

Из леммы 1 немедленно вытекает, что *среди разделяющих в этом смысле функций $f \in E$ имеются и такие, для которых дополнительно* $|\mathrm{Re} f| < 1 + \varepsilon$ и $|\mathrm{Im} f| < \varepsilon$.

Лемма 3. *Всякое банахово K-нормальное пространство $E \subset C_0(X)$ фактически совпадает с $C_0(X)$, причем $\|\cdot\| \leqslant 2\sqrt{2}K \sup_X |\cdot|$.*

Доказательство. Пусть u — вещественная функция из $C_0(X)$, для которой $\sup_X |u| = 1$. Положим

$$X_1 = \left\{x : u(x) \leqslant -\frac{1}{3}\right\}, \quad X_2 = \left\{x : u(x) \geqslant \frac{1}{3}\right\}.$$

Из сказанного выше следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая «почти вещественная» функция $v \in E$, что $\|v\| \leqslant \frac{1}{3}K$ и $\sup_x |v - u| \leqslant \frac{2}{3} + \varepsilon$. Поэтому для любой функции $g \in C_0(X)$ найдется такая функция $f \in E$, что

$$\|f\| \leqslant \frac{2}{3} K \sup_X |g|$$

и

$$\sup_x |\mathrm{Re}(f - g)| + \sup_X |\mathrm{Im}(f - g)| \leqslant \left(\frac{2}{3} + \varepsilon\right)[\sup_X |\mathrm{Re}\, g| + \sup_X |\mathrm{Im}\, g|].$$

Оба утверждения леммы теперь сразу вытекают из леммы 2.

2. k-нормальные пространства

Всюду в дальнейшем X — компакт и E — банахово пространство непрерывных комплексных функций на X, причем $\|\cdot\| \geqslant \sup_X |\cdot|$. Предполагается также, что функции из E разделяют компакт X.

Определение. *Пространство E называется k-нормальным, если для любого замкнутого подмножества $Y \subseteq X$ существует такое $k = k(Y)$, что каково бы ни было разбиение Y на два замкнутых непересекающихся подмножества Y_1, Y_2 и каково бы ни было $\varepsilon > 0$ в E найдется функция f, удовлетворяющая условиям $\|f\| \leqslant k$, $|f - \varphi_{Y_1, Y_2}| < \varepsilon$. Через $k(Y)$ будем обозначать наилучшую возможную константу, игнорируя вопрос о достижимости.*

Замечание. По отношению к банаховым алгебрам k-нормальность эквивалентна ограниченности идемпотентов в факторалгебрах и обеспечивает совпадение алгебры с $C(X)$. В общем случае это не так — достаточно рассмотреть пространство функций на отрезке $[0, 1]$, для которых $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Конечно, если $\sup_Y k(Y) < \infty$, то пространство k-нормально и по лемме 3 совпадает с $C(X)$.

Теорема 1. *Пусть E — банахово k-нормальное пространство непрерывных функций на компакте X. Тогда существует такое открытое покрытие $\{U\}$ этого компакта, что $C_0(U) \subseteq E | U$.*

Таким образом, для *пространств* функций имеется «гомологический эффект». Прежде чем переходить к доказательству, дадим эквивалентную формулировку. Отметим, что применяемый ниже метод является дальнейшим развитием идеи Кацнельсона [2], который рассматривал случай симметричных алгебр.

Определение. *Пространство E называется ограниченным на открытом множестве $U \subset X$, если числа $k(Y)$ (см. предыдущее определение) ограничены в совокупности по всем компактам $Y \subset U$. Пространство называется ограниченным в точке компакта X, если оно является ограниченным в некоторой окрестности этой точки.*

В силу леммы 3 *пространство E тогда и только тогда ограничено в точке, когда для некоторой окрестности V этой точки имеем* $C_0(V) \subseteq E \mid V$.

Множество точек компакта X, в которых пространство E ограничено, очевидно, открыто. Дополнительное к нему замкнутое множество обозначим через $\mathrm{Sing}(E, X)$.

Ясно, что утверждение теоремы 1 эквивалентно следующему: $\mathrm{Sing}(E, X) = \varnothing$. Это утверждение мы и будем доказывать.

Лемма 4. *В условиях теоремы 1 множество* $\mathrm{Sing}(E, X)$ *не может быть бесконечным.*

Доказательство. Если ξ — предельная точка для $\mathrm{Sing}(E, X)$, то для любой точки $x \neq \xi$ существует такая окрестность, вне которой имеется бесконечное количество точек из $\mathrm{Sing}(E, X)$. Поэтому, если множество $\mathrm{Sing}(E, X)$ бесконечно, то существует бесконечная последовательность таких взаимно непересекающихся открытых множеств V_n и таких компактов $Y_n \subset Y_n$, что $k(Y_n) \to \infty$. Но тогда $k(Y)$, где $Y = \bigcup_n Y_n$, не может быть конечным вопреки условию теоремы. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. В силу леммы 4 нам достаточно опровергнуть следующую гипотезу: пространство E является k-нормальным и $\mathrm{Sing}(E, X)$ состоит из единственной точки x_0.

Но если существует такая проколотая окрестность точки x_0, что числа $k(Y)$ равномерно ограничены по всем компактам Y из этой окрестности, то, как легко следует из леммы 3, пространство E ограничено в x_0. В соответствии с нашей гипотезой мы обязаны отказаться от этой возможности. Поэтому, как и в лемме 4, удается построить такую бесконечную последовательность непересекающихся открытых множеств V_n и компактов $Y_n \subset V_n$, концентрирующихся вблизи x_0, что $k(Y_n) \to \infty$. Присоединяя к $\bigcup_n Y_n$ точку x_0, получим компакт Y, для которого $k(Y)$ не может быть конечным. Но это также противоречит нашей гипотезе. Тем самым теорема доказана и гипотеза неверна.

Замечание. Без предположения о k-нормальности множество $\mathrm{Sing}(E, X)$ может быть весьма причудливым даже для замкнутых подалгебр алгебры $C(X)$. Впрочем это связано с «неправильной» реализацией подалгебры: ниже мы увидим, что для алгебр с равномерной сходимостью пересечение $\mathrm{Sing}(E, X)$ с границей Шилова непременно является совершенным множеством.

Заметим еще, что в общем случае k-нормальность *не следует* из существования покрытия, о котором говорится в теореме 1. Действительно, пусть X — прямоугольник $|t_1| \leqslant 1,\ 0 \leqslant t_2 \leqslant 1$, на плоскости и E — замкнутое подпространство в $C(X)$, состоящее из функций, удовлетворяющих условию

$$\int_{-1}^{1} f(t_1, t_2)\,dt_1 = 0 \text{ при всех } t_2.$$

Ясно, что для E имеется указанное в теореме 1 покрытие (из двух элементов). С другой стороны, пространство E не является k-нормальным: достаточно в качестве Y рассмотреть замыкание множества $|t_1| \geqslant t_2 = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

Определение. *Банахово пространство E непрерывных функций на компакте X называется насыщающим, если для любого собственного замкнутого подмножества $Y \subset X$ имеем $E \mid Y = C(Y)$.*

Пример насыщающего замкнутого подпространства коразмерности 1 в $C(0, 1)$ приведен перед теоремой 1. Свойство пространства быть насыщающим, вообще говоря, сильнее чем k-нормальность. Совокупность непрерывных функций на объединении отрезков [0, 2] и [3, 5], для которых

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx \text{ и } \int_3^4 f(x)dx = \int_4^5 f(x)dx,$$

образует, как легко видеть, k-нормальное, но не насыщающее пространство.

Интересно отметить, что насыщающее пространство может быть замкнутым подпространством в $C(X)$ *бесконечной* коразмерности или быть *плотным, но не замкнутым* в $C(X)$ банаховым пространством (автор благодарит В. Д. Мильмана и А. М. Олевского за обсуждение следующего ниже примера).

Пример. Укажем сперва насыщающее замкнутое подпространство в $C(X)$ бесконечной коразмерности.

На отрезке $X=[-\pi, \pi]$ с отождествленными концами рассмотрим лакунарную тригонометрическую систему

$$e_n(x) = e^{i2^n x}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Пусть E — совокупность тех непрерывных функций f на X, для которых при всех n

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{e_n(x)}dx = 0. \tag{1}$$

Оказывается, E — насыщающее пространство на X.

Поскольку E инвариантно относительно сдвигов, достаточно проверить, что $E|Y = C(Y)$, если Y есть дополнение к интервалу $\Delta = (-\varepsilon, \varepsilon)$. Для любой непрерывной вне Δ функции f_0 мы должны указать такое продолжение f, которое удовлетворяет условию (1). Так как речь идет о любом $\varepsilon>0$, можно ограничиться функциями f_0, равными 0 при $x = \pm\varepsilon$. Очевидно, для построения продолжения достаточно (а фактически и необходимо) по любой l_2-последовательности (c_n) найти такую функцию $g \in C_0(\Delta)$, что при всех n

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g(x)\overline{e_n(x)}dx = c_n. \tag{2}$$

Если через T обозначить оператор $C_0(\Delta) \to l_2$, определяемый формулой (2), то задача сводится к доказательству эпиморфности T, а это, по известной теореме Банаха, равносильно доказательству неравенства $\| T^*\varphi \| \geqslant \gamma^{-1} \| \varphi \|$ с некоторым $\gamma > 0$. Обозначим через H замкнутое подпространство в $L^2(-\pi, \pi)$, порожденное системой (e_n). Тогда последнее неравенство, как легко видеть, эквивалентно неравенству

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |h|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant \gamma \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |h|\, dx \tag{3}$$

при всех $h \in H$. Неравенство (3), по-видимому, хорошо известно, однако мы затрудняемся дать точную ссылку и поэтому наметим доказательство. Кстати, при $\varepsilon = \pi$ оно выражает стандартное свойство лакунарных систем (см., например, [7], стр. 345).

Мы можем ограничиться случаем $\varepsilon = \frac{\pi}{2^{n_0}}$. Фиксируем n_0 и обозначим через H' подпространство в H, порожденное элементами e_n с $n > n_0$, а через H'' — ортогональное дополнение, порожденное первыми n_0 векторами e_n. Заметим, что так как $\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\, e_n | \Delta$, $n > n_0$, образуют лакунарную ортонормированную систему в $L^2(\Delta)$, то в силу равенства Парсеваля и упомянутого свойства лакунарных систем имеем

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |h'|^2 dx\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |h'|^2 dx\right)^{1/2} = \gamma' \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |h'|dx \tag{4}$$

для всех $h' \in H'$, где γ' зависит только от ε.

Предположим теперь, что (3) не имеет места. Тогда найдется такая последовательность элементов $h_p \in H$, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h_p|^2 dx = 1,$$

а

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |h_p| dx \to 0 \tag{5}$$

при $p \to \infty$. В соответствии с ортогональным разложением $H = H' \oplus H''$ положим $h_p = h_p' + h_p''$. Так как H'' конечномерно и так как L_2-нормы векторов h_p ограничены в совокупности, то можем предположить, что $h_p'' \to h'' \in H''$ при $p \to \infty$. В силу (4) и (5)

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |h_p' - h_q'|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant \gamma' \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |h_p' - h_q'|\, dx \leqslant \gamma' \left\{ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (|h_p| + |h_q|) dx + \right.$$

$$\left. + \int_{-\pi}^{\pi} |h_p'' - h_q''|\, dx \right\} \to 0$$

при $p, q \to \infty$. Следовательно, $h_p' \to h' \in H'$ и $h_p \to h \in H$ при $p \to \infty$, причем $\int_{-\pi}^{\pi} |h|^2 dx = 1$ и $h = 0$ почти всюду на Δ. Но это невозможно: сумма нетривиального лакунарного ряда по тригонометрической системе не может обращаться в 0 на множестве положительной меры (см., например, [7, стр. 331]. Существование константы γ в неравенстве (3) доказано, и построение примера закончено.

Чтобы получить пример всюду плотного в $C(X)$, но не замкнутого насыщающего банахова пространства, достаточно пополнить семейство тригонометрических полиномов по норме

$$\sup |f| + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i2^n x} dx \right|.$$

3. Случай алгебр

Ситуация, описываемая теоремой 1, значительно упрощается в случае банаховых алгебр. Здесь и в следующем пункте A — банахова алгебра непрерывных комплексных функций на компакте X, содержащая константы и разделяющая точки. Вообще говоря, *не предполагается*, что X исчерпывает пространство максимальных идеалов алгебры A.

Теорема 1'. *В случае алгебр из существования покрытия, о котором говорится в теореме 1, следует совпадение A с $C(X)$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть покрытие, состоящее из двух элементов U_1, U_2. Для sup-алгебр аналогичное утверждение верно даже по отношению к счетным замкнутым покрытиям (например, [8]), и мы займемся (учитывая это обстоятельство) общим случаем. Обозначим через A равномерное замыкание алгебры A. В силу сказанного $A=C(X)$. Пусть V_1, V_2 — такое открытое покрытие компакта X, что $\overline{V}_j \subset U_j$ (черта означает замыкание). Так как отображение $A \to A|\overline{V}_j = C(\overline{V}_j)$ надъективно, существует такая константа c, что для любой функции $g_j \in C(\overline{V}_j)$ найдется совпадающая с ней на $\overline{V}_j$ функция $f_j \in A$, для которой $|f_j| \leqslant c \sup\limits_{\overline{v}_j} |g_j|$.

Фиксируем такое $\varepsilon < 0$, чтобы иметь $2c\varepsilon < 1$. Фиксируем некоторое разбиение единицы $\tilde{h}_1$, $\tilde{h}_2 \in \tilde{A}$, подчиненное покрытию V_1, V_2. Имеются такие функции h_1 $h_2 \in A$, что $|\tilde{h}_j - h_j| < \varepsilon$ всюду на X.

Пусть, наконец, g — некоторая непрерывная функция на X. Существуют такие элементы $f_1, f_2 \in A$, что $f_j = g$ на V_j и $|f_j| \leqslant c \sup\limits_X |g|$. Положим $f = f_1h_1 + f_2h_2$. Ясно, что $f \in A$ и $\|f\| \leqslant K \sup\limits_X |g|$, где K не зависит от g. Имеем

$$\sup_X |f-g| \leqslant 2c\varepsilon \sup_X |g|,$$

так как $f-g = f_1(h_1 - \tilde{h}_1) + f_2(h_2 - \tilde{h}_2)$, и остается воспользоваться леммой 2. Теорема доказана.

Следствие. *Всякая k-нормальная банахова алгебра на компакте X совпадает с $C(X)$.*

Последнее предложение содержит, в частности, упоминавшиеся выше основные результаты из [2—4].

Остановимся более подробно на алгебрах с равномерной сходимостью. В дальнейшем M_A означает пространство максимальных идеалов алгебры A, а Γ — границу Шилова.

Если μ — некоторая мера на Γ, то через $car(\mu)$ мы обозначаем минимальный замкнутый носитель этой меры. Хорошо известно, что всякий мультипликативный функционал φ на алгебре A допускает представление

$$\varphi(f) = \int_\Gamma f d\mu$$

с некоторой (быть может, не единственной) положительной мерой μ.

Лемма 5. *Если для представляющей меры $car(\mu)$ содержит более одной точки, то $car(\mu) \subseteq Sing(A, \Gamma)$.*

Доказательство. Мы должны доказать, что множество $car(\mu)$ одноточечно, если имеется точка

$$x_0 \in car(\mu) \setminus \mathrm{Sing}(A, \Gamma).$$

По лемме 3 для некоторой окрестности V (на Γ) такой точки имеет место точная последовательность

$$0 \to \mathrm{Ker}\, R_Y \to A \to C(Y) \to 0,$$

где R_Y — оператор сужения на множество $Y = \overline{V}$. Известно (например, [9, стр. 270], что если для некоторого элемента $f \in A$ множество нулей этого элемента имеет непустое пересечение с минимальным носителем представляющей меры мультипликативного функционала φ, то $\varphi(f) = 0$. Поэтому из указанной точной последовательности вытекает, что функционал φ индуцирует гомоморфизм алгебры $C(Y)$ в поле комплексных чисел. Поэтому $\varphi(f) = f(x_0)$ и $car(\mu) = \{x_0\}$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $x_0 \in \Gamma \setminus \mathrm{Sing}(A, \Gamma)$. Тогда некоторое открытое в M_A множество, содержащее точку x_0, целиком принадлежит к границе.*

Доказательство. Рассмотрим такую окрестность V точки x_0, которая не пересекается с множеством $\mathrm{Sing}(A, \Gamma)$. По известному свойству границы Шилова [10, стр. 77] найдется такая функция $f \in A$, что $f(x_0) = 1$ и $|f(x)| \leqslant \theta < 1$ всюду вне множества V. Если теперь ξ не принадлежит к границе, то по лемме 5

$$|f(\xi)| \leqslant \int\limits_{\mathrm{Sing}(A,\ \Gamma)} |f|\, d\mu \leqslant \theta.$$

Поэтому все точки x, в которых $|f(x)| > \theta$, суть точки границы. Лемма доказана.

Теорема 2. *Если ν — ортогональная к A мера на Γ, то* $car(\nu) \leqslant \leqslant \mathrm{Sing}(A, \Gamma)$.

Доказательство. Если имеется некоторая точка на Γ, не принадлежащая к $\mathrm{Sing}(A, \Gamma)$, то найдется (по лемме 3 и лемме 6) такое открытое в M_A множество U, что $A | U \supseteq C_0(U)$. Оставшийся отрезок доказательства параллелен доказательству теоремы 2 из [8].

Ясно, что всякое компактное множество $F \subset U$ типа G_δ является локальным множеством пика относительно A и, по теореме Росси [11, стр. 84], следовательно, глобальным множеством пика. Поэтому сужение ν_F меры ν на F есть ортогональная мера (ср. [12]), а так как $A | F = C(F)$, то $|\nu|(F) = 0$. Теорема доказана, поскольку точка x_0 была (в понятном смысле) произвольной.

Следствие. *Всякая функция из $C(\Gamma)$, равная 0 на $\mathrm{Sing}(A, \Gamma)$, принадлежит A.*

Следствие. *Множество $\mathrm{Sing}(A, \Gamma)$ не имеет изолированных точек.*

Следствие. [19]. *Если компакт X не содержит непустых совершенных подмножеств, то всякая замкнутая подалгебра в $C(X)$, содержащая константы и разделяющая точки, совпадает с $C(X)$.*

Замечание. Если X — некоторый компакт, удовлетворяющий условию $\Gamma \subseteq X \subseteq M_A$, то алгебру A можно реализовать в виде замкнутой подалгебры алгебры $C(X)$. *При такой реализации в отличие от случая $X = \Gamma$ множество* $\mathrm{Sing}(A, X)$ может оказаться весьма причудливым, например, оно может содержать изолированные точки. Легко указать примеры нетривиальных замкнутых *подпространств* в $C(X)$, для которых аналогичное множество одноточечно и т. п.

4. Модули обратимых элементов

Приведем здесь еще один результат типа теоремы Стона—Вейерштрасса. Рассматривается полупростая банахова алгебра A непрерывных функций на компакте X, который отождествляется с порцией пространства M_A максимальных идеалов. Через E обозначаем группу обратимых элементов алгебры A, наделенную индуцированной топологией, а через E_1 — связную компоненту единицы в группе E. Далее, $\mathrm{Re}A$ — подпространство в пространстве $C_{\mathrm{R}}(X)$ вещественных непрерывных функций на X, состоящее из вещественных частей элементов алгебры A, а L — группа функций вида $\log |f|$, где $f \in E$.

Даже в тех случаях, когда $A \neq C(X)$, запас функций $\log |f|$ с $f \in E$ может оказаться довольно обширным. Например, если g — строго положительная непрерывная функция на окружности, модуль непрерывности которой удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\omega(t)}{t}\, dt < \infty,$$

то согласно теореме Сегё [13, стр. 40] $g = |f|$, где f — обратимый элемент стандартной алгебры аналитических функций в круге. С другой стороны, не всякая строго положительная непрерывная функция на окружности допускает такое представление. Если алгебру всех ограниченных аналитических функций в круге реализовать как замкнутую подалгебру в алгебре всех непрерывных функций на ее границе Шилова Г, то окажется, что $Ł = C_R(\Gamma)$, хотя $A \neq C(\Gamma)$.

Лемма 7. (Бернар [6]). *Если* ReA *замкнуто* в $C_R(X)$, *то* $A = C(X)$.

Лемма Бернара обобщает теорему Гофмана и Вермера [14] относительно sup-алгебр.

Теорема 3. *Если Ł замкнуто в* $C_R(X)$, *причем алгебра A сепарабельна, то* $A = C(X)$.

Доказательство. По условию, E и $Ł$ — полные метризуемые группы, причем E сепарабельна. Поэтому (см., например, [15, стр. 282]), эпиморфизм $f \to \log|f|$ является открытым отображением. Значит, образ подгруппы E_1 относительно этого отображения есть открытая и, следовательно, замкнутая подгруппа в $Ł$. Последнее как раз означает, что ReA замкнуто в $C_R(X)$. По лемме Бернара $A = C(X)$. Теорема доказана.

Напомним, что подмножество $Y \subset X$ называется множеством антисимметрии, если $A|Y$ не содержит нетривиальных вещественных функций. Каждое множество антисимметрии содержится в максимальном множестве антисимметрии, и максимальные множества антисимметрии образуют замкнутое разбиение компакта X. Если A — алгебра с равномерной сходимостью на X, то, по теореме Шилова—Бишопа [16] (см. также [12]), всякая непрерывная функция, совпадающая на каждом из максимальных множеств антисимметрии с некоторым элементом из алгебры, сама является элементом алгебры. В частности, если максимальные множества антисимметрии одноточечны, то $A = C(X)$. Кроме того, сужение алгебры на максимальном множестве антисимметрии есть алгебра с равномерной сходимостью.

Следствие. *Если A — замкнутая подалгебра в $C(X)$, если $Ł = C_R(X)$ и если каждое максимальное множество антисимметрии метризуемо, то* $A = C(X)$.

По теореме Шилова—Бишопа, достаточно ограничиться случаем антисимметричных алгебр. Но в этом случае по условию X метризуемо и, следовательно, A — сепарабельная алгебра.

Другой способ получения этого следствия [5] основан на том, что по теореме Аренса—Ройдена [17] для антисимметричных алгебр $Ł/\mathrm{Re}A = H^1(M_A, Z)$.

Замечание. Аналогично могут быть обобщены другие результаты из работы [5]. Подчеркнем еще, что предположение о сепарабельности в теореме 3 существенно (алгебра ограниченных аналитических функций в круге). Для пространств функций аналогичная теорема вообще неверна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mc Kissick R. A non trivial normal sup norm algebra, Bull. Am. Math. Soc., 69, № 3, 1963. 391—395.

2. Katznelson I. A characterization of the algebra of all continuous functions on a compact Hausdorff Space, Bull. Am. Math. Soc., 66, № 4, 1960, 313—315.

3. Е. А. Горин. Характеристика кольца всех непрерывных функций на бикомпакте. ДАН СССР, 142, № 4 (1962), 781—784.

4. Glicksberg I. Function algebras with closed restriction, Proc. Am. Math. Soc., 14, 1963, 158—161.

5. Е. А. Горин. Модули обратимых элементов нормированной алгебры. Вестник МГУ, № 5, 1965, 35—39.

6. Bernard A. Une caractérisation de $C(X)$ parmi les algébres de Banach, C. r. Acad. sci., 287, № 18, 1968, A634—A635.

7. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, т 1. М., «Мир», 1965.

8. Gamelin T. W. and Wilken D. R. Closed partions of maximal ideal spaces, Ill. T. Math., 13, № 4, 1969, 789—795.

9. К. Гофман. Банаховы пространства аналитических функций. М., Ил., 1963.

10. И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов. Коммутативные нормированные кольца. М., Физматгиз, 1960.

11. Р. Ганнинг, Х. Росси. Аналитические функции многих комплексных переменных. М., «Мир», 1969.

12. Glicksberg I. Mesures orthogonal to algebres and sets of antisymmetry, Trans. Am. Math. Soc., **105**, № 3, 1962, 415—435.

13. У. Гренандер, Г. Сегё. Теплицевы формы и их приложения. М., Ил, 1961.

14. Hoffman K., Wermer T. A characterization of $C(X)$, Pacif. J. Math., **12**, № 3, 1962, 941—944.

15. Дж. Л. Келли. Общая топология. М., Физматгиз, 1968.

16. Э. Бишоп. Обобщение теоремы Стона—Вейерштрасса. Сб. «Математика», **7 : 3** (1963), 91—96.

17. Х. Л. Ройден. Функциональные алгебры. Сб. «Математика», **9 : 2** (1965), 98—114.

18. Bernard A. Caractérisations de certaines parties d'un espace compact muni d'un espace vectorid on d'une algébre de fonctions continues, Ann. inst. Fourier, **17**, № 2, 1967—68, 359—382.

19. Rudin W. Continuous functions on compact spaces without perfect subsets, Proc. Am. Math. Soc., 8, 1957, 39—42.

Поступила 25 мая 1970 г.