# О ВЕЛИЧИНАХ ОТКЛОНЕНИЙ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

*Т. Б. Ламзина*

1. В работе используются обозначения неванлинновской теории распределения значений мероморфных функций [1]. Кроме того, положим для мероморфной при $z \neq \infty$ функции $f(z)$ (см. [2, 3])

$$\beta(a, f) = \lim_{r \to \infty} \frac{\ln^+ M(r, a, f)}{T(r, f)},$$

$$\beta_\alpha(a, f) = \lim_{r \to \infty} \frac{\ln^+ M(r, a, f)}{T^\alpha(r, f)}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

где

$$M(r, a, f) = \max_{|z| = r} \frac{1}{|f(z) - a|}, \; a \neq \infty,$$

$$M(r, \infty, f) = \max_{|z| = r} |f(z)|,$$

$T(r, f)$ — неванлинновская характеристика,

$$\Omega(f) = \{ a : \beta(a, f) > 0 \},$$
$$\Omega^{(\alpha)}(f) = \{ a : \beta_\alpha(a, f) > 0 \}.$$

Величина $\beta(a, f)$ называется величиной отклонения мероморфной функции $f(z)$ от числа $a$. Множество $\Omega(f)$ называется множеством положительных отклонений мероморфной функции $f(z)$ [2].

Асимптотические свойства мероморфных функций нулевого нижнего порядка исследовались во многих работах [2—7].

Напомним следующие важные утверждения о величинах отклонений мероморфных функций нулевого нижнего порядка.

**Теорема А** [3]. *Если нижний порядок мероморфной функции $\lambda = 0$. то множество $\Omega(f)$ может состоять самое большее из одной точки.*

**Теорема Б** [7]. *Множество $\Omega^{(\alpha)}(f)$ при $\alpha > \frac{1}{2}$ имеет внутреннюю емкость* нуль.*

**Теорема В** [2] *Множество $\Omega^{(\alpha)}(f)$ для мероморфной фуркции положительного нижнего порядка может иметь мощность континуума при любом $0 < \alpha < 1$.*

Одним из основных результатов нашей работы является следующее утверждение.

**Теорема 1.** *При любом $0 < \alpha < 1$ множество $\Omega^{(\alpha)}(f)$ для мероморфной функции нулевого нижнего порядка может иметь мощность континуума.*

Таким образом, мы имеем существенное отличие в структуре множеств $\Omega^{(1)}(f) = \Omega(f)$ и $\Omega^{(\alpha)}(f)$, $\alpha < 1$. В дальнейшем нам понадобится понятие дефекта мороморфной функции.

Дефектом мероморфной функции в точке $a$ в смысле Ж. Валирона называется [8]

$$\Delta(a, f) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{m(r, a, f)}{T(r, f)}.$$

Неванлинновским дефектом мероморфной функции в точке $a$ называется [1]

$$\delta(a, f) = \lim_{r \to \infty} \frac{m(r, a, f)}{T(r, f)}.$$

В работе [2] установлено такое утверждение о связи между величинами отклонений мероморфных функций и величинами их дефектов.

**Теорема Г.** *Если $f(z)$ — мероморфная при $z \neq \infty$ функция конечного нижнего порядка $\lambda$, то*

$$D(f) \subseteq \Omega(f) \subseteq V(f),$$

*где $D(f)$ — множество неванлинновских дефектных значений функции $f(z)$ и $V(f)$ — множество ее дефектных значений в смысле Ж. Валирона.*

Из этого утверждения следует, что если для некоторого $a$

$$\Delta(a, f) = 0, \text{ то и } \beta(a, f) = 0.$$

Кроме того, для мероморфной функции нулевого нижнего порядка известно, что (см. [9, стр 284]). $\beta(a, f) \leqslant \Delta(a, f)$. Справедливо такое утверждение.

**Теорема 2.** *Если $f(z)$ — мероморфная при $z \neq \infty$ функция нижнего порядка $\lambda$, то**

---

* Имеется в виду логарифмическая емкость (см. [1, стр. 123]).

* Буквы $K$ с индексами всюду означают положительные абсолютные постоянные.

$$\beta(a,\ f) \leqslant \pi\lambda\sqrt{2\Delta(a,\ f) + \Delta^2(a,\ f)},\ \text{если}\ \lambda \geqslant \frac{1}{3},$$

$$\beta(a,\ f) \leqslant \pi\lambda\sqrt{2\Delta(a,\ f) + \Delta^2(a,\ f)} + K_1\Delta(a,\ f) \quad 0 < \lambda < \frac{1}{3},$$

$\beta(a,\ f) \leqslant \Delta(a,\ f)$, если $\lambda = 0$, *для любого $a$ из расширенной комплексной плоскости.*

Причем, для случая $\lambda > 1$ оценка точная в следующем смысле.

**Теорема 3.** *Для любых чисел $\lambda > 1$, $\varkappa > 0$, $a \neq \infty$ существует мероморфная функция конечного нижнего порядка $\lambda$, для которой*

$$\beta(a,\ f) \geqslant \pi\lambda\sqrt{\Delta(a,\ f)}\cdot\cos\frac{\varkappa\lambda}{4}.$$

Заметим, что теорема 3 следует из асимптотик, полученных для функции $f(z) = F_{\varkappa,\,\lambda,\,a}(z)$ в работе [10, § 5].

**Теорема 4.** *Для любых чисел $0 \leqslant \rho \leqslant \infty$, $0 < \delta_0 \leqslant 1$ и $a$ из расширенной комплексной плоскости существует мероморфная функция $f(z)$ порядка $\rho$, для которой*

$$\delta(a,\ f) = \beta(a,\ f) = \delta_0.$$

**2.** Доказательство теоремы 1. Рассмотрим функцию

$$G_n(z) = \prod_{k=n^{\frac{1}{\theta}}}^{\infty} \frac{1 - \dfrac{z}{a_k i}}{1 + \dfrac{z}{a_k i}}, \tag{2.1}$$

где

$$\theta = \frac{1}{2m+1},\quad m = 4,\ 5,\ \ldots,\quad a_k = e^{k^\theta},\quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Положим для действительного числа $x$

$$x^+ = \max(0,\ x).$$

Очевидно,

$$n(r,\ 0,\ G_n) = n(r,\ \infty,\ G_n) = k(r) = \{[\ln^{\frac{1}{\theta}} r] - n^{\frac{1}{\theta}}\}^+,$$

$$\ln^{\frac{1}{\theta}} r - n^{\frac{1}{\theta}} - 1 \leqslant k(r) \leqslant \ln^{\frac{1}{\theta}} r - n^{\frac{1}{\theta}},\quad r \geqslant e^n. \tag{2.2}$$

Отметим следующие свойства функции $G_n(z)$.

Если $\pi \leqslant \arg z \leqslant 2\pi$, то

$$1 \leqslant |G_n(z)| \leqslant |G_1(z)|. \tag{2.3}$$

Если $\psi = \pi - \varphi$, то

$$\ln|G_n(re^{i\varphi})| = \ln|G_n(re^{i\psi})|. \tag{2.4}$$

Действительно, если $\psi = \pi - \varphi$, тогда

$$G_n(re^{i\varphi}) = \prod_{k=n^{\frac{1}{\theta}}}^{\infty} \frac{1 + \dfrac{re^{-i\psi}}{a_k i}}{1 - \dfrac{re^{-i\psi}}{a_k i}} = \overline{G_n(re^{i\psi})}.$$

*Лемма 2.1. Для функции $G_n(z)$ справедливы такие оценки ($z = re^{i\varphi}$):*

$$\ln|G_n(z)| \leqslant \frac{\pi(\varphi - \pi)}{\theta}\ln^{\frac{1}{\theta}-1} r\left(1 + \frac{C_1}{\ln^2 r}\right) + \frac{8}{\varepsilon^2},$$

$$r > r_0(\theta),\ \pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi - \varepsilon, \tag{2.5}$$

$$\ln|G_n(z)| \geqslant \frac{\pi(\varphi-\pi)}{\theta}\ln^{\frac{1}{\theta}-1} r\cdot C(n,\ r)\left(1+\frac{C_2}{\ln^2 r}\right)-\frac{4}{\varepsilon^2},$$

$$r>e^n,\ \pi<\varphi<\frac{3}{2}\pi-\varepsilon, \tag{2.6}$$

*где $C_i$ означают положительные постоянные, зависящие лишь от рассматриваемой функции.*

Доказательство. Имеем $\left(\pi<\arg z=\varphi<\frac{3}{2}\pi-\varepsilon\right)$

$$\ln|G_n(z)|=\sum_{k=n^{\frac{1}{\theta}}}^{\infty}\ln\left|\frac{a_k i-z}{a_k i+z}\right|=\int_{n^{\frac{1}{\theta}}}^{\infty}\ln\left|\frac{ti-z}{ti+z}\right|dk(t)=$$

$$=k(t)\ln\left|\frac{ti-z}{ti+z}\right|\Bigg|_{n^{\frac{1}{\theta}}}^{\infty}-\frac{1}{2}\int_{n^{\frac{1}{\theta}}}^{\infty}\frac{(t^2-r^2)\,4r\sin\varphi\quad k(t)\,dt}{t^4+2t^2r^2\cos 2\varphi+r^4}=$$

$$=2r\sin\varphi\int_{e^n}^{\infty}\frac{(r^2-t^2)\,k(t)\,dt}{t^4+2t^2r^2\cos 2\varphi+r^4}. \tag{2.7}$$

Поэтому

$$\left|\ln|G_1(z)|-2r\sin\varphi\int_e^{\infty}\frac{(r^2-t^2)\ln^{\frac{1}{\theta}}t\,dt}{r^4+2t^2r^2\cos 2\varphi+t^4}\right|\leqslant 4|\sin\varphi|\int_0^{\infty}\frac{|1-s^2|\,ds}{1+2s^2\cos 2\varphi+s^4}\leqslant$$

$$\leqslant 8\int_1^{\infty}\frac{(s^2-1)\,ds}{(s^2-1)^2+4s^2\cos^2\varphi}\leqslant 8\int_1^{\infty}\frac{ds}{s^2-1+\frac{s^2\varepsilon^2}{s^2-1}}\leqslant\frac{8}{\varepsilon^2}.$$

Отсюда

$$0<\ln|G_1(r)|\leqslant 2r\sin\varphi\int_e^{\infty}\frac{(r^2-t^2)\ln^{\frac{1}{\theta}}t\,dt}{r^4+2t^2r^2\cos 2\varphi+t^4}+\frac{8}{\varepsilon^2}\leqslant$$

$$\leqslant 2r\sin\varphi\int_0^{\infty}\frac{(r^2-t^2)\ln^{\frac{1}{\theta}}t\,dt}{r^4+2t^2r^2\cos 2\varphi+t^4}+\frac{8}{\varepsilon^2}=2\sin\varphi\int_0^{\infty}\frac{(1-s^2)\ln^{\frac{1}{\theta}}rs\,ds}{1+2s^2\cos 2\varphi+s^4}+\frac{8}{\varepsilon^2}=$$

$$=2\sin\varphi\left[\frac{1}{\theta}\ln^{\frac{1}{\theta}-1}r\cdot\int_0^{\infty}\frac{(1-s^2)\ln s\,ds}{1+2s^2\cos 2\varphi+s^4}+\cdots+\int_0^{\infty}\frac{(1-s^2)\ln^{\frac{1}{\theta}}s\,ds}{1+2s^2\cos 2\varphi+s^4}\right]+\frac{8}{\varepsilon^2}\leqslant$$

$$\leqslant 2\sin\varphi\cdot\frac{1}{\theta}\ln^{\frac{1}{\theta}-1}r\int_0^{\infty}\frac{(1-s^2)\ln s\,ds}{1+2s^2\cos 2\varphi+s^4}\cdot\left(1+\frac{C_1}{\ln^2 r}\right)+\frac{8}{\varepsilon^2},\quad r>r_0(\theta),$$

где

$$C_1=\frac{3}{4}\pi^3\left(\frac{1}{\theta}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{\theta}-2\right).$$

Для $I=\int\limits_0^\infty \frac{(1-s^2)\ln s ds}{1+2s^2\cos 2\varphi+s^4}$ получаем с помощью контурного интегрирования, $\left(\pi<\varphi<\frac{3}{2}\pi-\varepsilon\right)$

$$I=\frac{\pi(\varphi-\pi)}{2\sin\varphi}.$$

Поэтому, воспользовавшись свойством (2.3), получаем оценку (2.5). Воспользовавшись свойством (2.4), из (2.5) будем иметь

$$\ln|G_n(z)|\leqslant-\frac{\pi\varphi}{\theta}\ln^{\frac{1}{\theta}-1} r\left(1+\frac{C_1}{\ln^2 r}\right)+\frac{8}{\varepsilon^2},$$

$$r>r_0(\theta),\quad 0>\varphi>-\frac{\pi}{2}+\varepsilon. \tag{2.8}$$

Докажем теперь оценку (2.6).

Воспользовавшись (2.7), имеем с учетом (2.2)

$$\left|\ln|G_n(z)|-2r\sin\varphi\int\limits_{e^n}^\infty\frac{(r^2-t^2)(\ln^{\frac{1}{\theta}}t-n^{\frac{1}{\theta}})\,dt}{r^4+2t^2r^2\cos 2\varphi+t^4}\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_0^\infty\frac{|1-s^2|\,ds}{s^4+2s^2\cos 2\varphi+1}\leqslant\frac{4}{\varepsilon^2},\qquad \pi<\varphi<\frac{3}{2}\pi-\varepsilon.$$

Отсюда, $(r>e^n)$

$$\ln|G_n(z)|\geqslant 2r\sin\varphi\int\limits_{e^n}^\infty\frac{(r^2-t^2)(\ln^{\frac{1}{\theta}}t-n^{\frac{1}{\theta}})\,dt}{r^4+2t^2r^2\cos 2\varphi+t^4}-\frac{4}{\varepsilon^2}=2\sin\varphi\Bigg[(\ln^{\frac{1}{\theta}}r-n^{\frac{1}{\theta}})\times$$

$$\times\int\limits_{\frac{e^n}{r}}^\infty\frac{(1-s^2)\,ds}{s^4+2s^2\cos 2\varphi+1}+\frac{1}{\theta}\ln^{\frac{1}{\theta}-1}r\int\limits_{\frac{e^n}{r}}^\infty\frac{(1-s^2)\ln s\cdot ds}{s^4+2s^2\cos 2\varphi+1}+$$

$$+\frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{\theta}-1\right)\frac{1}{2!}\ln^{\frac{1}{\theta}-2}r\cdot\int\limits_{\frac{e^n}{r}}^\infty\frac{(1-s^2)\ln^2 s ds}{s^4+2s^2\cos 2\varphi+1}+\cdots+\int\limits_{\frac{e^n}{r}}^\infty\frac{(1-s^2)\ln^{\frac{1}{\theta}}s ds}{s^4+2s^2\cos 2\varphi+1}\Bigg]-$$

$$-\frac{4}{\varepsilon^2}\geqslant 2\sin\varphi\cdot\frac{1}{\theta}\ln^{\frac{1}{\theta}}r\int\limits_{\frac{e^n}{r}}^\infty\frac{(1-s^2)\ln s ds}{s^4+2s^2\cos 2\varphi+1}+2\sin\varphi\cdot\frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{\theta}-1\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\theta}-2\right)\frac{1}{3!}\ln^{\frac{1}{\theta}-3}r\int\limits_{\frac{e^n}{r}}^\infty\frac{(1-s^2)\ln^3 s ds}{s^4+2s^2\cos 2\varphi+1}-\frac{4}{\varepsilon^2}\geqslant\frac{\pi(\varphi-\pi)}{\theta}\ln^{\frac{1}{\theta}-1}r\times$$

$$\times C(n,r)\left(1+\frac{C_2}{\ln^2 r}\right)-\frac{4}{\varepsilon^2},$$

где

$$C(n,r)=1-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{e^n}{r}}\frac{\ln\frac{1}{s}}{1-s^2}ds,$$

$$C_2 = \frac{1}{24}\left(\frac{1}{\theta} - 1\right)\left(\frac{1}{\theta} - 2\right),$$

причем $C(n, r)$ обладает следующими свойствами: $(r > 4e^n)$:

$$1)\ 0 < C(n, r) < 1;\ 2)\ C(n, r) \to 1, \quad r \to \infty,$$

$n$ — фиксированное.

Лемма доказана.

*Лемма 2.2. Справедлива оценка*

$$T(r, G_n) \leqslant C_3 \ln^{\frac{1}{\theta}+1} r, \quad r > r_0(\theta).$$

Доказательство. Из (2.2) имеем

$$N(r, G_n) = \int_0^r \frac{k(t)}{t}\, dt \leqslant C_4 \ln^{\frac{1}{\theta}+1} r, \tag{2.9}$$

$$m(r, G_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |G_n(re^{i\varphi})|\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} \sum_{k=n^{\frac{1}{\theta}}}^{\infty} \ln\left|\frac{a_k i - re^{i\varphi}}{a_k i + re^{i\varphi}}\right| d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{a_k \leqslant 2r} \frac{1}{2}\int_\pi^{2\pi} \ln\frac{r^2 + a_k^2 - 2ra_k \sin\varphi}{r^2 + a_k^2 + 2ra_k \sin\varphi}\, d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi}\left(\sum_{a_k > 2r} \ln\frac{a_k + r}{a_k - r}\right) d\varphi.$$

Так как

$$\int_\pi^{2\pi} \ln\frac{r^2 + a_k^2 - 2ra_k \sin\varphi}{r^2 + a_k^2 + 2ra_k \sin\varphi}\, d\varphi = \int_\pi^{2\pi} \ln\frac{1 + \left(\frac{a_k}{r}\right)^2 - 2\frac{a_k}{r}\sin\varphi}{1 + \left(\frac{a_k}{r}\right)^2 + 2\frac{a_k}{r}\sin\varphi}\, d\varphi \leqslant K_2,$$

$$\sum_{a_k > 2r} \ln\frac{a_k + r}{a_k - r} \leqslant \sum_{a_k > 2r} \frac{4r}{a_k} \leqslant 4r\int_r^\infty \frac{dk(t)}{t} \leqslant 4r\int_r^\infty \frac{\ln^{\frac{1}{\theta}} t}{t^2}\, dt \leqslant C_5 \ln^{\frac{1}{\theta}} r,\ r > r_0(\theta),$$

то

$$m(r, G_n) \leqslant \frac{1}{4\pi} K_2 k(2r) + \frac{1}{2} C_5 \ln^{\frac{1}{\theta}} r \leqslant C_6 \ln^{\frac{1}{\theta}} r,\ r > r_0(\theta). \tag{2.10}$$

Оценки (2.9) и (2.10) дают

$$T(r, G_n) \leqslant C_7 \ln^{\frac{1}{\theta}+1} r,\ r > r_0(\theta).$$

Лемма доказана.

Приступим теперь к построению необходимой функции нулевого нижнего порядка.

Искомая функция является примером типа примеров А. А. Гольдберга (см. [2, 5]).

Пусть $\{b_\nu\}$ — счетное множество точек комплексной плоскости, $|b_\nu| \leqslant \leqslant K_3 < \infty$; $c_\nu = \frac{1}{\nu^2}$; $\nu = 1, 2, \ldots$; $\eta_k = \frac{6}{\pi^2 k^2}$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k = 1 \text{ и } \eta_{k+1} \geqslant \frac{1}{4}\eta_k; \quad \theta_\nu = \pi \sum_{k=1}^{\nu} \eta_k$$

(тогда $\theta_\nu \to \pi$ при $\nu \to \infty$).

Положим

$$f(z) = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} c_\nu b_\nu G_\nu(ze^{-i\theta_\nu})}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} c_\nu G_\nu(ze^{-i\theta_\nu})} = \frac{f_1(z)}{f_2(z)},$$

где $G_\nu(z)$ определяется соотношением (2.1).

***Лемма 2.3.*** *Справедлива оценка*

$$T(r, f) \leqslant C_8 \ln^{\frac{1}{\theta}+2} r.$$

Доказательство. Мы имеем при фиксированном $r > r_0(\theta)$

$$f_1(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu b_\nu G_\nu(ze^{-i\theta_\nu}) = \sum_{\nu=1}^{2[\ln r]-1} c_\nu b_\nu G_\nu(ze^{-i\theta_\nu}) +$$

$$+ \sum_{2[\ln r]}^{\infty} c_\nu b_\nu G_\nu(ze^{-i\theta_\nu}) = f_1^{(1)}(z) + f_1^{(2)}(z).$$

По лемме 2.2.

$$T(r, f_1^{(1)}) \leqslant C_9 \ln^{\frac{1}{\theta}+2} r, \; r > r_0(\theta). \tag{2.11}$$

Оценим теперь $T(r, f_1^{(2)})$

$$G_\nu(z) = \prod_{k=\nu^{\frac{1}{\theta}}}^{\infty} \frac{1 - \frac{z}{a_k i}}{1 + \frac{z}{a_k i}} = \prod_{p=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{z}{a_p(\nu) i}}{1 + \frac{z}{a_p(\nu) i}},$$

где $a_p(\nu) = a_{\nu^{\frac{1}{\theta}}+p-1}$.

Поскольку в этом случае $a_1(2[\ln r)] > \frac{r^2}{e^2} > 2r$; $\nu \geqslant 2[\ln r]$, то

$$N(r, f_1^{(2)}) = 0$$

и

$$\ln|G_\nu(re^{i\varphi})| \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} \ln \frac{1 + \frac{z}{a_p(\nu)}}{1 - \frac{z}{a_p(\nu)}} \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} \frac{4r}{a_p(\nu)} = 4r \int_{e^\nu}^{\infty} \frac{dk(t)}{t} \leqslant$$

$$\leqslant 4r \int_{e^\nu}^{\infty} \frac{\ln^{\frac{1}{\theta}} t}{t^2} dt \leqslant C_{10} \frac{r}{e^\nu} \ln^{\frac{1}{\theta}} e^\nu = C_{10} \frac{r \nu^{\frac{1}{\theta}}}{e^\nu} \leqslant C_{11}.$$

Поэтому

$$T(r, f_1^{(2)}) \leqslant C_{12}.$$

Отсюда и из (2.11) получаем

$$T(r, f_1) \leqslant C_{13} \ln^{\frac{1}{\theta}+2} r, \quad r > r_0(\theta).$$

Аналогично

$$T(r, f_2) \leqslant C_{13} \ln^{\frac{1}{\theta}+2} r,$$

и поскольку

$$T(r, f) \leqslant T(r, f_1) + T(r, f_2),$$

то лемма доказана.

Займемся теперь оценкой величин отклонений. При фиксированном $n$ мы имеем

$$f(z) - b_n = \frac{\sum\limits_{\nu \neq n} c_\nu (b_\nu - b_n) G_\nu (ze^{-i\theta_\nu})}{c_n G_n (ze^{-i\theta_n}) + \sum\limits_{\nu \neq n} c_\nu G_\nu (ze^{-i\theta_\nu})},$$

$$|f(z) - b_n| \leqslant \frac{\sum\limits_{\nu \neq n} c_\nu (|b_\nu| + |b_n|) \left| \dfrac{G_\nu (ze^{-i\theta_\nu})}{G_n (ze^{-i\theta_n})} \right|}{c_n - \sum\limits_{\nu \neq n} c_\nu \left| \dfrac{G_\nu (ze^{-i\theta_\nu})}{G_n (ze^{-i\theta_n})} \right|} \leqslant \frac{K_4 \sum\limits_{\nu \neq n} c_\nu P(\nu, n, z)}{c_n - \sum\limits_{\nu \neq n} c_\nu P(\nu, n, z)}, \qquad (2.12)$$

где

$$P(\nu, n, z) = \left| \frac{G_\nu (ze^{-i\theta_\nu})}{G_n (ze^{-i\theta_n})} \right|.$$

***Лемма 2.4.*** *Справедливо такое утверждение:*

$$\ln^+ M(r, b_n, f) \geqslant C_{14} \ln^{\frac{1}{\theta}-2} r, \quad r > r(n).$$

Доказательство. Оценим сначала $P(\nu, n, z)$ на луче $\varphi_n = \theta_n + \frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{6}\eta_n$. Заметим, что при $\nu > n$

$$\varphi_n - \theta_\nu \geqslant \theta_\nu - \theta_{n-1} + \frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{6}\eta_n = \frac{3}{2}\pi + \frac{5}{6}\pi\eta_n,$$

а при $\nu > n$

$$\varphi_n - \theta_\nu \leqslant \frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{6}\eta_n - \pi\eta_{n+1} \leqslant \frac{3}{2}\pi - \frac{5}{12}\pi\eta_n.$$

Кроме того, поскольку $\theta_1 = \frac{6}{\pi} > \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi}$, то

$$\varphi_n - \theta_\nu = \frac{3}{2}\pi - (\theta_\nu - \theta_n) - \frac{\pi}{6}\eta_n \geqslant \frac{3}{2}\pi - (\pi - \theta_1) - \frac{\pi}{6}\eta_1 > \pi.$$

Пусть

$$\pi < \varphi_n - \theta_\nu \leqslant \frac{3}{2}\pi - \frac{5}{12}\pi\eta_n, \quad r > \max\{r_0(\theta), 4e^n\}.$$

Воспользуемся для оценки $G_\nu(ze^{-i\theta_\nu})|$ соотношением (2.5), а для оценки $|G_n(ze^{-i\theta_n})|$ — (2.6), положив там $\varepsilon = \varepsilon_n = \frac{\pi}{12}\eta_n$,

$$P(\nu, n, z) \leqslant \exp\left\{ \frac{\pi\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5}{12}\pi\eta_n\right)}{\theta} \ln^{\frac{1}{\theta}-1} r \left(1 + \frac{C_1}{\ln^2 r}\right) + \frac{8}{\varepsilon_n^2} - \right.$$

$$-\frac{\pi\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\eta_n\right)}{\theta}\ln^{\frac{1}{\theta}-1}r\cdot C(n,r)\left(1+\frac{C_2}{\ln^3 r}\right)+\frac{4}{\varepsilon_n^2}\Bigg\}=$$

$$=\exp\left\{-\frac{\pi}{\theta}\left(1+\frac{C_2}{\ln^2 r}\right)\ln^{\frac{1}{\theta}-1}r\left[\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{5}{12}\pi\eta_n\right)\frac{\ln^2 r+C_1}{\ln^2 r+C_2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\eta_n\right)C(n,r)\right]+\frac{12}{\varepsilon_n^2}\right\}.$$

Возьмем $r(n)>r_0(\theta)$ и настолько большим, чтобы при $r\geqslant r(n)$

$$\frac{\ln^2 r+C_1}{\ln^2 r+C_2}<1+\frac{\eta_n}{6} \tag{2.13}$$

и

$$\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{5}{12}\pi\eta_n\right)\left(1+\frac{\eta_n}{6}\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\eta_n\right)C(n,r)\geqslant\frac{\pi}{12}\eta_n, \tag{2.14}$$

тогда

$$P(\nu,n,z)\leqslant\exp\left\{-\frac{\pi^2}{12\theta}\eta_n\ln^{\frac{1}{\theta}-1}r+\frac{12}{\varepsilon_n^2}\right\}\ \text{при}\ r\geqslant r(n). \tag{2.15}$$

Оценим $r(n)$ снизу.

Поскольку $(r>4e^n)$ $C(n,r)=1-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{e^n}{r}}\frac{\ln\frac{1}{s}}{1-s^2}ds>1-\frac{32}{15\pi}\frac{e^n}{r}\left(\ln\frac{r}{e^n}+1\right)$

и $\dfrac{\frac{\pi}{12}\eta_n+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5}{12}\pi\eta_n\right)\left(1+\frac{\eta^n}{6}\right)}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\eta_n}<1-\frac{1}{\pi^2n^2-2}$, то для выполнения (2.14) достаточно, чтобы $\frac{16}{15}\frac{e^n}{r}\left(\ln\frac{r}{e^n}+1\right)<\frac{1}{\pi^2n^2-2}$.

Отсюда $r(n)\geqslant e^{32n}$.

Аналогично из (2.13) находим, что

$$r(n)\geqslant e^{n\pi\sqrt{C_1-C_2}}=e^{nl},$$

где

$$l^2=\pi^2(C_1-C_2)=\left(\frac{1}{\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\theta}-2\right)\pi^2\times$$

$$\times\left(\frac{3}{4}\pi^3-\frac{1}{24}\right)>\left(\frac{1}{\theta}-2\right)^2\cdot 13. \tag{2.16}$$

Поэтому

$$r(n)=\max[r_0(\theta),\ e^{nl}]. \tag{2.17}$$

Пусть теперь $2\pi>\varphi_n-\theta_\nu\geqslant\frac{3}{2}\pi+\frac{5}{6}\pi\eta_n$, тогда $0>\varphi_n-\theta_\nu-2\pi\geqslant-\frac{\pi}{2}+\frac{5}{6}\pi\eta_n$ и в силу (2.8) получаем аналогично, как и при доказательстве оценки (2.15)

$$P(\nu, n, z) \leqslant \exp\left\{-\frac{\pi^2}{12\theta}\eta_n \ln^{\frac{1}{\theta}-1} r + \frac{12}{\varepsilon_n^2}\right\}$$

*при $r > r(n)$, где $r(n)$ определяется соотношением (2.17).*

Таким образом, для всех $\nu \neq n$ и $r > r(n)$

$$P(\nu, n, z) \leqslant \exp\left\{-C_{15}\eta_n \ln^{\frac{1}{\theta}-1} r + \frac{12}{\varepsilon_n^2}\right\}, \tag{2.18}$$

где $C_{15} = \frac{\pi^2}{12\theta}$, а $r(n)$ определяется соотношением (2.17). Так как при $r > r(n)$

$$\eta_n = \frac{6}{\pi^2 n^2} > \frac{e^2 6}{\pi^2 \ln^2 r}; \quad \frac{1}{\varepsilon^2} = 4\pi^2 n^4 < \ln^4 r; \quad c_n = \frac{1}{n^2} > \frac{e^2}{\ln^2 r},$$

то из (2.12) с учетом (2.18) будем иметь

$$|f(z) - b_n| \leqslant \frac{K_5 \exp\left\{-C_{16} \ln^{\frac{1}{\theta}-3} r\right\}}{\frac{l^2}{\ln^2 r} - \frac{\pi^2}{6}\exp\left\{-C_{16} \ln^{\frac{1}{\theta}-3} r\right\}} \leqslant K_5 \exp\left\{-C_{17} \ln^{\frac{1}{\theta}-3} r\right\} \tag{2.19}$$

$$\ln M(r, b_n, f) \geqslant C_{18} \ln^{\frac{1}{\theta}-3} r, \quad r > r(n).$$

Лемма доказана.

Следствие. *При любом* $0 < \alpha < 1$ существует мероморфная функция $f(z)$ нулевого нижнего порядка такая, что $\beta_a(b_n, f) = \infty$, $n = 1, 2 \ldots$.

Действительно, воспользовавшись леммами 2.3 и 2.4, будем иметь

$$\beta_\alpha(b_n, f) = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln^+ M(r, b_n, f)}{T^\alpha(r, f)} \geqslant \lim_{r\to\infty} \frac{C_{19} \ln^{\frac{1}{\theta}-3} r}{\ln^{\alpha\left(\frac{1}{\theta}+2\right)} r} = \infty,$$

если взять $\theta < \frac{1-\alpha}{3+2\alpha}$.

Для завершения доказательства теоремы 1 рассмотрим множество действительных чисел, допускающих представление

$$C = \left\{a : a = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\exp\theta(k)}\right\}, \text{ где } \theta(k) = \exp\exp k,$$

$\gamma_k$ принимает независимо значения 0 и 1, причем 1 — бесконечное число раз, $C$ имеет мощность континуума [2, стр. 1334]. Очевидно,

$$\theta(n) - \theta(k+1) - n + k > 0, \quad n \geqslant k+2, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.20}$$

Между множеством натуральных чисел $n = \sum_{k=1}^{q(n)} \gamma_k 2^{k-1}$ и множеством $B = \left\{b_n : b_n = 1 + \sum_{k=1}^{q(n)} \frac{\gamma_k}{\exp\theta(k)}\right\}$ устанавливается взаимно-однозначное соответствие.

Представление числа $a$ порождает подпоследовательность натуральных чисел $n_q(a) = \sum_{k=1}^{q} \gamma_k(a) 2^{k-1}$.

Поскольку 1 встречается в представлении $a$ бесконечное число раз, то $n_q(a) \to \infty$.

Зафиксируем некоторое $a \in C$. Оценим приближение $f(z)$ к $a$, если в построении функции $f(z)\{b_\nu\} = B$; $r_0(\theta)$ будем считать таковым, что для $r > r_0(\theta)$

$$C_{17} \ln^{\frac{1}{\theta}-3} r > r^{\frac{1}{l}}. \tag{2.21}$$

Возьмем теперь $r_0(a) > r_0(\theta)$ и настолько большим, чтобы в последовательности $\{n_q(a)\}$ имелся хотя бы один член $n_{q_1}(a) \neq 0$ и $n_{q_1}(a) \leqslant \frac{1}{2l} \ln r$ при $r \geqslant r_0(a)$, где $l$ определяется соотношением (2.16).

Зафиксируем некоторое $r \geqslant r_0(a)$. Обозначим $n_p(a) = \min\left\{n_q(a) : n_q(a) \geqslant \frac{1}{2l} \ln r\right\}$.

Возможны два случая:

1. $\frac{1}{2l} \ln r \leqslant n_p(a) \leqslant \frac{1}{l} \ln r$.

Имеем

$$|f(z) - a| \leqslant |f(z)| - b_{n_p(a)}| + |b_{n_p(a)} - a|. \tag{2.22}$$

Поскольку $r \geqslant e^{n_p(a)l}$, то имеет место (2.19), т. е. на луче $\arg z = \varphi_{n_p(a)}$

$$|f(z) - b_{n_p(a)}| \leqslant K_6 \exp\left\{-C_{17} \ln^{\frac{1}{\theta}-3} r\right\}.$$

Для второго слагаемого в (2.22) имеем:

$$a - b_{n_p(a)} = \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{\gamma_k(a)}{\exp\theta(k)} \leqslant \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{exp\,\theta(k)} =$$

$$= \frac{1}{\exp\theta(p+1)}\left(1 + \sum_{k=p+2}^{\infty} \frac{1}{\exp[\theta(k) - \theta(p+1)]}\right).$$

Воспользуемся (2.20), тогда

$$a - b_{n_p(a)} \leqslant \frac{1}{\exp\theta(p+1)}\left[1 + \sum_{k=p+2}^{\infty} \frac{1}{\exp(k-p)}\right] =$$

$$= \frac{1}{\exp\theta(p+1)}\left[1 + \frac{1}{e(e-1)}\right] \leqslant \frac{3}{2\exp\theta(p+1)}. \tag{2.23}$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{2l} \ln r \leqslant \sum_{k=1}^{p} \gamma_k 2^{k-1} \leqslant \sum_{k=1}^{p} 2^{k-1} = 2^p - 1,$$

$$p + 1 > \ln\ln r - \ln l,$$

$$\theta(p+1) > r^{\frac{1}{l}},$$

тогда из (2.23) имеем

$$a - b_{n_p(a)} \leqslant \frac{3}{2\exp r^{\frac{1}{l}}}.$$

Поэтому с учетом (2.22) и (2.21) будем иметь

$$|f(z)-a|\leqslant C_{20}\exp\left\{-C_{17}\ln^{\frac{1}{\theta}-3}r\right\}.$$

Таким образом, $$\ln M(r,a,f)\geqslant C_{21}\ln^{\frac{1}{\theta}-3}r.$$

2. Пусть теперь $n_p(a)>\frac{1}{l}\ln r$, тогда, если $n_j(a)$—максимальный из членов, которые $n_q(a)<n_p(a)$, то $n_j(a)<\frac{1}{2l}\ln r$. В этом случае оцениваем приближение $f(z)$ к $a$ при $\arg z=\varphi_{n_j(a)}$,

$$|f(z)-a|\leqslant|f(z)-b_{n_j(a)}|+|b_{n_j(a)}-a|.$$

Так же, как и в первом случае,

$$|f(z)-b_{n_j(a)}|\leqslant K_5\exp\left\{-C_{17}\ln^{\frac{1}{\theta}-3}r\right\},$$

$$a-b_{n_j(a)}=\sum_{k=p}^{\infty}\frac{\gamma_k(a)}{\exp\theta(k)}\leqslant\frac{3}{2\exp\theta(p)}\leqslant\frac{3}{2\exp r^{\frac{1}{l}}}.$$

Таким образом, и в этом случае

$$\ln M(r,a,f)\geqslant C_{21}\ln^{\frac{1}{\theta}-3}r.$$

А значит,

$$\beta_\alpha(a,f)=\infty,$$

если

$$\theta<\frac{1-\alpha}{3+2\alpha}.$$

Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 2.

Пусть сначала $f(z)$ — мероморфная функция нерегулярного роста нижнего порядка $\lambda\geqslant\frac{1}{2}\left(\text{т. е. у нас }\frac{1}{2}\leqslant\lambda<\rho\leqslant\infty\right)$. Не уменьшая общности будем считать $f(0)=1$. Пусть $\varepsilon>0$ и таково, что $\lambda+\varepsilon=\gamma<\rho$. Будем исходить из соотношения (см. [11,стр. 426—427])

$$\ln^+M(r,f)\leqslant(2x)^2r^{2x}\int_0^R\frac{m(t,f)\,t^{2x-1}}{(t^{2x}+r^{2x})^2}dt+\sum_{|b_k|\leqslant kR}\ln\left|\frac{r^{2x}+|b_k|^{2x}}{r^{2x}-|b_k|^{2x}}\right|+$$
$$+K_7x\left(\frac{r}{R}\right)^{2x}\{T(2kR,f)+T_1(2kR,f)\}+C_{22},\qquad(3.1)$$

где $b_k$ — полюсы $f(z)$, $T_1(r,f)=\int_1^r\frac{T(s,f)}{s}ds$, $k>1$,

$x$ — любое действительное число, большее $\gamma$, $x_1=x(1+\varepsilon)$. Пусть

$$\Delta(\infty,f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{m(r,f)}{T(r,f)}>0,$$

тогда при $r > r_0$

$$m(r, f) \leqslant (\Delta(\infty, f) + \varepsilon) T(r, f) = \Delta_1 T(r, f). \tag{3.2}$$

Разделим обе части (3.1) на $r^{\gamma+1}$ и проинтегрируем от $r_0$ до $0,5\,R$, предварительно воспользовавшись (3.2). Имеем

$$\int_{r_0}^{0,5R} \frac{\ln^+ M(r, f)}{r^{\gamma+1}} dr \leqslant (2x)^2 \cdot \Delta_1 \int_{r_0}^{0,5R} T(t, f)\, t^{2x-1}\, dt \int_0^\infty \frac{r^{2x-\gamma-1}\, dr}{(t^{2x}+r^{2x})^2} +$$

$$+ \sum_{|b_k| \leqslant kR} \int_{r_0}^{0,5R} \ln\left|\frac{r^{2x}+|b_k|^{2x}}{r^{2x}-|b_k|^{2x}}\right| \frac{dr}{r^{\gamma+1}} + \frac{K_8 \cdot x \cdot T(2kR, f)\ln R}{R^{2x}} \int_{r_0}^{0,5R} \frac{dr}{r^{\gamma+1-2x}} + C_{23}. \tag{3.3}$$

Так как

$$I_1 = t^{2x-1} \int_0^\infty \frac{r^{2x-\gamma-1}}{(t^{2x}+r^{2x})^2} dr = \frac{1}{t^{\gamma+1}} \int_0^\infty \frac{s^{2x-\gamma-1}}{(1+s^{2x})^2} ds =$$

$$= \frac{1}{2xt^{\gamma+1}} \int_0^\infty \frac{du}{u^{\gamma/2x}(1+u)^2} = \frac{\pi\gamma}{(2x)^2\, t^{\gamma+1}} \frac{1}{\sin\frac{\pi\gamma}{2x}},$$

$$I_2 = \int_{r_0}^{0,5R} r^{-\gamma-1} \ln\left|\frac{r^{2x}+|b_k|^{2x}}{r^{2x}-|b_k|^{2x}}\right| dr \leqslant \frac{1}{|b_k|^\gamma} \int_0^\infty \ln\frac{s^{2x}+1}{|s^{2x}-1|} \times$$

$$\times \frac{ds}{s^{\gamma+1}} = \frac{|b_k|^{-\gamma}}{2x} \int_0^\infty \ln\frac{u+1}{|u-1|} \cdot \frac{du}{u^{\gamma/2x+1}} + 1 = \frac{\pi}{\gamma\,|b_k|}\gamma \operatorname{tg}\frac{\pi\gamma}{4x},$$

$$\sum_{|b_k| < kR} \frac{1}{|b_k|^\gamma} = \int_\varepsilon^{kR} \frac{1}{t^\gamma} dn(t, f) = n(t, f)\frac{1}{t^\gamma}\Big|_\varepsilon^{kR} + \gamma \int_\varepsilon^{kR} \frac{n(t, f)}{t^{\gamma+1}} dt =$$

$$= \frac{n(kR, f)}{(kR)^\gamma} + \gamma \frac{N(t, f)}{t^\gamma}\Big|_\varepsilon^{kR} + \gamma^2 \int_\varepsilon^{kR} \frac{N(t, f)}{t^{\gamma+1}} dt \leqslant$$

$$\leqslant C_{24} \frac{T(2kR, f)}{R^\gamma} + \gamma^2 \int_{r_0}^{0,5R} \frac{T(t, f)}{t^{\gamma+1}} dt + C_{25},$$

то из (3.3) находим

$$\int_{r_0}^{0,5R} \frac{\ln^+ M(r, f)}{t^{\gamma+1}} dr \leqslant \pi\gamma(1+\varepsilon)^2 \left(\frac{\Delta_1}{\sin\frac{\pi\gamma}{2x}} + \operatorname{tg}\frac{\pi\gamma}{4x}\right) \int_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r, f)}{r^{\gamma+1}} dr + C_{26} \frac{T(2kR, f)\ln R}{R^\gamma} + C_{27}. \tag{3.4}$$

Обозначим $\varphi(x, \Delta_1) = \dfrac{\Delta_1}{\sin\frac{\pi\gamma}{2x}} + \operatorname{tg}\dfrac{\pi\gamma}{4x}$. (3.4) верно при любом $x > \gamma$. Положим в (3.4)

$$\sin\frac{\pi\gamma}{2x} = \frac{\sqrt{\Delta_1^2 + 2\Delta_1}}{1+\Delta_1},$$

тогда

$$\varphi(\Delta_1) = \min_{x>\gamma} \varphi(x, \Delta_1) = \sqrt{\Delta_1^2 + 2\Delta_1}. \tag{3.5}$$

Поскольку $\lambda < \gamma < \rho$, то

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{T(r, f)}{r^{\gamma+1}}\, dr = \infty$$

и существует последовательность $R_j \to \infty$, что

$$\lim_{R_j \to \infty} \frac{T(2kR_j, f)}{R_j^{\gamma}} = 0.$$

Поэтому из (3.4) с учетом (3.5) имеем

$$\lim_{R \to \infty} \frac{\int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{\ln^+ M(r' f)}{r^{\gamma+1}}\, dr}{\int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r, f)}{r^{\gamma+1}}\, dr} \leqslant \pi\gamma(1+\varepsilon)^2 \sqrt{\Delta_1^2 + 2\Delta_1},$$

поэтому ($\varepsilon > 0$), произвольное

$$\beta(\infty, f) \leqslant \pi\lambda \sqrt{2\Delta(\infty, f) + \Delta^2(\infty, f)}. \qquad (3.6)$$

Пусть теперь $\lambda < \frac{1}{2}$. В этом случае положим в (3.1) $x \geqslant \frac{1}{2}$. Имеем

$$\varphi_x'(x, \Delta_1) = \frac{\pi\gamma}{4x^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi\gamma}{4x}} \left( \frac{\Delta_1}{2\sin^2 \frac{\pi\gamma}{4x}} - (\Delta_1 + 1) \right).$$

Рассмотрим следующие два случая:

1) $\varphi_x'(x, \Delta_1)$ обращается в нуль при некотором $x \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$, тогда аналогично, как и в случае $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$, получаем оценку (3.6).

Заметим, что случай 1) имеет место при любом $\lambda \geqslant \frac{1}{3}$. Действительно, при $\frac{1}{3} \leqslant \lambda < \frac{1}{2} \varphi_x'\left(\frac{1}{2}, \Delta_1\right) \leqslant 0$, а так как при больших $x\, \varphi_x'(x, \Delta_1) > 0$, то $\varphi_x'$ обращается в нуль при некотором $x \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.

Таким образом, при любом $\lambda \geqslant \frac{1}{3}$ справедлива оценка (3.6).

2) $\varphi_x'(x, \Delta_1) \neq 0$ при $x \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$. Тогда, поскольку при больших $x \varphi_x'(x, \Delta_1) > 0$, то и при всех $x \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \varphi_x'(x, \Delta_1)$ — положительная, т. е. $\varphi(x, \Delta_1)$ монотонно возрастает и минимальное значение принимает при $x = \frac{1}{2}$. Поэтому имеем

$$\beta(\infty, f) \leqslant \frac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda} \Delta(\infty, f) + \pi\lambda \operatorname{tg} \frac{\pi\lambda}{2}. \qquad (3.7)$$

Заметим, что $\varphi_x'(x, \Delta_1)$ может обратиться в 0 только в одной точке $x \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$, поэтому для выполнения случая 2) необходимо и достаточно, чтобы

$$\varphi_x'\left(\frac{1}{2}, \Delta_1\right) > 0 \quad \text{или} \quad \lambda < \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{\Delta(\infty, f)}{2(\Delta(\infty, f) + 1)}} \leqslant \frac{1}{3}.$$

Отсюда $\lambda < \sin\frac{\pi\lambda}{2} < \sqrt{\frac{\Delta(\infty, f)}{2(\Delta(\infty, f)+1)}}$ и из (3.7) будем иметь $\beta(\infty, f) \leqslant$ $\leqslant \frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})\Delta(\infty, f)$.

Окончательно имеем

$$\beta(\infty, f) \leqslant \pi\lambda\sqrt{2\Delta(\infty, f)+\Delta^2(\infty, f)}, \quad \frac{1}{3} \leqslant \lambda, < \infty$$

$$\beta(\infty, f) \leqslant \pi\lambda\sqrt{2\Delta(\infty, f)+\Delta^2(\infty, f)} + K_\rho\Delta(\infty, f) \quad 0 < \lambda < \frac{1}{3}.$$

$$\beta(\infty, f) \leqslant \Delta(\infty, f), \ \lambda = 0.$$

Теорема 2 доказана для мероморфных функций нерегулярного роста с $a = \infty$. При $a \neq \infty$ рассмотрим функцию (см. [11, стр. 428]) $f_1(z) = \frac{bz^k}{f(z)-a}$, где $k$ и $b$ определяются так, чтобы $f_1(0) = 1$. Поскольку $\beta(a, f) = \beta(\infty, f_1)$ и $\Delta(a, f) = \Delta(\infty, f_1)$, то теорема 2 доказана для любого $a$.

Для полного доказательства теоремы необходимо рассмотреть случай мероморфной функции регулярного роста (т. е. $\lambda = \rho < \infty$). В этом случае теорема получается аналогично с использованием понятия уточненного порядка [11, 12].

## 4. Доказательство теоремы 4

Для доказательства теоремы используем один прием А. А. Гольдберга [13].

Пусть $0 < \rho < \infty$. Положим

$$g(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2^k}\right)^{n_k}, \quad n_k = [2^{k\rho}] - [2^{(k-1)\rho}].$$

Обозначим $\nu(r)$ — число точек $r_k = 2^k$ в круге радиуса $r$. Как легко видеть,

$$\nu(r) = \left[\frac{\ln r}{\ln 2}\right],$$

$$n(r, o, g) = [2^\rho] - 1 + [2^{2\rho}] - [2^\rho] + \cdots + [2^{\nu(r)\rho}] - [2^{(\nu(r)-1)\rho}] =$$

$$= [2^{\nu(r)\rho}] - 1 = \left[2^{\left[\frac{\ln r}{\ln 2}\right]\rho}\right] - 1,$$

$$\frac{r^\rho}{2^\rho} - 2 \leqslant n(r) \leqslant r^\rho,$$

$$N(r, o, g) \leqslant m(r, g) = T(r, g) \leqslant \ln M(r, g) = \sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\left(\frac{r}{r_k}\right)^{n_k}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{r_k \leqslant r} n_k \ln\frac{r}{r_k} + \sum_{r_k \leqslant r}\ln\left(1+\frac{r_k}{r}\right) + \sum_{r_k > r}\ln\left(1+\frac{r}{r_k}\right) \leqslant$$

$$\leqslant N(r, o, g) + 2\sum_{k=0}^{\infty} 2^k = N(r, o, g) + 4. \qquad (4.1)$$

Положим

$$f(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{z}{r_k}\right)^{n_k}},$$

где

$$r_k=2^k,\ n_k=[\alpha 2^{k\rho}]-[\alpha 2^{(k-1)\rho}],\quad \alpha>0,$$

$$\nu(r)=\left[\frac{\ln r}{\ln 2}\right],$$

$$n(r,f)=[\alpha 2^{\nu(r)\rho}]-[\alpha]\leqslant \alpha 2^{\nu(r)\rho}-[\alpha]\leqslant \alpha[2^{\nu(r)\rho}]+\alpha-[\alpha],$$

$$\alpha n(r,0,g)-1\leqslant n(r,f)\leqslant \alpha n(r,0,g)+\alpha+1,$$

$$\alpha N(r,0,g)-\ln r\leqslant N(r,f)\leqslant \alpha N(r,0,g)+(\alpha+1)\ln r,$$

$$N(r,f)=\alpha N(r,0,g)(1+o(1)),$$

$$T(r,f)=T\left(r,\frac{1}{f}\right),$$

поэтому

$$T(r,f)\leqslant N(r,f)+O(1).$$

Отсюда

$$m(r,f)\leqslant O(1). \tag{4.2}$$

Оценим $\ln^+M(r,f)$ на последовательности $r_l'=\frac{r_l+r_{l+1}}{2}$,

$$\ln^+M(r_l',f)=\ln^+\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left|1-\left(\frac{r_l'}{r_k}\right)^{n_k}\right|}=\ln^+\prod_{k=1}^{\infty}\left|1-\left(\frac{r_l'}{r_k}\right)^{n_k}\right|-$$

$$-\ln\prod_{k=1}^{\infty}\left|1-\left(\frac{r_l'}{r_k}\right)^{n_k}\right|\leqslant \ln\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\left(\frac{r_l'}{r_k}\right)^{n_k}\right)-\sum_{r_k<r_l'}n_k\ln\frac{r_l'}{r_k}-$$

$$-\sum_{r_k<r_l'}\ln\left(1-\left(\frac{r_k}{r_l'}\right)^{n_k}\right)-\sum_{r_k>r_l'}\ln\left(1-\left(\frac{r_l'}{r_k}\right)^{n_k}\right)\leqslant N(r_l',f)+$$

$$+O(1)-N(r_l',f)-\ln\left(1-\frac{2^l\cdot 2}{2^l+2^{l+1}}\right)\nu(r_l')-$$

$$-\ln\left(1-\frac{2^l+2^{l+1}}{2\cdot 2^{l+1}}\right)-\sum_{k=l+2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{r_l'}{r_k}\right)\leqslant O(\ln r_l'). \tag{4.3}$$

Искомая функция есть

$$F(z)=g(z)+f(z).$$

Действительно,

$$T(r,F)=m(r,F)+N(r,F)=m(r,F)+N(r,f).$$

Воспользовавшись (4.1) и (4.2), будем иметь

$$m(r,F)\leqslant m(r,f)+m(r,g)+2\ln 2\leqslant N(r,o,g)+O(1),$$

$$m(r,F)\geqslant m(r,g)-m(r,f)\geqslant N(r,o,g)-O(1),$$

поэтому

$$\alpha N(r,o,g)+N(r,o,g)-O(1)\leqslant T(r,F)\leqslant \alpha N(r,o,g)+N(r,o,g)+O(1),$$

$$\delta(\infty,F)=\lim_{r\to\infty}\frac{m(r,F)}{T(r,F)}=\frac{1}{1+\alpha}.$$

Из (4.1) и (4.3) имеем

$$\ln^+ M(r_i', F) \leqslant \ln^+ M(r_i', g) + \ln^+ M(r_i', f) + \ln 2 \leqslant N(r_i', o, g) + O(\ln r_i').$$

Отсюда

$$\beta(\infty, F) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln^+ M(r, F)}{T(r, T)} \leqslant \varliminf_{r_i'\to\infty} \frac{\ln^+ M(r_i', F)}{T(r_i', F)} \leqslant \frac{1}{1+\alpha}.$$

А поскольку $\beta(\infty, F) \geqslant \delta(\infty, F)$, то получим

$$\beta(\infty, F) = \delta(\infty, F) = \frac{1}{1+\alpha} = \delta_0,\ 0 < \delta_0 < 1.$$

Для $\delta_0 = 1$ положим $F(z) = g(z)$, тогда очевидно из (4.1)

$$\beta(\infty, F) = \delta(\infty, F) = 1.$$

Для $\rho = 0$ и $\rho = \infty$ теорема получается аналогично, если для $\rho = 0$ положить

$$g(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{2^k}\right); \quad f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{z}{2^{k\alpha}}},\ F(z) = g(z) + f(z),$$

а для $\rho = \infty$

$$g(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \left(\frac{z}{2^k}\right)^{n_k}\right);\ n_k = 2^{2^k} - 2^{2^{k-1}},$$

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{z}{2^k}\right)^{n_k}},\ n_k = [\alpha 2^{2^k}] - [\alpha 2^{2^{k-1}}],\ \alpha > 0,$$

$$F(z) = g(z) + f(z).$$

Выражаю глубокую благодарность В. П. Петренко за постановку задач и помощь в процессе их разрешения.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции. М.—Л., Гостехиздат, 1941.
2. В. П. Петренко. Изучение структуры множества положительных отклонений мероморфных функций. Изв. АН СССР, серия математ., 33, № 6 (1969), 1330—1348.
3. В. П. Петренко. Величины отклонений мероморфных функций нижнего порядка меньше единицы. ДАН СССР, 187, № 1 (1969).
4. И. В. Островский. О дефектах мероморфных функций нижнего порядка меньше единицы. ДАН СССР, 150, № 1 (1963).
5. А. А. Гольдберг. О дефектах мероморфных функций. ДАН СССР, 98, № 3 (1954), 893—895.
6. Valiron G. Sur les valeurs déficientes des fonctions méromorphes dórdle nul, C. R. Acad. Sci. Paris, 230, 1950, 40—42.
7. В. П. Петренко. О структуре множества положительных отклонений мероморфных функций. ДАН СССР, 189, № 4 (1969).
8. Valiron G. Sur la distribution des valeurs des fonctions méromorphes Acta Mathematica, 47, 1926, 117—142.
9. В. П. Петренко. Рост мероморфных функций по лучу. ДАН СССР, 155, № 2 (1964).
10. В. П. Петренко. О росте мероморфных функций конечного нижнего порядка и величинах их дефектов. «Сибирск. матем. журн.» VIII, № 5, 1967.
11. В. П. Петренко. Рост мероморфных функций конечного нижнего порядка. Изв АН СССР, серия матем., 33, № 2 (1969), 414—454.
12. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, М., Гостехиздат, 1956.
13. А. А. Гольдберг. Три приклади цілих функцій. ДАН УРСР, № 4 (1963), 443—446.


*Поступила 25 мая 1970 г.*