ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

К. П. Кирчев

1. Введение

В настоящей работе будем рассматривать случайный процесс $x(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$ как кривую в сепарабельном гильбертовом пространстве H со скалярным произведением [1, 2]:

$$(x(t),\ x(s)) = Mx(t)\overline{x(s)}. \tag{1}$$

Корреляционная функция случайного процесса $x(t)$ определяется равенством $V(t,\ s) = (x(t),\ x(s))$.

Определение 1. *Функцию*

$$W(t,\ s) = -\frac{\partial}{\partial\tau} V(t+\tau,\ s+\tau)\Big|_{\tau=0} \tag{2}$$

будем называть инифинитезимальной корреляционной функцией случайного процесса $x(t)$.

Наибольший ранг r *всех квадратичных форм вида*

$$\sum_{\alpha,\ \beta=1}^{n} W(t_\alpha,\ t_\beta)\,\xi_\alpha\bar{\xi}_\beta \quad (n = 1, 2, \ldots - \infty < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty)$$

называется рангом нестационарности процесса $x(t)$.

Если $r = 0$, то процесс $x(t)$ является стационарный и общий вид его корреляционной функции известен [1, 2].

Определение 2. *Будем говорить, что случайный процесс* $x(t)$ *допускает линейное представление, если* $x(t) = e^{iAt}x(0)$, *где* A — *линейный ограниченный оператор, действующий в пространстве* H. *Для линейно представимого процесса* $x(t) = e^{iAt}x(0)$. М. С. Лившиц и А. А. Янцевич показали [7], что ранг нестационарности процесса $x(t)$ совпадает с рангом неэрмитовости ρ_A оператора A:

$$\rho_A = \dim\overline{(\operatorname{Im} A)\, H}.$$

М. С. Лившиц и А. А. Янцевич поставили следующую задачу: найти необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять заданная функция $V(t, s)$, чтобы она могла быть корреляционной функцией линейно представимого процесса ранга $r\,(0 < r \leqslant \infty)$. Эта задача была ими решена для диссипативных операторов A с невещественным спектром или со спектром, сосредоточенным в точке $\lambda = 0$ [7].

В настоящей работе результаты М. С. Лившица и А. А. Янцевича распространяются на более широкий класс диссипативных операторов с произвольным вещественным спектром.

Определение 3. *Случайный процесс* $x(t) = e^{iAt}x(0)$ *будем называть диссипативным процессом, если оператор* A *диссипативен* ($\operatorname{Im} A \geqslant 0$). *В этом случае*

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^{n} W(t_\alpha, t_\beta)\,\xi_\alpha\bar{\xi}_\beta \geqslant 0.$$

Определение 4. *Будем говорить, что линейный ограниченный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве* H, *принадлежит классу* $\Omega[\alpha(x)]$, *если* 1) $\operatorname{Im} A \geqslant 0$; 2) *спектр оператора* A *чисто вещественный*; 3) $sp(\operatorname{Im} A) < \infty$.

Рассмотрим характеристическую матрицу — функцию оператора A ($A \in \Omega[\alpha(x)]$)

$$w_A(\lambda) = E - i\,\|((A - \lambda E)^{-1} g_\alpha, g_\beta)\|\, I, \tag{3}$$

где $I = \|j_{\alpha\beta}\|$ — некоторая эрмитовая матрица, удовлетворяющая условию $I^2 = E$, а векторы $g_1, g_2, \ldots g_r \in H$ удовлетворяют соотношению

$$\frac{A - A^*}{i} f = \sum_{\alpha, \beta=1}^{r} (f, g_\alpha)\, j_{\alpha\beta} g_\beta \quad (f \in H). \tag{4}$$

Известно [3, 4], что детерминант характеристической матрицы функции имеет вид

$$\det(w_A(\lambda)) = e^{\,i\int\limits_0^l \frac{dx}{\lambda - \alpha(x)}} \quad (\lambda \,\overline{\in}\, [\alpha(0), \alpha(l)], \tag{5}$$

где $\alpha(x)$ — неубывающая функция на $[0, l]$.

Определение 5. *Будем говорить, что случайный процесс* $x(t)$ *принадлежит классу* $D^{(r)}[\alpha(x)]$ $(0 < \rho_A \leqslant r \leqslant \infty)$, *если*

1) $x(t)$ *— линейно представим* $x(t) = e^{iAt}x(0)$;

2) оператор $A \in \Omega[\alpha(x)]$.

2. О структуре предела $\lim\limits_{\tau \to \infty} V(t + \tau, s + \tau)$ для класса $D^{(1)}[\alpha(x)]$

1. **Лемма.** *Если оператор* A *является линейным ограниченным диссипативным оператором, действующим в гильбертовом пространстве* H, *то существует предел*

$$s.\lim_{\tau \to \infty} e^{-iA^*\tau} e^{iA\tau} = T, \tag{6}$$

где T — положительный ограниченный оператор, действующий в H. (Символ $s.\lim$ означает сильную сходимость).

Доказательство. Формула

$$\frac{d}{dt}(e^{iAt}\varphi, e^{iAt}\varphi) = -2\,((\operatorname{Im} A)\, e^{iAt}\varphi, e^{iAt}\varphi) \leqslant 0 \quad (\varphi \in H) \tag{7}$$

показывает, что неотрицательная оператор-функция $F_t^* F_t = e^{-iA^*t}e^{iAt}$ не возрастает, а это означает, что существует

$$s.\lim_{t \to \infty} F_t^* F_t = T.$$

Следствие 1. *Оператор T удовлетворяет следующим соотношениям:*

$$
\begin{gathered}
e^{-iA^*s}Te^{iAt} = Te^{iA(t-s)}, \\
e^{-iA^*t}T = Te^{-iAt}, \\
A^{*n}T = TA^n \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots).
\end{gathered} \tag{8}
$$

Следствие 2. *Для диссипативного случайного процесса $x(t)$ существует предел*

$$
\lim_{\tau\to\infty} V(t+\tau,\ s+\tau) = V_\infty(t-s) = (Te^{iA(t-s)}x(0),\ x(0)). \tag{9}
$$

Следствие 3. *Для инифинитезимальной корреляционной функции диссипативного процесса имеет место равенство*

$$
\lim_{\tau\to\infty} W(t+\tau,\ s+\tau) = 0. \tag{10}
$$

Следствия 1 и 2 очевидны, а для доказательства следствия (3) рассмотри соотношения

$$
\begin{gathered}
-W(t,\ s) = \frac{d}{d\tau}(e^{iA(t+\tau)}x(0),\ e^{iA(s+\tau)}x(0))\Big|_{\tau=0} = \\
= +\{(iAe^{iAt}x(0),\ e^{iAs}x(0)) + (e^{iAt}x(0),\ iAe^{iAs}x(0))\}.
\end{gathered}
$$

Отсюда

$$
\begin{gathered}
\lim_{\tau\to\infty} W(t+\tau,\ s+\tau) = -i(Te^{iA(t-s)}Ax(0),\ x(0)) + \\
+ i(A^*Te^{iA(t-s)}x(0),\ x(0)).
\end{gathered}
$$

Используя соотношения (8), получаем, что $\lim\limits_{\tau\to\infty} W(t+\tau,\ s+\tau) = 0$.

Следствие 4. *Если A — простой диссипативный оператор в H (оператор A называется простым, если линейная оболочка векторов $A^n(\operatorname{Im}A)h$ $(n = 0,\ 1,\ \ldots,\ h \in H)$ плотна в пространстве H), то о.ф. $F_t = e^{iAt}$, $(0 \leqslant t < \infty)$ слабо стремится к нулю при $t \to \infty$*, (о. ф. — оператор-функция).

Действительно, из следствия (3) вытекает, что

$$
\lim_{t\to\infty} \|(\operatorname{Im}A)^{\frac{1}{2}} F_t h\| = \lim_{t\to\infty}((\operatorname{Im}A)F_t h,\ F_t h) = 0,
$$

но тогда

$$
\lim_{t\to\infty}(F_t h,\ A^{*n}(\operatorname{Im}A)g) = \lim_{t\to\infty}((\operatorname{Im}A)F_t A^n h,\ g) = 0. \tag{11}
$$

Оператор A^* является простым оператором, так как A — простой. Поэтому линейная оболочка векторов вида $A^{*n}(\operatorname{Im}A)g$, $(n = 0,\ 1,\ \ldots,\ g \in H)$ плотна в H. Тогда из (11) и оценки $\|F_t\| \leqslant 1\ (0 \leqslant t < \infty)$ следует, что при $t \to \infty$ оператор-функция F_t слабо стремится к нулю.

2. Рассмотрим теперь случайный процесс

$$
\psi(x,\ t) = e^{i\hat{A}t}\psi_0(x), \text{ где } \psi_0(x) \in L_2(0,\ l) \quad (l < \infty),
$$

а оператор $\hat{A}$ представляет собой треугольную модель операторов класса $\Omega[\alpha(x)]$ с одномерной мнимой компонентой

$$
\hat{A}f(x) = \alpha(x)f(x) + i\int_0^x f(\xi)\,d\xi, \tag{12}
$$

$\alpha(x)$ — некоторая неубывающая функция на $0 \leqslant x \leqslant l$. Очевидно, что оператор $\hat{A}$ является ограниченным диссипативным оператором с одномерной мнимой компонентой. Это означает, что случайный процесс

$$
\psi(x,\ t) \in D^{(1}[\alpha(x)].
$$

Пусть $L_2(0, u)$, $(0 \leqslant u \leqslant l)$ — подпространство функций, принадлежащих $L_2(0, l)$ и равных почти всюду нулю на $[u, l]$. Введем функции

$$L_0(u, t) = (P_u e^{i\hat{A}t}\varphi_0(x), e^{i\hat{A}t}\varphi_0(x)) = \int_0^u \psi(\xi, t)\overline{\psi(\xi, t)}\,d\xi, \tag{13}$$

$$\hat{V}(t, s, u) = (P_u e^{i\hat{A}t}\varphi_0(x), e^{i\hat{A}s}\varphi_0(x)), \tag{14}$$

$$\hat{W}(t, s, u) = \frac{d}{d\tau} V(t+\tau, s+\tau, u)\Big|_{\tau=0} = ((2\operatorname{Im}\hat{A}) P_u e^{i\hat{A}t}\varphi_0(x), P_u e^{i\hat{A}s}\varphi_0(x)) =$$

$$= (P_u e^{i\hat{A}t}\varphi_0(x), g)(g, P_u e^{i\hat{A}s}\varphi_0(x)). \tag{15}$$

Таким образом,

$$\hat{W}(t, s, u) = y(u, t)\overline{y(u, s)},$$

где

$$y(u, t) = (P_u e^{i\hat{A}t}\varphi_0(x), g) = \int_0^u \psi(x, t)\,dx,$$

P_u—ортопроектор на $L_2(0, u)$, g — каналовый вектор оператора $\hat{A}$. Аналогично можно показать, что существует сильный предел

$$s.\lim e^{-i\hat{A}^*t} P_u e^{i\hat{A}t} = T_u, \tag{16}$$

где T_u является ограниченным неотрицательным оператором, действующим в $L_2(0, l)$.

Из соотношения (16) вытекают равенства

$$\begin{gathered} e^{-i\hat{A}^*s} T_u e^{i\hat{A}t} = T_u e^{i\hat{A}(t-s)}, \\ e^{-i\hat{A}^*t} T_u = T_u e^{-i\hat{A}t}, \\ A^{*n} T_u = T_u A^n \ (n = 1, 2, \ldots), \end{gathered} \tag{17}$$

а также существование пределов,

2) $\lim \hat{V}(t+\tau, s+\tau, u) = \hat{V}_\infty(t-s, u) = (T_u e^{iA(t-s)}\varphi_0(x), \varphi_0(x));$ (18)

3) $$\lim \hat{W}(t+\tau, s+\tau, u) = 0, \lim_{t\to\infty} y(u, t) = 0 \tag{19}$$

$$s.\lim e^{-iA^*t} P_u^\perp e^{iAt} = T_u^\perp;$$

4) $\hat{T} = T_u + T_u^\perp$, причем оператор T_u аннулирует подпространства $L_2^\perp(0, u)$, а подпространство $L_2(0, u)$ является его инвариантным подпространством. Если $u_1 \leqslant u_2$, то $T_{u_1} \leqslant T_{u_2}$, $T_{u_2}^\perp \leqslant T_{u_1}^\perp$.

Из формулы (15) имеем

$$\hat{V}(t, s, u) = \hat{V}(t+\eta, s+\eta, u) + \int_0^\eta y(u, t+\lambda)\overline{y(u, s+\lambda)}\,d\lambda. \tag{20}$$

Положим в (20) $\eta = -s$

$$\hat{V}(t, s, u) = \hat{V}(t-s, 0, u) + \int_0^{-s} y(u, t+\lambda)\overline{y(u, s+\lambda)}\,d\lambda$$

$$\hat{V}(t+\tau, s+\tau, u) = \hat{V}(t-s, 0, u) - \int_0^{-s+\tau} y(u, t+\lambda+\tau)\overline{y(u, s+\lambda+\tau)}\,d\lambda. \tag{21}$$

В интеграле в правой части (21) сделаем замену $\mu = s + \tau + \lambda$. Тогда

$$\hat{V}(t+\tau,\ s+\tau,\ u) = \hat{V}(t-s,\ 0,\ u) - \int_0^{s+\tau} y(u,\ t-s+\mu)\,\overline{y(u,\ \mu)}\,d\mu. \quad (22)$$

Из (18) следует, что

$$\int_0^{\infty} y(u,\ t-s+\mu)\,\overline{y(u,\ \mu)}\,d\mu \text{ сходится.}$$

Обозначим $\tau = t - s$, $K(u,\ \tau) = (T_u e^{i\hat{A}\tau}\psi_0(x),\ \psi_0(x))$. Тогда из (22) получаем

$$K(u,\ \tau) = \int_0^u \psi(x,\ \tau)\,\overline{\psi_0(x)}\,dx - \int_0^{\infty} y(u,\ \tau+\mu)\,\overline{y(u,\ \mu)}\,d\mu. \quad (23)$$

Обозначим

$$L_t(u,\ \tau) = \int_0^u \psi(x,\ \tau)\,\overline{\psi_0(x)}\,dx - \int_0^{t} y(u,\ \tau+\mu)\,y(u,\ \mu)\,d\mu. \quad (24)$$

Очевидно,

$$K(u,\ \tau) = \lim_{t\to\infty} L_t(u,\ \tau),\quad L_t(u,\ \tau)|_{\tau=0} = L_0(u,\ t),$$

$$K_0(u) = K(u,\ \tau)|_{\tau=0} = \lim_{t\to\infty} L_t(u,\ 0) = \lim_{t\to\infty} L_0(u,\ t) = (T_u\psi_0(x),\ \psi_0(x)).$$

Теорема 1. *Пусть функция* $\alpha(x)$ *в (12) является неубывающей непрерывной функцией на интервале* $(0,\ l)$, *тогда имеет место представление*

$$K(u,\ \tau) = (T_u e^{i\hat{A}\tau}\psi_0(x),\ \psi_0(x)) = \int_0^l e^{i\alpha(x)\tau}\,dK_0(x), \quad (25)$$

в частности,

$$\hat{V}_\infty(t-s) = (\hat{T}e^{i\hat{A}(t-s)}\psi_0(x),\ \psi_0(x)) = \int_0^l e^{i\alpha(x)(t-s)}\,dK_0(x). \quad (26)$$

Доказательство. Так как $K_0(u) = \lim_{t\to\infty} L_0(u,\ t)$, а функция $L_0(u,\ t)$, очевидно, не убывает по u, то и $K_0(u)$ является неубывающей функцией и значит интеграл (25) имеет смысл.

Далее

$$\psi(x,\ t) = e^{i\hat{A}t}\psi_0(x),$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = i\hat{A}\psi(x,\ t) = i\alpha(x)\,\psi(x,\ t) - \int_0^x \psi(\xi,\ t)\,d\xi.$$

Отсюда легко получаются уравнения

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial t} = i\alpha(x)\frac{\partial y}{dx} - y,$$

$$\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x\,\partial t} = -i\alpha(x)\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} - \bar{y}, \quad (27)$$

где $y(x,\ t) = \int_0^x \psi(\xi,\ t)\,d\xi$.

Используя (27), после несложных преобразований получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 L_t(u,\ \tau)}{\partial u\,\partial\tau} = i\alpha(x)\frac{\partial L_t(u,\ \tau)}{\partial u} - y(u,\ t+\tau)\,\psi(u,\ t),$$

$$L_t(u,\ \tau)|_{u=0} = 0 \quad L_t(u,\ \tau)|_{\tau=0} = L_0(u,\ t). \quad (28)$$

Решая уравнение (28), получим

$$L_t(u, \tau) = \int_0^u e^{i\alpha(x)\tau} dL_0(x, t) -$$

$$- \int_0^u \overline{\psi(x, t)} \left\{ \int_0^\tau e^{i\alpha(x)(\tau - v)} y(x, t+v)\, dv. \right. \tag{29}$$

Введем следующие обозначения:

$$I_1 = \int_0^u e^{i\alpha(x)\tau} dL_0(x, t), \quad I_2 = \int_0^u \overline{\psi(x, t)}\, \omega(x, t)\, dx,$$

$$\text{где } \omega(x, t) = \int_0^\tau e^{i\alpha(x)(\tau - v)} y(x, t+v)\, dv.$$

Покажем, что $\lim\limits_{t\to\infty} \omega(x, t) = 0$. Зафиксируем x и τ и зададим $\varepsilon > 0$. Так как $\lim\limits_{t\to\infty} y(x, t) = 0$, то найдется t_0 такое, что при $t > t_0$ $|y(x, t)| < \varepsilon$. Тогда при $t > t_0$

$$|\omega(x, t)| \leqslant \int_0^\tau |y(x, t+v)|\, dv \leqslant \tau\varepsilon.$$

Далее, имеет место очевидная оценка

$$|y(x, t)|^2 = (P_x e^{i\hat{A}t}\psi_0(x), g)(g, P_x e^{i\hat{A}t}\psi_0(x)) \leqslant \|\psi_0(x)\|^2 = a^2.$$

Отсюда следует, что

$$|\omega(x, t)| \leqslant a\tau.$$

Тогда по теореме Лебега о предельном переходе

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^u |\omega(x, t)|^2 dx = 0.$$

Используя еще раз неравенство Коши-Буняковского, получим оценку

$$|I_2| = \left| \int_0^u \overline{\psi(x, t)}\, \omega(x, t)\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^u |\psi(x, t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^u |\omega(x, t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \|\psi_0(x)\| \int_0^u |\omega(x, t)|^2 dx. \tag{30}$$

Из (30) видно, что

$$\lim_{t\to\infty} I_2 = 0.$$

Заметим, что $\lim\limits_{t\to\infty} L_0(x, t) = K_0(x)$, причем

$$L_0(x, t) = \int_0^x |\psi(\xi, t)|^2 d\xi$$

является абсолютно непрерывной функцией от x при фиксированном t. Полная вариация функции $L_0(x, t)$ ограничена равномерно по t на $[0, u]$:

$$\overset{u}{\underset{0}{V}} L_0(u, t) = \int_0^u |\psi(x, t)|^2 dx \leqslant \int_0^l |\psi(x, t)|^2 dx \leqslant \|\psi_0(x)\|^2.$$

Кроме того, функция $e^{i\alpha(x)\tau}$ непрерывна. Следовательно, по теореме Хелли

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^u e^{i\alpha(x)\tau} dL_0(x, t) = \int_0^u e^{i\alpha(x)\tau} dK_0(x).$$

Переходя к пределу в (29), получим

$$K(u, \tau) = \lim_{t\to\infty} L_i(u, \tau) = \int_0^u e^{i\alpha(x)\tau} dK_0(x),$$

что требовалось доказать.

Известно [5], что если простой оператор $A \in \Omega[\alpha(x)]$ и имеет одномерную мнимую компоненту, то он унитарно эквивалентен оператору $\hat{A}$. Тогда из *теоремы (1) сразу вытекает следующая*

Теорема 2. *Пусть случайный процесс $x(t) \in D^{(1)}[\alpha(x)]$ и функция $\alpha(x)$ непрерывна и пусть оператор A в представлении $x(t) = e^{iAt}x(0)$ является простым оператором.*

Тогда

$$\lim_{\tau\to\infty} v(t+\tau, s+\tau) = \int_0^l e^{i\alpha(x)(t-s)} d\beta(x), \tag{31}$$

где $\beta(x)$ — неубывающая функция на $[0, l]$.

3. Общий вид корреляционной функции случайного процесса $x(t) \in D^{(r)}\{\alpha(x)\}$ конечного ранга r

1. Обозначим через $L_2^{(r)}(0, l)$ $(r \leqslant \infty, l < \infty)$ гильбертово пространство, состоящее из однострочных матриц

$$f(x) = \|f^{(1)}(x), \ldots, f^{(r)}(x)\|, \tag{32}$$

где $f^{(j)}(x)$ — измеримые на $(0, l)$ функции, удовлетворяющие условию

$$\int_0^l f(x) f^*(x)\, dx = \sum_{j=1}^r \int_0^l |f^{(j)}(x)|^2 dx < \infty. \tag{33}$$

Скалярное произведение в $L_2^{(r)}(0, l)$ определяется формулой

$$(f, g) = \int_0^l f(x) g^*(x)\, dx = \sum_{j=1}^r \int_0^l f^{(j)}\overline{g^{(j)}}\, dx.$$

Пусть оператор $A \in \Omega[\alpha(x)]$ является простым оператором с конечным рангом неэрмитовости r. Включим оператор A в простой диссипативный E_r-конечномерный узел,

$$\theta_A = \begin{pmatrix} A & K & E \\ H & & E_r \end{pmatrix},$$

где E_r — r-мерное эвклидово пространство. Построим оператор $\tilde{A}$, действующий в пространстве $L_2^{(r)}(0, l)$ $(r < \infty)$, следующим образом:

$$\tilde{A} = \hat{A}_1 \oplus \hat{A}_2 \oplus \ldots\ldots \oplus \hat{A}_r. \tag{34}$$

Оператор $\tilde{A}$ будем называть универсальной моделью оператора A.

Известно [5], что оператор $\hat{A}$ является простым оператором. Тогда легко проверяется, что и $\tilde{A}$ является простым оператором.

Включим $\tilde{A}$ в диссипативный узел. Для этого построим в $L_2^{(r)}(0, l)$ ортонормированную последовательность

$$h_j = \| 0 \ldots . . l^{-\frac{1}{2}} \ldots 0 \| \quad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

и рассмотрим в пространстве E_r ортонормированный базис

$$g_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Условием $\tilde{K}_l g_j = l^{\frac{1}{2}} h_j$ однозначно определяется линейный ограниченный оператор $\tilde{K}_l$, действующий из E_r в $L_2^{(r)}(0, l)$. При этом оператор $\tilde{A}$ окажется автоматически включенным в простой диссипативный узел

$$\tilde{\theta}_l = \begin{pmatrix} \tilde{A} & K_l & E \\ L_2^{(r)} & (0, l) & E_r \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Имеет место следующая

Теорема 3. *Характеристическая оператор-функция узла θ_A является делителем характеристической оператор-функции узла $\tilde{\theta}_l$*

Доказательство. Будем характеристическую оператор-функцию обозначать через х. о. ф. Легко показать, что х. о. ф. узла $\tilde{\theta}_l$ имеет вид

$$w_{\tilde{\theta}_l}(\lambda) = e^{i\int\limits_0^l \frac{du}{\lambda - \alpha(u)}} E. \tag{36}$$

Обозначим собственные числа оператора $w_{\theta_A}^*(\lambda)\, w_{\theta_A}(\lambda)$, действующего в E_r, через $\mu_1(\lambda), \ldots \mu_r(\lambda)$. Так как $w_{\theta_A}^* w_{\theta_A} - E \geqslant 0$ $(\operatorname{Im}\lambda > 0)$, то $\mu_j(\lambda) > 1$ $(\operatorname{Im}\lambda > 0)$.

Отсюда

$$\| w_{\theta_A}(\lambda) \|^2 = \| w_{\theta_A}^*(\lambda) w_{\theta_A}(\lambda) \| \leqslant \max_j \mu_j(\lambda) \leqslant$$
$$\leqslant \Pi \mu_j(\lambda) = \det(w_{\theta_A}^*(\lambda)\, w_{\theta_A}(\lambda)) = |\det w_{\theta_A}(\lambda)|^2 \quad (\operatorname{Im}\lambda > 0).$$

Следовательно,

$$w_{\theta_A}^*(\lambda)\, w_{\theta_A}(\lambda) \leqslant |\det w_{\theta_A}(\lambda)|^2 E \qquad (\operatorname{Im}\lambda > 0). \tag{37}$$

Аналогично

$$E = w_{\theta_A}^*(\lambda)\, w_{\theta_A}(\lambda) = |\det w_{\theta_A}(\lambda)|^2 E \qquad \begin{pmatrix} \operatorname{Im}\lambda = 0 \\ \lambda \overline{\in} [\alpha(0), \alpha(l)] \end{pmatrix}, \tag{38}$$

$$w_{\theta_A}^*(\lambda)\, w_{\theta_A}(\lambda) \geqslant |\det w_{\theta_A}(\lambda)|^2 \qquad (\operatorname{Im}\lambda < 0). \tag{39}$$

Из (5) и (36) следует, что

$$\left(\det w_{\theta_A}(\lambda)) E = e^{i\int\limits_0^l \frac{d\eta}{\lambda - \alpha(\eta)}} E = w_{\tilde{\theta}_l}(\lambda) \qquad (\lambda \overline{\in} [\alpha(0), \alpha(l)]\right). \tag{40}$$

Можно показать, что оператор $w_{\theta_A}^{-1}(\lambda)$ существует при $\lambda \overline{\in} [\alpha(0), \alpha(l)]$.

Обозначим $w_1(\lambda) = (\det w_{\theta_A}(\lambda))\, w_{\theta_A}^{-1}(\lambda) \qquad (\lambda \bar{\in} [\alpha(0),\ \alpha(l)])$.

Очевидно,

$$w_{\theta_l}^{-}(\lambda) = w_{\theta_A}(\lambda)\, w_1(\lambda). \tag{41}$$

Ясно, что $w_1(\lambda)$ голоморфна в области, которая получается при удалении из расширенной комплексной плоскости множества $[\alpha(0),\ \alpha(l)]$.

Из (37), (38) и (39) вытекают соотношения

$$w_1^*(\lambda)\, w_1(\lambda) - E \geqslant 0 \qquad (\operatorname{Im} \lambda > 0), \tag{42}$$

$$w_1^*(\lambda)\, w_1(\lambda) - E = 0 \qquad (\operatorname{Im} \lambda = 0,\ \lambda \bar{\in} [\alpha(0),\ \alpha(l)], \tag{43}$$

$$w_1^*(\lambda)\, w_1(\lambda) - E \leqslant 0 \qquad (\operatorname{Im} \lambda < 0). \tag{44}$$

Покажем, что

$$\lim_{\lambda \to \infty} \| w_1(\lambda) - E \| = 0. \tag{45}$$

Действительно,

$$\| w_1(\lambda) - E \| = \| (\det w_{\theta_A}(\lambda))\, w_{\theta_A}^{-1}(\lambda) -$$
$$- E \| \leqslant \left| \det w_{\theta_A}(\lambda) \right| \| w_{\theta_A}^{-1} - E \| + \left| \det w_{\theta_A}(\lambda) - 1 \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \det w_{\theta_A}(\lambda) \right| \| w_{\theta_A}^{-1} \| \, \| w_{\theta_A} - E \| + \left| \det w_{\theta_A}(\lambda) - 1 \right|.$$

Из этой оценки и из очевидных оценок

$$|\det w_{\theta_A}(\lambda)| \leqslant C \qquad (|\lambda| > R),$$
$$\| w_{\theta_A}^{-1}(\lambda) \| = \| w_{\theta_A}^*(\bar{\lambda}) \| = \| w_{\theta_A}(\bar{\lambda}) \leqslant C \qquad (|\lambda| > R),$$

е R достаточно большое, следует, что

$$\lim_{\lambda \to \infty} \| w_1(\lambda) - E \| = 0.$$

Из соотношений (42) — (45) вытекает, что $w_1(\lambda) \in \Omega_E^{(q)}$, $\Omega_E^{(q)} \subset \Omega_E$ [4], а это и означает, что х. о. ф. $w_{\theta_A}(\lambda)$ является делителем х. о. ф. $w_{\theta_l}^{-}(\lambda)$.

2. Построим кривую $\tilde{x}(t) = e^{i\tilde{A}t}\psi_0(x)$, где $\psi_0(x) \in L_2^{(r)}(0,\ l)$ ($\tilde{A}$ имеет вид (34)). Вычислим корреляционную функцию случайного процесса $\tilde{x}(t)$. Из конструкции универсальной модели следует, что

$$\tilde{V}(t,\ s) = (e^{i\tilde{A}t}\psi_0(x),\ e^{i\tilde{A}s}\psi_0(x)) =$$
$$= (e^{i\hat{A}t}\psi_{01},\ e^{i\hat{A}s}\psi_{01}) + \ldots + (e^{i\hat{A}t}\psi_{0r},\ e^{i\hat{A}s}\psi_{0r}), \tag{46}$$

где $\psi_0(x) = \| \psi_{01}(x),\ \psi_{02}(x),\ \ldots,\ \psi_{0r}(x) \| \in L_2^{(r)}(0,\ l)$.

Из определения инифинитезимальной корреляционной функции получаем

$$\hat{V}(t,\ s) = \hat{V}_\infty(t - s) + \int_0^\infty \hat{W}(t + \tau,\ s + \tau)\, d\tau. \tag{47}$$

В нашем случае $\hat{W}(t,\ s) = \Phi(l,\ t)\overline{\Phi(l,\ s)}$,
где

$$\Phi(l,\ t) = (e^{i\hat{A}t}\psi_0(x),\ g) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{i\lambda t}((\hat{A} - \lambda E)^{-1}\psi_0,\ g)\, d\lambda,$$

$$\psi_0(x) \in L_2(0,\ l), \tag{48}$$

а γ — произвольный контур, охватывающий сегмент $[\alpha(0), \alpha(l)]$. Подставляя в (48) явное выражение для резольвенты оператора $\hat{A}$, после несложных преобразований получим

$$\Phi(l, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} e^{i\lambda t}\left\{\int_0^l \frac{\psi_0(\xi)}{\lambda-\alpha(\xi)} e^{i\int_{\xi}^{l}\frac{d\eta}{\lambda-\alpha(\eta)}} d\xi\right\} d\lambda. \tag{49}$$

Из теоремы 1 следует, что

$$\hat{V}_{\infty}(t-s) = \int_0^l e^{i\alpha(x)(t-s)}\, dK_0(x), \tag{50}$$

где

$$K_0(x) = \int_0^x \psi_0(\xi)\overline{\psi_0(\xi)}\, d\xi - \int_0^{\infty} \Phi(x, t)\overline{\Phi(x, t)}\, dt.$$

Тогда

$$\hat{V}(t, s) = \int_0^l e^{i\alpha(x)(t-s)}\, dK_0(x) + \int_0^{\infty} \Phi(l, t+\tau)\overline{\Phi(l, s+\tau)}\, d\tau. \tag{51}$$

Из соотношений (46) и (51) получим следующее утверждение.

Теорема 4. *Корреляционная функция модельного процесса* $\tilde{x}(t) = e^{i\tilde{A}t}\psi_0$ *имеет вид*

$$\tilde{V}(t, s) = \int_0^l e^{i\alpha(x)(t-s)}\, dK_0(x) + \int_0^{\infty}\sum_{m=1}^{r} \Phi_m(l, t+\tau)\overline{\Phi_m(l, s+\tau)}\, d\tau, \tag{52}$$

где

$$K_0(x) = \int_0^x \psi_0(\xi)\psi_0^*(\xi)\, d\xi - \int_0^{\infty}\sum_{m=1}^{r} \Phi_m(x, t)\overline{\Phi_m(x, t)}\, dt,$$

$$\psi_0(x) = \|\psi_{01}(x), \psi_{02}(x), \ldots \psi_{0r}(x)\| \in L_2^{(r)}(0, l),$$

$$\Phi_m(x, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} e^{i\lambda t}\left\{\int_0^x \frac{\psi_{0m}(\xi)}{\lambda-\alpha(\xi)}\cdot e^{i\int_{\xi}^{x}\frac{d\eta}{\lambda-\alpha(\eta)}} d\xi\right\} d\lambda.$$

Теорема 5. *Пусть случайный процесс* $x(t) \in D^{(r)}[\alpha(x)]$ и $\alpha(x)$ *является непрерывной функцией. Тогда корреляционная функция процесса* $x(t)$ *имеет вид*

$$V(t, s) = \tilde{V}(t, s) + F(t-s), \tag{53}$$

где функция $\tilde{V}(t, s)$ *имеет вид (52), а* $F(t-s)$ — *эрмитово положительная функция с ограниченным спектром.*

Доказательство. Пусть задан процесс $x(t) = e^{iAt}x(0) \in D^{(r)}[\alpha(x)]$. Построим универсальную модель для оператора A. Включим оператор A_0 в простой диссипативный E_r-конечномерный узел

$$\theta = \begin{pmatrix} A_0 & K & E \\ H_0 & & E_r \end{pmatrix},$$

где A_0 — простая часть оператора A, H_0 — главное пространство оператора A.

В теореме 3 было показано, что $w_{\tilde{\theta}_l} = w_0 w_1$, где $w_1(\lambda) \in$ классу $\Omega_E^{(q)}$ [4].

По теореме 9.4. [4] существует простой диссипативный E_r-конечномерный узел

$$\theta_1 = \begin{pmatrix} A_1 & K_1 & E \\ H_1 & & E_r \end{pmatrix}$$

такой, что $G_{A_1} \supseteq G_{\omega_1}$, и

$$\omega_{\theta_1}(\lambda) = \omega_1(\lambda) \qquad (\lambda \in G_{\omega_1}).$$

Построим узел $\tilde{\theta} = \theta\,\theta_1$:

$$\tilde{\theta} = \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{A}} & \tilde{K} & E \\ \tilde{H} & & E_r \end{pmatrix},$$

где $\tilde{H} = H_0 \oplus H_1$, $\tilde{\tilde{A}} = A_0P_0 + A_1P_1 + iKK_1^*P_1$, $\tilde{K} = K \dotplus K_1$.

Обозначим через

$$\tilde{\theta}_{\tilde{H}} = \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{A}}_0 & \tilde{K} & E \\ \tilde{H}_0 & & E_r \end{pmatrix} \text{ главную часть узла } \theta.$$

Очевидно, что $\omega_{\tilde{\theta}_{\tilde{H}}}(\lambda) = \omega_{\tilde{\theta}}(\lambda)$.

По теореме умножения имеем

$$\omega_{\tilde{\theta}_{\tilde{H}}} = \omega_{\tilde{\theta}} = \omega_0\omega_1 = \omega_{\tilde{\theta}_l}.$$

Таким образом, у простых узлов $\tilde{\theta}_l$ и $\tilde{\theta}_{\tilde{H}}$ совпадают х. о. ф., а это означает, что узлы $\tilde{\theta}_l$ и $\tilde{\theta}_{\tilde{H}}$ унитарно эквивалентны. Значит, существует изометрическое отображение U пространства $\tilde{H}_0$ на $L_2^{(r)}(0, l)$ такое, что $U\tilde{\tilde{A}}_0 = \tilde{A}U$.

Возьмем пространство M, причем $\dim M = \dim \tilde{H}_0^{(0)}$ ($\tilde{H}_0^{(0)}$ — избыточное подпространство оператора $\tilde{\tilde{A}}$). Тогда существует изометрическое отображение U_1 пространства $\tilde{H}_0^{(0)}$ на M.

Обозначим через $B = U_1\tilde{\tilde{A}}_0^{(0)}U_1^{-1}$. Оператор B действует в M и является самосопряженным оператором. $\tilde{U} = \begin{cases} Ux & x \in \tilde{H}_0 \\ U_1x & x \in \tilde{H}_0^{(0)} \end{cases}$ отображает изометрически пространство $\tilde{H}$ на $Y = L_2^{(r)} \dotplus M$, при этом $\tilde{\tilde{A}}$ унитарно эквивалентен оператору $\tilde{B} = \tilde{A} \dotplus B$. Как видно из предыдущего, подпространство $Y_0 = \tilde{U}H_0$ является инвариантным подпространством оператора $\tilde{B}$ и $\tilde{B}$ индуцирует на Y_0 оператор $\tilde{B}_0$, который унитарно эквивалентен оператору A_0. Отсюда имеем

$$(e^{i\tilde{B}_0t}x,\ e^{i\tilde{B}_0s}x) = (e^{i\tilde{B}t}x,\ e^{i\tilde{B}s}x) = (e^{i\tilde{A}t}\varphi_0,\ e^{i\tilde{A}s}\varphi_0) + (e^{iBt}x_M,\ e^{iBs}x_M)$$

$$(x = \varphi_0 \dotplus x_M \in Y_0).$$

Обозначим

$$\tilde{V}(t, s) = (e^{i\tilde{A}t}\varphi_0,\ e^{i\tilde{A}s}\varphi_0),\ \ F_1(t-s) = (e^{iBt}x_M,\ e^{iBs}x_M).$$

Очевидно, $F_1(t-s)$ является эрмитово положительной функцией с ограниченным спектром, а теорема 4 показывает, что $\tilde{V}(t, s)$ имеет вид (52).

Кроме того, так как A_0 и $\tilde{B}_0$ унитарно эквивалентны, то

$$(e^{iA_0t}a_0,\ e^{iA_0s}a_0) = (e^{i\tilde{B}_0t}Ua_0,\ e^{i\tilde{B}_0s}Ua_0) = \tilde{V}(t, s) + F_1(t-s) \quad (a_0 \in H_0).$$

Далее,

$$(e^{iAt}a,\ e^{iAs}a) = (e^{iA_\theta t}a_\theta,\ e^{iA_\theta s}a_\theta) + (e^{iA_\theta^{(0)}t}a_\theta^{(0)},\ e^{iA_\theta^{(0)}s}a_\theta^{(0)}),$$

$$\begin{pmatrix} a = a_\theta + a_\theta^{(0)} \in H \\ H = H_\theta \dotplus H_\theta^{(0)} \\ A = A_\theta \dotplus A_\theta^{(0)} \end{pmatrix}$$

$F_2(t-s) = (e^{iA_\theta^{(0)}t}a_\theta^{(0)},\ e^{iA_\theta^{(0)}s}a_\theta^{(0)})$ — эрмитово положительная функция с ограниченным спектром, так как $A_\theta^{(0)}$ — ограниченный самосопряженный оператор.

Окончательно $V(t, s) = \widetilde{V}(t, s) + F(t-s)$, где $F(t-s) = F_1(t-s) + F_2(t-s)$, а $\widetilde{V}(t, s)$ имеет вид (52), и теорема доказана.

Следствие 1. *Если A — простой оператор, то $F_2(t-s) \equiv 0$, $F(t-s) = F_1(t-s)$, а $\widetilde{B}$ индуцирует на инвариантном подпространстве Y_0 простой оператор $\widetilde{B}_0$.*

Следствие 2. *Если A простой оператор и w_{θ_A} является правильным делителем $w_{\widetilde{\theta}_t}$, то $F(t-s) \equiv 0$* и $V(t, s)$ имеет вид (52).

Следствие 3. Если *A — простой оператор первого ранга, то $F(t-s) \equiv 0$ и $V(t, s)$ имеет вид* (51).

Теорема 6. *Если заданная функция $V(t, s)$ представима в виде (53), то существует гауссовский процесс $x(t) \in D^{(r)}[\alpha(x)]$, корреляционная функция которого совпадает с $V(t, s)$.*

Доказательство. Если $V(t, s)$ представима в виде (53), то она является эрмитово положительной функцией и тогда известно [1, 2], что можно найти гауссовский процесс $x(t)$, корреляционная функция которого совпадает с $V(t, s)$.

Остается показать, что процесс $x(t) \in D^{(r)}[\alpha(x)]$. Обозначим л. з. о. $\{x(t)\} = H$. Взяв в качестве функций $\alpha(x)$ и $\psi_0(x)$ соответствующие функции из представления (53), построим модельный процесс $x(t) = e^{i\widetilde{A}t}\psi_0$. Обозначим л. з. о $\{\widetilde{x}(t)\} = \widetilde{H}$. Так как функция $F(t-s)$ — эрмитово положительна и имеет ограниченный спектр, то существует линейный ограниченный самосопряженный оператор B такой, что $F(t-s) = (e^{iBt}f,\ e^{iBt}f)$. Обозначим л. з. о. $\{e^{iBt}f\} = M$. Построим оператор $\widetilde{\widetilde{B}} = \widetilde{A} \oplus B$, действующий в пространстве $\widetilde{\widetilde{H}} = \widetilde{H} \oplus M$.

Рассмотрим процесс $e^{i\widetilde{\widetilde{B}}t}x_0$, где $x_0 = \psi_0 + f$. Обозначим л. з. о $\{e^{i\widetilde{\widetilde{B}}t}x_0\} = \widetilde{H}_0$. Из конструкции кривой $e^{i\widetilde{\widetilde{B}}t}x_0$ и теоремы 4 следует, что

$$\widetilde{\widetilde{V}}(t, s) = (e^{i\widetilde{\widetilde{B}}t}x_0,\ e^{i\widetilde{\widetilde{B}}s}x_0) = (x(t),\ x(s)) = V(t, s). \tag{54}$$

Обозначим через $\widetilde{B}$ оператор, индуцированный оператором $\widetilde{\widetilde{B}}$ на инвариантном подпространстве $\widetilde{H}_0$. Если допустить, что оператор $\widetilde{B}$ является самосопряженным, то из того, что $\widetilde{\widetilde{B}}$ — диссипативен, $\widetilde{A}$ — простой, B — самосопряженный следует включение $\widetilde{H}_0 \subset M$, что невозможно, так как $\psi_0 \neq 0$. Таким образом, $\dim \overline{(\operatorname{Im} \widetilde{B})\widetilde{H}_0} = p > 0$. Очевидно, $p \leqslant r$.

Зададим отображение U, полагая $x(t) = Ue^{i\widetilde{\widetilde{B}}t}x_0$. Из (54) следует, что U не меняет скалярного произведения, поэтому U можно расширить по непрерывности на $\widetilde{H}_0$ до оператора U, изометрически отображающего пространство $\widetilde{H}_0$ на все H. Обозначим $A = \widetilde{U}\widetilde{B}\widetilde{U}^{-1}$. Тогда для $x(t)$ имеем $x(t) =$

$=e^{iAt}x(0)$. Ясно, что оператор A диссипативен и имеет ранг неэрмитовости $p: 0<p\leqslant r$. Тем самым доказано, что $x(t)\in D^{(r)}[\alpha(x)]$.

Следствие 1. *Если оператор $\tilde{\tilde{B}}$ индуцирует на инвариантном подпространстве $\tilde{H}_0$ простой оператор, то в представлении $x(t)=$ $=e^{iAt}x(0)$ оператор A тоже простой.*

Следствие 2. *Если в представлении* (53) $F(t-s)\equiv 0$, то *A — простой оператор и $w_{\theta_A}(\lambda)$ является правильным делителем х. о. функции $w_{\tilde{\theta}_l}(\lambda)$.*

4. Общий вид корреляционной функции случайного процесса $x(t)\in D^{(\infty)}[\alpha(x)]$

Введенное раньше пространство $L_2^{(r)}(0, l)$ при $r=\infty$ теперь будем обозначать через $\tilde{L}_2(0, l)$.

Пусть задан простой оператор $A\in\Omega[\alpha(x)]$. Включим оператор A в простой диссипативный узел [4],

$$\theta_A=\begin{pmatrix}A & K & E\\ H & & l_2\end{pmatrix}. \tag{55}$$

Так как $sp(\operatorname{Im}A)<\infty$, то можно показать, что узел θ_A является квазиэрмитовым.

Построим теперь универсальную модель $\tilde{A}$ оператора A. Оператор $\tilde{A}$ действует в пространстве $\tilde{L}_2(0, l)$ и

$$\tilde{A}=\hat{A}\oplus\hat{A}\oplus\ldots.\oplus\hat{A}\oplus\ldots. \tag{56}$$

Так как $\hat{A}$ — простой оператор, то $\tilde{A}$ является также простым оператором. Включим $\tilde{A}$ в простой диссипативный узел

$$\tilde{\theta}_l=\begin{pmatrix}\tilde{A} & \tilde{K}_l & E\\ \tilde{L}_2(0, l) & & l_2\end{pmatrix}. \tag{57}$$

Имеет место следующая

Теорема 7. *Х. о. ф. узла θ_A является делителем х. о. ф. узла $\tilde{\theta}_l$.*

Доказательство. Легко проверяется, что х. о. ф. узла $\tilde{\theta}_l$ имеет вид

$$w_{\tilde{\theta}_l}(\lambda)=\exp\left[i\int\limits_0^l\frac{d\eta}{\lambda-\alpha(\eta)}\right]E. \tag{58}$$

Обозначим класс ядерных операторов через σ_1. Пусть $\{h_i\}$ и $\{g_i\}$ — ортонормированные базисы соответственно в H и l_2. Так как

$$\sum_i(KK^*h_i, h_i)=\sum_i\|K^*h_i\|^2=\sum_i\|Kg_i\|^2=\sum_i(K^*Kg_i, g_i)$$

и $\operatorname{Im}A\in\sigma_1$, то $sp(K^*K)=sp(KK^*)=sp(\operatorname{Im}A)<\infty$, т. е.

$$K^*K\in\sigma_1. \tag{59}$$

Покажем, что отсюда следует

$$E-w_{\theta_A}(\lambda)\in\sigma_1. \tag{60}$$

Действительно, из определения х. о. ф. $w_{\theta_A}(\lambda)$ вытекает, что

$$E-w_{\theta_A}(\lambda)=iK^*(A-\lambda E)^{-1}K=m(\lambda).$$

Если показать, что для любого ортонормированного базиса $\{g_j\}$ в l_2 ряд $\sum_j (m(\lambda) g_j, g_j)$ сходится, то из теоремы 8.1 [6] вытекает, что $m(\lambda) \in \sigma_1$.

Используя неравенство Коши — Буняковского и (59), получим

$$|\sum_j (m(\lambda) g_j, g_j)| \leqslant \sum_j |(A - \lambda E)^{-1} K g_j, K g_j)| \leqslant$$
$$\leqslant \|(A - \lambda E)^{-1}\| \sum_j \|K g_j\| = \|(A - \lambda E)^{-1}\| \sum_j (K^* K g_j, g_j) < \infty. \quad (61)$$

Из (60) следует, что $E - w^*_{\theta_A}(\lambda) \in \sigma_1$,

$$E - w^*_{\theta_A}(\lambda) w_{\theta_A}(\lambda) \in \sigma_1,$$

а это означает, что существуют бесконечные определители

$$\det (w^*_{\theta_A}(\lambda) w_{\theta_A}(\lambda)), \ \det w_{\theta_A}(\lambda) \ \text{и} \ \det w^*_{\theta_A}(\lambda).$$

Известно [6], что

$$\det (w^*_{\theta_A}(\lambda) w_{\theta_A}(\lambda)) = |\det w_{\theta_A}(\lambda)|^2. \quad (62)$$

Обозначим собственные числа оператора $w^*_{\theta_A}(\lambda) w_{\theta_A}(\lambda)$ через $\mu_1(\lambda)$, $\mu_2(\lambda), \ldots$

Так как $w^*_{\theta_A}(\lambda) w_{\theta_A}(\lambda) - E \geqslant 0 \quad (\operatorname{Im} \lambda > 0)$, то

$$\mu_j(\lambda) > 1 \qquad (\operatorname{Im} \lambda > 0). \quad (63)$$

Теперь, используя (62) и (63), получим

$$\| w_{\theta_A}(\lambda) \|^2 = \| w^*_{\theta_A}(\lambda) w_{\theta_A}(\lambda) \| \leqslant \max_j \mu_j(\lambda) = \Pi_j \mu_j(\lambda) =$$
$$= \det (w^*_{\theta_A}(\lambda) w_{\theta_A}(\lambda)) = |\det w_{\theta_A}(\lambda)|^2 \qquad (\operatorname{Im} \lambda > 0).$$

Отсюда

$$w^*_{\theta_A}(\lambda) w_{\theta_A}(\lambda) \leqslant |\det w_{\theta_A}(\lambda)|^2 E \qquad (\operatorname{Im} \lambda > 0). \quad (64)$$

Кроме того, так как

$$w^*_{\theta_A}(\lambda) w_{\theta_A}(\lambda) = E \qquad (\operatorname{Im} \lambda = 0, \ \lambda \overline{\in} [\alpha(0), \alpha(l)],$$
$$|\det w_{\theta_A}(\lambda)|^2 = \det (w^*_{\theta_A} w_{\theta_A}) = 1$$
$$(\operatorname{Im} \lambda = 0, \ \lambda \overline{\in} [\alpha(0), \alpha(l)]. \quad (65)$$

Используя теорему обратимой голоморфной функции [4] и соотношение $w^*_{\theta_A}(\overline{\lambda}) w_{\theta_A}(\lambda) - E = 0$, можно показать, что $w^{-1}_{\theta_A}$ существует и является голоморфной функции от λ в области G, которая получается при удалении из расширенной комплексной плоскости сегмента $[\alpha(0), \alpha(l)]$.

Обозначим через $\{g_j\}$ произвольный ортонормированный базис в l_2, а через $P_n (n = 1, 2, \ldots)$ — ортогональный проектор на линейную оболочку векторов $\{g_j\}_1^n$. В силу теоремы 1.1 [6] в каждой точке λ области G

$$\det w_{\theta_A}(\lambda) = \lim_{n \to \infty} (E - P_n m(\lambda) P_n) = \lim_{n \to \infty} \Delta n(\lambda).$$

В силу оценки (61) на любой ограниченной замкнутой части области G голоморфные функции $\Delta n(\lambda) (n = 1, 2, \ldots)$ равномерно ограничены. Отсюда в силу известной теоремы теории функций их предел $\det w_{\theta_A}(\lambda)$ — голоморфная функция в G. Таким образом, функция $w_1(\lambda) = (\det w_{\theta_A}(\lambda)) w^{-1}_{\theta_A}(\lambda)$ — голоморфна в области G.

Из оценки

$$|m(\lambda)|_2=\sum_i(m^*(\lambda)m(\lambda)g_i,\ g_i)=$$

$$=\sum_i(K^*R_\lambda Kg_i,\ K^*R_\lambda Kg_i)\leqslant\|KK^*\|\,\|R_\lambda\|^2\sum_1^\infty\|Kg_i\|^2 \qquad (66)$$

следует, что при $\lambda\to\infty$ $m(\lambda)$ стремится к нулю в метрике банахового пространства σ_2 [6]. Тогда из теоремы 2.1 [6] следует, что

$$\lim_{\lambda\to\infty}\{\det(E-m(\lambda))e^{spm(\lambda)}\}=1.$$

Но из оценки (61) вытекает, что

$$\lim_{\lambda\to\infty}sp(m(\lambda))=0.$$

Таким образом,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\det w_{\theta_A}(\lambda)=\lim_{\lambda\to\infty}\det(E-m(\lambda))=1. \qquad (67)$$

Используя (67), нетрудно показать, что

$$\lim_{\lambda\to\infty}\|w_1(\lambda)-E\|=0. \qquad (68)$$

Из (64) и (65) вытекает, что

$$w_1^*(\lambda)w_1(\lambda)-E\geqslant 0 \qquad (\operatorname{Im}\lambda>0), \qquad (69)$$

$$w_1^*(\lambda)w_1(\lambda)-E=0 \qquad (\operatorname{Im}\lambda=0 \quad \lambda\overline{\in}[\alpha(0),\ \alpha(l)]. \qquad (70)$$

Соотношения (68), (69) и (70) означают, что $w_1(\lambda)\in\Omega_E^{(q)}$, и тем самым теорема доказана.

Вычислим теперь корреляционную функцию случайного процесса $x(t)=e^{i\tilde{A}t}\psi_0(x)$, где $\psi_0(x)\in\tilde{L}_2(0,\ l)$, а $\tilde{A}$ имеет вид (56).
Очевидно,

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{V}(t,\ s)=\sum_{m=1}^\infty(e^{i\hat{A}t}\psi_{0m}(x),\ e^{i\hat{A}s}\psi_{0m}(x)),\\&\psi_0(x)=\|\psi_{01}(x),\ \psi_{02},\ \ldots\|\in\tilde{L}_2(0,\ l).\end{aligned}\right\} \qquad (71)$$

Из оценки

$$\Big|\sum_{m=1}^\infty(e^{i\hat{A}t}\psi_{0m}(x),\ \ e^{i\hat{A}s}\psi_{0m}(x))\Big|\leqslant\sum_{m=1}^\infty\|\psi_{0m}\|^2=\|\psi_0\|$$

следует, что ряд (71) сходится равномерно по t и s. Тогда ясно, что

$$\tilde{V}_\infty(t-s)=\lim_{\tau\to\infty}\tilde{V}(t+\tau,\ s+\tau)=$$

$$=\sum_{m=1}^\infty\lim_{\tau\to\infty}(e^{i\hat{A}(t+\tau)}\psi_{0m},\ e^{i\hat{A}(s+\tau)}\psi_{0m}).$$

Отсюда, используя (50), получаем

$$\tilde{V}_\infty(t-s)=\sum_{m=1}^\infty\int_0^l e^{i\alpha(x)(t-s)}dK_0^{(m)}(x),$$

где

$$K_0^{(m)}(x)=\int_0^x\psi_{0m}(\xi)\overline{\psi}_{0m}(\xi)\,d\xi-\int_0^\infty\Phi_m(x,\ t)\overline{\Phi_m(x,}\ t)\,dt.$$

Из оценки $\sum_{m=1}^{\infty} K_0^{(m)}(x) \leqslant \tilde{V}_{\infty}(0)$ вытекает, что ряд $\sum_{m=1}^{\infty} K_0^{(m)}(x)$ сходится равномерно.

Так как ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(x, t)\overline{\Phi_m(x, t)} = \sum_{m=1}^{\infty} |e^{i\hat{A}t}\psi_{0m}(x), P_x g_m)|^2 \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \|\psi_{0m}\|^2$$

сходится равномерно, то

$$K_0(x) = \sum_{m=1}^{\infty} K_0^{(m)}(x) = \int_0^x \psi_0(\xi)\psi_0^*(\xi)\,d\xi - \int_0^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\Phi_m(x, t)|^2\,dt.$$

Обозначим

$$S_m(x) = \sum_{j=1}^{m} K_0^{(j)}(x),$$

$S_m(x)$ — монотонные функции от x, которые при $m \to \infty$ монотонно стремятся к $K_0(x)$.

По теореме Хелли

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^l e^{i\alpha(x)(t-s)}\,dS_m(x) = \int_0^l e^{i\alpha(x)(t-s)}\,dK_0(x),$$

или

$$\tilde{V}_{\infty}(t-s) = \int_0^l e^{i\alpha(x)(t-s)}\,dK_0(x). \tag{72}$$

Кроме того,

$$|\tilde{\omega}(t, s)| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} |(e^{i\hat{A}t}\psi_{0m}, g_m)| \cdot |(g_m, e^{i\hat{A}s}\psi_{0m})| \leqslant \|\psi_0\|. \tag{73}$$

Используя (72) и (73), получаем следующую теорему.

Теорема 8. *Корреляционная функция модельного процесса* $x(t) = e^{i\tilde{A}t}\psi_0$ *имеет вид*

$$\tilde{V}(t, s) = \int_0^l e^{i\alpha(x)(t-s)}\,dK_0(x) +$$

$$+ \int_0^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(l, t+\tau)\overline{\Phi_m(l, s+\tau)}\,d\tau, \tag{74}$$

где

$$K_0(x) = \int_0^x \psi_0(\xi)\psi_0^*(\xi)\,d\xi - \int_0^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(x, t)\overline{\Phi_m(x, t)}\,dt,$$

$$\psi_0 = \|\psi_{01}, \psi_{02}, \ldots\ldots\| \in \tilde{L}_2(0, l),$$

$$\Phi_m(x, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} e^{i\lambda t} \left\{ \int_0^x \frac{\psi_{0m}(\xi)}{\lambda - \alpha(\xi)} \cdot e^{i\int_{\xi}^{x} \frac{d\eta}{\lambda - \alpha(\eta)}}\,d\xi \right\} d\lambda.$$

Используя теоремы 7 и 8 и повторяя рассуждения, приведенные при доказательствах теорем 5 и 6, получаем следующие две теоремы.

Теорема 9. *Пусть случайный процесс* $x(t) \in D^{(\infty)}[\alpha(x)]$ и $\alpha(x)$ *является непрерывной функцией. Тогда корреляционная функция процесса* $x(t)$ *имеет вид*

$$V(t,\ s) = \tilde{V}(t,\ s) + F(t-s), \tag{75}$$

где функция $\tilde{V}(t,\ s)$ *имеет вид (74), а* $F(t-s)$ — *эрмитово положительная функция с ограниченным спектром.*

Теорема 10. *Если заданная функция* $V(t,\ s)$ *представима в виде (75), то существует гауссовский процесс* $x(t) \in D^{(\infty)}[\alpha(x)]$, *корреляционная функция которого совпадает с* $V(t,\ s)$.

§ 5. Случайные процессы класса $D^{(r)}[x]$

Рассмотрим частный случай, когда $\alpha(x) = x$. Теперь оператор $\hat{A}$ имеет вид

$$\hat{A}f(x) = xf(x) + i\int_0^x f(\xi)\,d\xi. \tag{76}$$

Тогда

$$\Phi(x,\ t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{i\lambda t}\left\{\int_0^x \frac{\psi_0(\xi)}{\lambda-\xi}\, e^{i\ln\frac{\lambda-\xi}{\lambda-x}}\,d\xi\right\}d\lambda \tag{77}$$

или, выполняя интегрирование по λ, получим

$$\Phi(x,\ t) = e^{ixt}\int_0^x \psi_0(\xi)\,M(1-i,\ 1,\ it(\xi-x))\,d\xi, \tag{78}$$

где $M(a,\ c,\ z)$ — функция Куммера,

$$M(a,\ c,\ z) = 1 + \frac{a}{c}\cdot\frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + \ldots$$

Подставляя в соотношение

$$\hat{x}(t) = e^{i\hat{A}t}\psi_0(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{i\lambda t}(\hat{A}-\lambda E)^{-1}\psi_0 d\lambda$$

выражение для резольвенты оператора $\hat{A}$, получим

$$\hat{x}(t) = e^{ixt}\psi_0(x) + \frac{1}{2\pi}\int_\gamma e^{i\lambda t}\left\{\int_0^x \frac{\psi_0(\xi)\,e^{i\ln\left(\frac{\lambda-\xi}{\lambda-x}\right)}}{(\lambda-x)(\lambda-\xi)}\,d\xi\right\}d\lambda.$$

После несложных вычислений получим

$$\hat{x}(t) = e^{ixt}(\psi_0(x) - t\int_0^x M(1-i,\ 2,\ it(\xi-x))\,\psi_0(\xi)\,d\xi. \tag{79}$$

Интегрируя в (79) по частям и предполагая, что $\psi_0(x)$ — дифференцируемая функция на $[0,\ l]$ и $\psi_0(0) = 0$, имеем

$$\hat{x}(t) = e^{ixt}\int_0^x M(-i,\ 1,\ it(\xi-x))\,\psi_0'(\xi)\,d\xi. \tag{80}$$

Асимптотическое поведение вырожденной гипергеометрической функции описывается формулой (при $|z| \gg a,\ |z| \gg c$)

$$M(a,\ c,\ z)\approx\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}(-z)^{-a}\left\{1-\frac{a(a-c+1)}{z}+\right.$$
$$\left.+\frac{a(a+1)(a-c+1)\ (a-c+2)}{2!z^2}+\cdots\right\}+$$
$$+\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}e^z z^{a-c}\left\{1+\frac{(1-a)(c-a)}{z}+\frac{(1-a)(2-a)(c-a)(c-a+1)}{2!z^2}+\cdots\right\}. \tag{81}$$

Отсюда, фиксируя $\varepsilon>0$ и используя (80) и (81), для больших τ получаем

$$\hat{x}(t+\tau)\approx\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{\Gamma(1+i)}I_1(\varepsilon)+\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{\Gamma(1+i)}I_2(\varepsilon), \tag{82}$$

где

$$I_1(\varepsilon)=\int_0^{x-\varepsilon}e^{ix(t+\tau)}e^{i\ln(x-\xi)(t+\tau)}\psi_0'(\xi)\,d\xi,$$

$$I_2(\varepsilon)=\int_{x-\varepsilon}^{x}e^{ix(t+\tau)}M(-i,\ 1,\ i(t+\tau)(\xi-x))\psi_0'(\xi)\,d\xi.$$

Функция $M(-i,\ 1,\ z)$ является целой функцией от z и из асимптотики (81) видно, что она ограничена на мнимой оси, т. е.

$$|M(-i,\ 1,\ it(\xi-x))|<C. \tag{83}$$

Далее,

$$\lim_{\tau\to\infty}e^{-ix\tau}e^{-i\ln\tau}I_1(\varepsilon)=\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{\Gamma(1+i)}\int_0^{x-\varepsilon}e^{ixt}e^{i\ln(x-\xi)}\psi_0'd\xi. \tag{84}$$

Покажем, что

$$\lim_{\tau\to\infty}e^{-ix\tau}e^{-i\ln\tau}\hat{x}(t+\tau)=\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}e^{ixt}}{\Gamma(1+i)}\int_0^{x}e^{i\ln(x-\xi)}\psi_0'(\xi)\,d\xi.$$

Зададим $\varepsilon>0$. Выберем достаточно $\delta>0$ такое, что

$$C\int_{x-\delta}^{x}|\psi_0'(\xi)|\,d\xi<\frac{\varepsilon}{3},\ \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{|\Gamma(1+i)|}\int_{x-\delta}^{x}|\psi_0'(\xi)\cdot d\xi<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{85}$$

Теперь зафиксируем $\delta>0$. Из асимптотики (81) вытекает, что

$$\lim_{\tau\to\infty}e^{-ix\tau}e^{-i\ln\tau}\int_0^{x-\delta}e^{ix(t+\tau)}M(-i,\ 1,\ i(t+\tau)(\xi-x))\psi_0'd\xi=$$
$$=\lim_{\tau\to\infty}e^{-ix\tau}e^{-i\ln\tau}I_1(\delta)=e^{-\frac{\pi}{2}}e^{ixt}\int_0^{x-\delta}e^{i\ln(x-\xi)}\psi_0'd\xi. \tag{86}$$

Обозначим

$$m(\delta)=e^{-\frac{\pi}{2}}e^{ixt}\int_0^{x-\delta}e^{i\ln(x-\xi)}\psi_0'(\xi)\,d\xi.$$

Используя (86), найдем $\tau_0(\varepsilon,\ \delta)$ такое, что при $\tau>\tau_0$ имеет место неравенство

$$|e^{-ix\tau}e^{-i\ln\tau}\int_0^{x-\delta}e^{ix(t+\tau)}M(-i,\ 1,\ i(t+\tau)(\xi-x)\psi_0'(\xi)\,d\xi-m(\delta)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{87}$$

Из оценок (85) и (87) получим

$$\left| e^{-ix\tau} e^{-i\ln\tau} \hat{x}(t+\tau) - \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{\Gamma(1+i)} e^{ixt} \int_0^x e^{i\ln(x-\xi)} \psi_0'(\xi)\, d\xi \right| < \varepsilon.$$

Тем самым доказана следующая

Теорема 11. *Для случайного процесса* $\hat{x}(t) = e^{i\hat{A}t}\psi_0$, *где*

$$\hat{A}f(x) = xf(x) + i\int_0^x f(\xi)\, d\xi,$$

$\psi_0(\xi)$ — *дифференцируемая функция*, $\psi_0'(\xi) \in L_2(0, l)\, \psi_0(0) = 0$, *существует*

$$\lim_{\tau\to\infty} e^{-i\ln\tau} e^{-ix\tau} \hat{x}(t+\tau) = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}} e^{ixt}}{\Gamma(1+i)} \int_0^x \psi_0'(\xi)\, e^{i\ln(x-\xi)} d\xi. \tag{88}$$

Введем линейный оператор

$$S\psi_0(x) = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{\Gamma(1+i)} \int_0^x \psi_0'(\xi)\, e^{i\ln(x-\xi)} d\xi. \tag{89}$$

Используя неравенство Коши — Буняковского и оценку (83), получим оценку

$$|\hat{x}(t+\tau)| \leqslant Cl^{\frac{1}{2}} \| \psi_0'(\xi) \|. \tag{90}$$

Используя (90) и (88) и применяя теорему Лебега о предельном переходе получим

$$\lim_{\tau\to\infty} \int_0^l \hat{x}(t+\tau)\overline{\hat{x}(s+\tau)}\, dx = \int_0^l e^{ix(t-s)} S\psi_0 \overline{S\psi_0}\, dx. \tag{91}$$

Так как $\hat{x}(t)$ является диссипативным процессом, то

$$\| S\psi_0(x) \| \leqslant \| \psi_0(x) \|, \tag{92}$$

(92) показывает, что S можно распространить по непрерывности на все $L_2(0, l)$. Тем самым получаем следующую

Теорема 12. *Пусть случайный процесс* $x(t) \in D^{(1)}[x]$ *и пусть оператор* A в представлении $x(t) = e^{iAt}x(0)$ *является простым оператором. Тогда*

$$\lim_{\tau\to\infty} V(t+\tau,\ s+\tau) = (e^{ix(t-s)} S\psi_0,\ S\psi_0), \tag{93}$$

где S — *линейный ограниченный оператор, действующий в* $L_2(0, l)$ *и имеющий на плотном в* $L_2(0, l)$ *множестве следующий вид:*

$$S\psi_0(x) = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{\Gamma(1+i)} \int_0^x \psi_0'(\xi)\, e^{i\ln(x-\xi)}\, d\xi,$$

$\psi_0(\xi)$ — дифференцируемая функция на $[0, l]$, $\psi_0'(\xi) \in L_2(0, l)$. Очевидно, ранее введенный оператор $\hat{T}$ ($\hat{T} = \lim e^{-i\hat{A}^* t} e^{-i\hat{A}t}$) связан с оператором S равенством $\hat{T} = S^*S$. Отсюда вытекает, что в этом случае оператор $\hat{T}$ задается формулой

$$\hat{T}\psi(x) = \frac{e^{-\pi}}{\Gamma(1-i)\Gamma(1+i)} \int_x^l \left\{ \int_0^\xi e^{i\ln\frac{\xi-\eta}{\xi-x}} \psi''(\eta) \right\} d\xi, \tag{94}$$

$\psi_0(x)$ — дважды дифференцируемая функция на $[0, l]$ и $\psi_0''(x) \in L_2$,

$$\psi_0(0) = \psi_0'(0) = 0.$$

Имеет место следующая

Теорема 13. *Пусть случайный процесс* $x(t) \in D^{(r)}[x]$. *Тогда корреляционная функция процесса* $x(t)$ *имеет вид*

$$V(t, s) = (e^{ix(t-s)}\tilde{S}\psi_0(x), \quad \tilde{S}\psi_0(x)) + \int_0^\infty \sum_{m=1}^r \Phi_m(l, \ t+\tau)\overline{\Phi_m(l, \ s+\tau)}\,d\tau + F(t-s), \qquad (95)$$

где

$$\psi_0(x) = \| \psi_{01}(x), \ \ldots, \ \psi_{0r}(x) \| \in L_2^{(r)},$$

$\underbrace{\tilde{S} = S \oplus S \oplus \cdots \oplus S,}_{r}$ $\quad S$ задается (89)

$$\Phi_m(l, \ t) = e^{ilt}\int_0^l \psi_{0m} M(1-i, \ 1, \ it(x-l))\,dx,$$

$F(t-s)$ — эрмитово положительная функция с ограниченным спектром.

Теорема 14. *Если заданная функция* $V(t, s)$ *представима в виде (95), то существует гауссовский* процесс $x(t) \in D^{(r)}[x]$, *корреляционная функция которого совпадает с* $V(t, s)$.

Доказательство теорем (13) и (14) проводится аналогично доказательствам теорем 5 и 6.

В заключение выражаю искреннюю благодарность М. С. Лившицу и А. А. Янцевичу за постановку проблемы и за ценные указания и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Ито. Вероятностные процессы. ИЛ, 1963.
2. Ю. А. Розанов. Стационарные случайные процессы. М., Физматгиз, 1963.
3. М. С Бродский, М. С. Лившиц. Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы. УМН, XIII, вып. 1, 1791, 1958, 3—85.
4. М. С. Бродский. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. М., «Наука», 1969.
5. М. С. Бродский. Об интегральном представлении ограниченных несамосопряженных операторов с вещественным спектром. ДАН, 126, № 6 (1959), 1166—1169.
6. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов.
7. М. С. Лившиц, А. А. Янцевич. Тезисы к докладу «Несамосопряженные операторы и случайные процессы». Харьковская областная конференция научных работников, посвященная 100-летию со дня рождения В. И. Ленина, 1970.

Поступила 20 мая 1970 г.