ПРЕДЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В МНОГОСЛОЙНОЙ ОБЛАСТИ

В. А. Львов

Введение

Рассмотрим в трехмерном пространстве R_3 семейство замкнутых гладких поверхностей $\{S_k^{(n)}\}$, которые являются поверхностями уровня некоторой однозначной функции $F(x_1, x_2, x_3)$, принадлежащей классу $C_{4+\gamma}$ (производные четвертого порядка в R_3 удовлетворяют условию Гельдера с показателем γ). Пусть $S_k^{(n)}$ определяется уравнением $F = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{n} k = d_k^{(n)}$ $(k = 0,1, \ldots, n)$, $0 < \alpha < \beta$ и фиксировано. Положим $S^{(n)} = \bigcup\limits_{k=0}^{n} S_k^{(n)}$. Область, являющуюся дополнением $S^{(n)}$ до всего пространства, обозначим через $D^{(n)}$. Таким образом, $D^{(n)}$ состоит из области D_i, внутренней по отношению к $S_0^{(n)}$, области D_e, внешней по отношению к $S_n^{(n)}$, и слоев $D_k^{(n)}$, заключенных между поверхностями $S_k^{(n)}$ и $S_{k+1}^{(n)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

В области $D^{(n)}$ рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\Delta U^{(n)}(P) - \lambda^2 U^{(n)}(P) = f(P) \quad P \in D^{(n)}, \tag{1}$$

$$\left[\left(\frac{\partial U^{(n)}(P)}{\partial n}\right)^- - \left(\frac{\partial U^{(n)}(P)}{\partial n}\right)^+\right]_{S^{(n)}} = 0, \tag{2}$$

$$[(U^{(n)}(P))^- - (U^{(n)}(P))^+]_{S^{(n)}} = h\left[\varphi(P)\frac{\partial U^{(n)}(P)}{\partial n}\right]_{S^{(n)}}, \tag{3}$$

где $h = \frac{\alpha - \beta}{n}$ и $\varphi(P)$ — произвольная неотрицательная класса $C_{3+\gamma}$ в слое, заключенном между поверхностями $S_0^{(n)}$ и $S_n^{(n)}$, функция, равная нулю вне этого слоя. Внутреннюю область по отношению к $S_k^{(n)}$ будем отмечать знаком $+$, внешнюю — знаком $-$. Соответственно предельные значения функций и их нормальных производных с одной и другой стороны поверхностей отмечены знаками $+$ и $-$. Нормаль имеет направление от $+$ к $-$.

Краевые задачи вида (1) — (3) возникают как предельные случаи второй краевой задачи в областях, границы которых состоят из сильно изрешеченных поверхностей [1].

Наряду с задачей (1) — (3) рассмотрим решение во всем пространстве следующего уравнения эллиптического типа

$$\Delta V(P) - \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{|\nabla F(P)|\varphi(P)}{1 + |\nabla F(P)|\varphi(P)} \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_j}}{|\nabla F(P)|^2}\frac{\partial V(P)}{\partial x_j}\right] - \lambda^2 V(P) = f(P). \tag{4}$$

В дальнейшем мы рассматриваем функции Грина $(\lambda^2 > 0)$ задач (1) — (3) и (4), которые обозначаем $G^{(n)}(P, Q; \lambda)$ и $G(P, Q; \lambda)$ соответственно.

Рассмотрим последовательность областей $D^{(n)}$ и соответствующие им функции Грина $G^{(n)}(P, Q; \lambda)$ задачи (1) — (3). Исследуем поведение последовательности функций Грина $G^{(n)}(P, Q; \lambda)$ при $n \to \infty$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если точка Q лежит вне слоя, заключенного между поверх-*

ностями $S_0^{(n)}$ *и* $S_n^{(n)}$, *то при* $n \to \infty$ *последовательность* $G^{(n)}(P, Q)\lambda$; *сходится в метрике пространства* $L_2(R_3)$ *к функции* $G(P, Q; \lambda)$, *т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{R_3} |G^{(n)}(P, Q; \lambda) - G(P, Q; \lambda)|^2 d\tau_P = 0.$$

При этом сходимость равномерна относительно $P, Q \in K$, *где* K — *любое компактное множество, лежащее вне слоя, заключенного между поверхностями* $S_0^{(n)}$ *и* $S_n^{(n)}$.

Заметим, что в настоящей работе обобщается результат, полученный в [2], где рассматривался случай границы, состоящей из системы параллельных плоскостей.

I. Построение аппроксимирующей функции

При каждом фиксированном n построим функцию $W^{(n)}(P, Q; \lambda)$, аппроксимирующую функцию $G^{(n)}(P, Q; \lambda)$ при больших значениях n. Для определенности считаем, что точка $Q \in D_i$ и фиксирована.

В области $D^{(n)}$ функцию $W^{(n)}$ определяем следующими равенствами:

$$W^{(n)}(P, Q; \lambda) = \begin{cases} G(P, Q; \lambda) & P \in D_i \\ W_k^{(n)}(P, Q; \lambda) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) & P \in D_k^{(n)} \\ G(P, Q; \lambda) + hR^{(n)}(P_n, Q; \lambda)\chi(P) & P \in D_e, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $G(P, Q; \lambda)$ является функцией Грина задачи (4).

В каждом слое $D_k^{(n)}$ $(k = 0, 1, \dots, n-1)$ функция $W_k^{(n)}$ имеет следующий вид:

$$W_k^{(n)}(P, Q; \lambda) = a_k^{(n)}(P_k) + [F(P) - d_k^{(n)}]\, b_k^{(n)}(P_k) + [F(P) - d_k^{(n)}]^2 C_k^{(n)}(P_k), \tag{1.2}$$

где произвольная точка из слоя $D_k^{(n)}$ обозначена через P, и P_k есть точка пересечения линии, ортогональной к семейству $\{S_k^{(n)}\}$, с поверхностью $S_k^{(n)}$. Заметим*, что коэффициенты $a_k^{(n)}$, $b_k^{(n)}$, $C_k^{(n)}$ постоянны вдоль линии, ортогональной к семейству $\{S_k^{(n)}\}$.

Для того чтобы функция $W^{(n)}(P, Q; \lambda)$ удовлетворяла граничным условиям (2)-(3) на поверхностях $S_k^{(n)}$ $(k = 0, 1, \dots, n-1)$, необходимо положить

$$a_0^{(n)}(P_0) = G(P, Q; \lambda)|_{P=P_0}, \tag{1.3}$$

$$a_k^{(n)}(P_k) = G(P, Q; \lambda)|_{P=P_0} + h \sum_{i=0}^{k} [1 + |\nabla F(P_i)|\varphi(P_i)]\, b_i^{(n)}(P_i) - \frac{h}{2}[b_0^{(n)}(P_0) + b_k^{(n)}(P_k)] \quad (k = 0, 1, \dots, n-1), \tag{1.4}$$

$$C_k^{(n)}(P_k) = \frac{1}{2h}[b_{k+1}^{(n)}(P_{k+1}) - b_k^{(n)}(P_k)] \tag{1.5}$$

$$(k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Положим

$$R^{(n)}(P_n, Q; \lambda) = \frac{1}{h}[W_{n-1}^{(n)}(P, Q; \lambda) - G(P, Q; \lambda)]_{P=P_n} \tag{1.6}$$

* Для краткости здесь и в дальнейшем зависимость коэффициентов $a_k^{(n)}$, $b_k^{(n)}$, $C_k^{(n)}$ от точки Q и параметра λ опускается.

и выберем в качестве $\chi(P)$ произвольную бесконечно дифференцируемую функцию, обладающую следующими свойствами:

1) $\chi(P)=1$, когда $P \in S_n^{(n)}$;

2) $\chi(P)=0$, когда P принадлежит области, лежащей вне поверхности S_δ, определяемой уравнением $F(P)=d_n^{(n)}+\delta$ ($\delta>0$ и фиксировано);

3) $\frac{\partial\chi(P)}{\partial n}=0$, когда $P \in S_n^{(n)}$;

4) $\chi(P)$ — постоянна на каждой поверхности уровня функции $F(P)$.

Тогда функция $W^{(n)}(P, Q; \lambda)$ будет удовлетворять граничным условиям (2)-(3) на всех поверхностях $S_k^{(n)}$ $(k=0, 1, \ldots, n)$.

Для всех $k=0, 1, \ldots, n$ коэффициенты $b_k^{(n)}$ полагаем равными

$$b_k^{(n)}(P_k)=\frac{1}{|\nabla F(P)|(1+|\nabla F(P)|\varphi(P))}\frac{\partial G(P, Q; \lambda)}{\partial n}\bigg|_{P=P_k}. \tag{1.7}$$

Именно такой выбор $b_k^{(n)}$ обеспечит близость $W^{(n)}(P, Q; \lambda)$ к $G^{(n)}(P, Q; \lambda)$.

Покажем, что функция $W^{(n)}(P, Q; \lambda)$, определяемая равенствами (1.1), близка к функции $G(P, Q; \lambda)$ в метрике пространства $L_2(R_3)$. Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть функция $\varphi(P)$ обращается в нуль вне области B, заключенной между поверхностями $S_0^{(n)}$ и $S_n^{(n)}$, принадлежит классу $C_{3+\gamma}(0<\gamma<1)$, функция $F(P)$ принадлежит классу $C_{4+\gamma}$, $\lambda^2>0$ и точка $Q \in D_i$, тогда функция Грина уравнения (4) в области B принадлежит классу C_4, и справедлива следующая оценка:*

$$\| G(P, Q; \lambda)\|_{C_4(B)} \leqslant C(\rho, \lambda), \tag{1.8}$$

где ρ — расстояние от точки Q до поверхности $S_0^{(n)}$.

Доказательство. Функцию Грина уравнения (4), являющегося уравнением эллиптического типа, ищем в таком виде:

$$G(P, Q; \lambda)=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{-\lambda r_{PQ}}}{r_{PQ}}-g(P, Q; \lambda)\right], \tag{1.9}$$

где $g(P, Q; \lambda)$ определяем как экспоненциально убывающее на бесконечности решение уравнения

$$\Delta g(P, Q; \lambda)-\sum_{i, j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{|\nabla F(P)|\varphi(P)}{1+|\nabla F(P)|\varphi(P)}\,\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_j}}{|\nabla F(P)|^2}\,\frac{\partial g(P, Q; \lambda)}{\partial x_j}\right]-$$
$$-\lambda^2 g(P, Q; \lambda)=$$
$$=\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{|\nabla F(P)|\varphi(P)}{1+|\nabla F(P)|\varphi(P)}\,\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_j}}{|\nabla F(P)|^2}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{e^{-\lambda r_{PQ}}}{r_{PQ}}\right)\right].$$

Решение этого уравнения существует и единственно [3]. Из условия леммы вытекает, что коэффициенты и правая часть уравнения для функции $g(P, Q; \lambda)$ принадлежат классу $C_{2+\gamma}$. Поэтому из теоремы о гладкости решений уравнений эллиптического типа [4] следует, что $g(P, Q; \lambda)$ вместе со своими производными до четвертого порядка включительно непрерывна в R_3. Отсюда, учитывая представление (1.9), получаем оценку (1.8). Лемма доказана.

Обратимся теперь к функции $W_k^{(n)}(P, Q; \lambda)$. С учетом равенств (1.2) — (1.5) и (1.7) функция $W_k^{(n)}$ в слое $D_k^{(n)}$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ принимает следующий вид:

$$G(P, Q; \lambda)\Big|_{P=P_0} + \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial G(P, Q; \lambda)}{\partial n} \frac{h}{|\nabla F(P)|}\Big|_{P=P_i} -$$

$$-\frac{h}{2}\left[\frac{1}{|\nabla F(P)|(1+|\nabla F(P)|\varphi(P))} \frac{\partial G(P, Q; \lambda)}{\partial n}\Big|_{P=P_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{|\nabla F(P)|(1+|\nabla F(P)|\varphi(P))} \frac{\partial G(P, Q; \lambda)}{\partial n}\Big|_{P=P_k}\right] +$$

$$+ [F(p) - d_k^{(n)}]\left[\frac{1}{|\nabla F(P)|(1+|\nabla F(P)|\varphi(P))} \frac{\partial G(P, Q; \lambda)}{\partial n}\right]_{P=P_k} +$$

$$+ \frac{[F(P) - d_k^{(n)}]^2}{2h}\left[\frac{1}{|\nabla F(P)|(1+|\nabla F(P)|\varphi(P))} \frac{\partial G(P, Q; \lambda)}{\partial n}\Big|_{P=P_{k+1}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{|\nabla F(P)|(1+|\nabla F(P)|\varphi(P))} \frac{\partial G(P, Q; \lambda)}{\partial n}\Big|_{P=P_k}\right].$$

Второе слагаемое есть не что иное, как интегральная сумма для $\int\limits_{P_0}^{P} \frac{\partial G(P, Q; \lambda)}{\partial n} ds$, поэтому

$$W_k^{(n)}(P, Q; \lambda) = G(P, Q; \lambda) + \varepsilon_k^{(n)}(P, Q; \lambda), \tag{1.10}$$

где $\varepsilon_k^{(n)}$ представляет собой произведение величины порядка h на величину, ограниченную в силу леммы 1.

Отсюда следует, что

$$\| W_k^{(n)}(P, Q; \lambda) - G(P, Q; \lambda)\|_{C(D_k^{(n)})} \leqslant hC_1(Q; \lambda) \tag{1.11}$$

в каждом слое $D_k^{(n)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Из равенств (1.1) и (1.6) следует, что в области D_e функцию $W^{(n)}$ можно представить так:

$$W^{(n)}(P, Q; \lambda) = G(P, Q; \lambda) + [W_{n-1}^{(n)}(P, Q; \lambda) - G(P, Q; \lambda)]_{P=P_n} \chi(P). \tag{1.12}$$

Отсюда, используя оценку (1.11) и свойства $\chi(P)$, получаем

$$\| W^{(n)}(P, Q; \lambda) - G(P, Q; \lambda)\|_{C(D_e)} \leqslant hC_2(Q; \lambda). \tag{1.13}$$

Учитывая равенства (1.1), оценки (1.11) и (1.13), получаем

$$\left[\int\limits_{R_3} |W^{(n)}(P, Q; \lambda) - G(P, Q; \lambda)|^2 d\tau_P\right]^{1/2} \leqslant hC_3(Q; \lambda), \tag{1.14}$$

где константа C_3 не зависит от n.

Рассмотрим теперь функцию

$$\Gamma^{(n)}(P, Q; \lambda) = G^{(n)}(P, Q; \lambda) - W^{(n)}(P, Q; \lambda).$$

Из свойств функции $G^{(n)}$ и $W^{(n)}$ вытекает, что $\Gamma^{(n)}$ в области $D^{(n)}$ удовлетворяет уравнению $\Delta\Gamma^{(n)} - \lambda^2\Gamma^{(n)} = f^{(n)}$, где

$$f^{(n)}(P, Q; \lambda) = -\Delta W^{(n)}(P, Q; \lambda) + \lambda^2 W^{(n)}(P, Q; \lambda), \tag{1.15}$$

а на поверхностях $S^{(n)}$ она удовлетворяет граничным условиям (2)-(3).

Покажем, что для функции $f^{(n)}$ справедлива оценка

$$\left[\int\limits_{R_3} |f^{(n)}(P, Q; \lambda)|^2 d\tau_P\right]^{1/2} \leqslant hC_4(Q; \lambda), \tag{1.16}$$

где константа C_4 не зависит от n.

Для этого в слое $D_k^{(n)}$ ($k=0, 1, \ldots, n-1$) введем криволинейную систему координат (u, v, t) следующим образом: каждая точка $P \in D_k^{(n)}$ характеризуется координатами (u, v, t), где $t = F(P)$, а (u, v) — некоторые координаты на поверхности $F(P) = d_k^{(n)}$. Будем характеризовать точки $P \in D_k^{(n)}$ радиус-вектором $\vec{r}(u, v, t)$.

Оператор Лапласа в криволинейной системе координат представим в виде суммы двух частей M и N, где M содержит дифференцирование только по переменным (u, v), а N по переменной t.

Соответственно оператор, стоящий в левой части уравнения (4), представим в виде суммы M и N', где N' содержит дифференцирование только по переменной t.

В дальнейшем нам понадобятся явные выражения для операторов N и N'. Они имеют вид

$$N = \frac{1}{|\vec{r}_t|\,|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}{|\vec{r}_t|} \frac{\partial}{\partial t}\right), \tag{1.17}$$

$$N' = \frac{1}{|\vec{r}_t|\,|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}{|\vec{r}_t|}\right) \frac{|\vec{r}_t|}{|\vec{r}_t| + \varphi(P)} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{|\vec{r}_t|^2} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{|\vec{r}_t|}{|\vec{r}_t| + \varphi(P)} \frac{\partial}{\partial t}\right).$$

Из равенств (1.2) и (1.15) следует, что в каждом слое $D_k^{(n)}$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$)

$$f^{(n)}(P, Q; \lambda) = -\{(M - \lambda^2)[W_k^{(n)}(P, Q; \lambda)] + b_k^{(n)}(u, v) N[t - d_k^{(n)}] + C_k^{(n)}(u, v) N[(t - d_k^{(n)})^2]\},$$

где $P = P(u, v, t)$. Принимая во внимание равенства (1.5), (1.7) и (1.17), получаем

$$\begin{aligned} f^{(n)}(P, Q; \lambda) = &-\Bigg\{(M - \lambda^2)[W_k^{(n)}(P, Q; \lambda)] + \\ &+ \frac{1}{|\vec{r}_t|\,|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}{|\vec{r}_t|}\right)\left[\frac{|\vec{r}_t|}{|\vec{r}_t| + \varphi(P)} \frac{\partial G(P, Q; \lambda)}{\partial t}\right]_{t=d_k^{(n)}} + \\ &+ \frac{1}{|\vec{r}_t|^2} \frac{1}{h}\left[\frac{|\vec{r}_t|}{|\vec{r}_t| + \varphi(P)} \frac{\partial G(P, Q; \lambda)}{\partial t}\Bigg|_{t=d_{k+1}^{(n)}} - \right. \\ &\left. - \frac{|\vec{r}_t|}{|\vec{r}_t| + \varphi(P)} \frac{\partial G(P, Q; \lambda)}{\partial t}\Bigg|_{t=d_k^{(n)}}\right] + (t - d_k^{(n)})\, \varepsilon^{(n)}(P, Q; \lambda)\Bigg\}, \end{aligned}$$

где $\varepsilon^{(n)}(P, Q; \lambda)$ выражается через $\frac{\partial G}{\partial n}$, и поэтому в силу леммы 1 ограничена.

Рассмотрим первое слагаемое из фигурной скобки. Так как оператор M содержит только дифференцирование по переменным (u, v), то, используя представление для функции $W_k^{(n)}$ в слое $D_k^{(n)}$ и проводя рассуждения, аналогичные установлению оценки (1.11), получим

$$\| M[W_k^{(n)}(P, Q; \lambda) - G(P, Q; \lambda)] \|_{C(D_k^{(n)})} \leqslant hC_5(Q; \lambda) \tag{1.18}$$

в каждом слое $D_k^{(n)}$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$).

Следовательно, первое слагаемое с точностью до величины порядка h есть $(M - \lambda^2)[G(P, Q; \lambda)]$. Второе и третье слагаемые дают с точностью до величины порядка h, $N'[G(P, Q; \lambda)]$. Поэтому, принимая во внимание равенство $(M + N' - \lambda^2)[G(P, Q; \lambda)] = 0$ (точка $Q \in D_i$), получаем оценку

$$\| f^{(n)}(P, Q; \lambda) \|_{C(D_k^{(n)})} \leqslant hC_6(Q; \lambda) \tag{1.19}$$

в каждом слое $D_k^{(n)}$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$).

Из равенств (1.1), (1.12) и (1.15) следует, что в области D_ε

$$f^{(n)}(P, Q; \lambda) = -(\Delta - \lambda^2)[(W_{n-1}^{(n)}(P, Q; \lambda) - \\ - G(P, Q; \lambda))_{P=P_n} \chi(P)].$$

В области, внешней по отношению к поверхности S_δ, функция $f^{(n)}$ равна нулю, это следует из свойств функции χ. Переходя к криволинейным координатам в слое, заключенном между поверхностями $S_n^{(n)}$ и S_δ, получаем

$$f^{(n)}(P, Q; \lambda) = -(M - \lambda^2)[(W_{n-1}^{(n)}(P, Q; \lambda) - \\ - G(P, Q; \lambda))_{t=d_k^{(n)}} \chi(t)] - [(W_{n-1}^{(n)}(P, Q; \lambda) - \\ - G(P, Q; \lambda))_{t=d_k^{(n)}}] N[\chi(t)], \quad P = P(u, v, t).$$

Поэтому из неравенств (1.11), (1.18) и свойств функции χ следует оценка

$$\| f^{(n)}(P, Q; \lambda) \|_{C(D_e)} \leqslant hC_7(Q; \lambda). \tag{1.20}$$

Так как функция $f^{(n)}$ в области D_i равна нулю, то из неравенств (1.19) и (1.20) следует оценка (1.16).

2. Доказательство теоремы 1

В параграфе 1 была построена функция $W^{(n)}(P, Q; \lambda)$, которая в силу оценки (1.14) близка в метрике пространства $L_2(R_3)$ к функции Грина задачи (4).

С другой стороны, функция $\Gamma^{(n)}(P, Q; \lambda) = G(P, Q; \lambda) - W^{(n)}(P, Q; \lambda)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\Delta\Gamma^{(n)}(P, Q; \lambda) - \lambda^2\Gamma^{(n)}(P, Q; \lambda) = f^{(n)}(P, Q; \lambda) \quad P \in D^{(n)}, \tag{2.1}$$

$$\left[\left(\frac{\partial\Gamma^{(n)}(P, Q; \lambda)}{\partial n}\right)^- - \left(\frac{\partial\Gamma^{(n)}(P, Q; \lambda)}{\partial n}\right)^+\right]_{S^{(n)}} = 0, \tag{2.2}$$

$$[(\Gamma^{(n)}(P, Q; \lambda))^- - (\Gamma^{(n)}(P, Q; \lambda))^+]_{S^{(n)}} = h\left[\varphi(P)\frac{\partial\Gamma^{(n)}(P, Q; \lambda)}{\partial n}\right]_{S^{(n)}}. \tag{2.3}$$

Причем для функции $f^{(n)}(P, Q; \lambda)$ справедлива оценка (1.16).

Проведем в пространстве R_3 сферу Σ_R столь большого радиуса R, чтобы поверхность $S_n^{(n)}$ целиком лежала внутри Σ_R. Рассмотрим область $V_R^{(n)}$, состоящую из области D_i, внутренней по отношению к поверхности $S_0^{(n)}$, слоев $D_k^{(n)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, заключенных между поверхностями $S_k^{(n)}$ и $S_{k+1}^{(n)}$, слоя D_R, заключенного между поверхностью $S_n^{(n)}$ и сферой Σ_R.

Умножим левую и правую часть уравнения (2.1) на $\Gamma^{(n)}(P, Q; \lambda)$ и проинтегрируем по каждой из указанных областей. Воспользуемся формулой Грина и сложим все полученные равенства

$$-\int\limits_{V_R^{(n)}} |\nabla\Gamma^{(n)}(P, Q; \lambda)|^2 d\tau_P + \\ + \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{S_k^{(n)}} \left\{(\Gamma^{(n)}(P, Q; \lambda))^+ \left(\frac{\partial\Gamma^{(n)}(P, Q; \lambda)}{\partial n}\right)^+ - \right. \\ \left. - (\Gamma^{(n)}(P, Q; \lambda))^- \left(\frac{\partial\Gamma^{(n)}(P, Q; \lambda)}{\partial n}\right)^-\right\} d\sigma_P +$$

$$+\int_{\Sigma_R} \Gamma^{(n)}(P, Q; \lambda) \frac{\partial \Gamma^{(n)}(P, Q; \lambda)}{\partial n} d\sigma_P -$$

$$-\lambda^2 \int_{V_R^{(n)}} [\Gamma^{(n)}(P, Q, \lambda)]^2 d\tau_P = \int_{V_R^{(n)}} \Gamma^{(n)}(P, Q; \lambda) f^{(n)}(P, Q; \lambda)\, d\tau_P.$$

Из краевых условий (2.2) и (2.3) следует, что

$$-\int_{V_R^{(n)}} [\nabla \Gamma^{(n)}(P, Q; \lambda)]^2 d\tau_P -$$

$$-h \sum_{k=0}^{n} \int_{S_k^{(n)}} \varphi(P) \left[\frac{\partial \Gamma^{(n)}(P, Q; \lambda)}{\partial n}\right]^2 d\sigma_P +$$

$$+\int_{\Sigma_R} \Gamma^{(n)}(P, Q; \lambda) \frac{\partial \Gamma^{(n)}(P, Q; \lambda)}{\partial n} d\sigma_P -$$

$$-\lambda^2 \int_{V_R^{(n)}} [\Gamma^{(n)}(P, Q; \lambda)]^2 d\tau_P = \int_{V_R^{(n)}} \Gamma^{(n)}(P, Q; \lambda) f^{(n)}(P, Q; \lambda)\, d\tau_P. \qquad (2.4)$$

Так как функция $\varphi(P)$ *финитна и* $\lambda^2 > 0$, то, *как известно, функция* $\Gamma^{(n)}(P, Q; \lambda)$ убывает на бесконечности экспоненциально вместе со своими производными. Переходя в (2.4) к пределу при $R \to \infty$, получим

$$-\int_{R_3} [\nabla \Gamma^{(n)}(P, Q; \lambda)]^2 d\tau_P -$$

$$-h \sum_{k=0}^{n} \int_{S_k^{(n)}} \varphi(P) \left[\frac{\partial \Gamma^{(n)}(P, Q; \lambda)}{\partial n}\right]^2 d\sigma_P -$$

$$-\lambda^2 \int_{R_3} [\Gamma^{(n)}(P, Q; \lambda)]^2 d\tau_P = \int_{R_3} \Gamma^{(n)}(P, Q; \lambda) f^{(n)}(P, Q; \lambda)\, d\tau_P.$$

Отсюда и из неотрицательности $\varphi(P)$ имеем

$$\int_{R_3} |\Gamma^{(n)}(P, Q; \lambda)|^2 d\tau_P \leqslant \frac{1}{\lambda^2} \int_{R_3} |\Gamma^{(n)}(P, Q; \lambda) f^{(n)}(P, Q; \lambda)|\, d\tau_P.$$

Воспользовавшись неравенством Коши — Буняковского, получим

$$\left[\int_{R_3} |\Gamma^{(n)}(P, Q; \lambda)|^2 d\tau_P\right]^{1/2} \leqslant \frac{1}{\lambda^2} \left[\int_{R_3} |f^{(n)}(P, Q; \lambda)|^2 d\tau_P\right]^{1/2},$$

откуда, согласно неравенству (1.16), следует

$$\left[\int_{R_3} |G^{(n)}(P, Q; \lambda) - W^{(n)}(P, Q; \lambda)|^2 d\tau_P\right]^{1/2} \leqslant hC_8(Q; \lambda).$$

Отсюда *и из оценки (1.14) получаем*

$\left[\int_{R_3} |G^{(n)}(P, Q; \lambda) - G(P, Q; \lambda)|^2 d\tau_P\right]^{1/2} \leqslant hC_9(Q; \lambda)$, где константа C_9 не зависит от n. Теорема доказана.

Простым следствием теоремы 1 является

Теорема 2. *Если носитель финитной функции* $f(P) \in L_2$ *лежит вне слоя, заключенного между поверхностями* $S_0^{(n)}$ *и* $S_n^{(n)}$, *то при* $n \to \infty$ *по-*

следовательность $U^{(n)}(P)$ *решений краевых задач (1)—(3) сходится в метрике пространства* $L_2(R_3)$ *к функции* $V(P)$, *являющейся решением уравнения (4).*

В заключение автор выражает благодарность проф. В. А. Марченко за постановку задачи и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Марченко, Г. В. Сузиков. Вторая краевая задача в области со сложной границей. «Матем. сб.», т. 69 (111): 1, 1966.

2. В. А. Львов. Предельный случай одной краевой задачи в области с многослойной границей. Тр. ФТИНТ АН УССР. Матем. физика, функциональный анализ, вып. 1, 1969.

3. К. Миранда. Уравнения с частными производными эллиптического типа. ИЛ, М., 1957.

4. Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер. Уравнения с частными производными. ИЛ, М., 1966.

Поступила 25 мая 1970 г.