КЛАССЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В БЕСКОНЕЧНОМ СЛОЕ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. М. Борок

Настоящая статья посвящена исследованию следующей краевой задачи. Рассматривается система линейных дифференциально-разностных уравнений

$$\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{(k)\,(j)} a_{il(k)\,(j)} \frac{\partial^{|(k)|} u_l(x + h_{(j)}, t)}{\partial x^{k_1}, \ldots, \partial x_m^{k_m}},$$
$$i = 1, \ldots, n, \; x \in R^m, \; t \in [0, T], \tag{1}$$

где $(j) = (j_1, \ldots, j_m)$, $(k) = (k_1, \ldots, k_m)$ — мультииндексы, $|(k)| = \sum k_i \leqslant \leqslant p$, (j) — пробегает некоторое конечное множество, $h_{(j)} = (h_{j_1}, \ldots, h_{j_m}) \in \in R^m$, $a_{il(k)\,(j)}$ — комплексные постоянные. Задача состоит в отыскании условий, при выполнении которых решение $\bar{u}(x, t)$ системы (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u_{k_i}(x, 0) = 0, \; 1 \leqslant k_i \leqslant n, \; i = 1, \ldots, r \; (1 \leqslant r \leqslant n - 1),$$
$$u_{m_j}(x, T) = 0, \; 1 \leqslant m_j \leqslant n, \; j = 1, \ldots, n - r, \tag{2}$$

тождественно равно нулю в слое $\Pi_T = R^m \times [0, T]$. Легко привести примеры, показывающие, что, вообще говоря, задача (1)-(2) может иметь нетривиальные решения, и нашей целью будет отыскание оценок решения $\bar{u}(x, t)$ при $|x| \to \infty$, из выполнения которых следует $\bar{u}(x, t) \equiv 0$.

Отметим, что в случае, когда $h_{(j)} = 0$ при всех (j), система (1) является системой уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами; этот случай изучен нами в [1] и здесь рассматриваться не будет.

1. Постановка задачи в общем виде. Обобщенный принцип Гольмгрена

Пусть E — нормированное пространство, $P = (P_{ij})_{i,\,j=1}^{n}$ — матрица $(n \times n)$, элементами которой являются непрерывные линейные операторы P_{ij} с областью определения $D_p \subset E'$ и со значениями в E'; $u_j(t) \in E'$ $(0 \leqslant t \leqslant T$, $j = 1, \ldots, n)$, что короче записывается в виде $\bar{u}(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t)) \in$

$\in E'^{(n)}$ (аналогичный смысл будут иметь встречающиеся ниже записи $\bar{u}(t) \in \in D_\rho^{(n)}$, $\bar{\varphi} \in \Phi^{(n)}$, $\bar{f} \in F^{(n)}$), $\frac{du_j(t)}{dt}$ — производная по параметру t в слабом смысле.

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{d\bar{u}(t)}{dt} = P\bar{u}(t), \quad t \in [0, T], \quad \bar{u} \in E'^{(n)}, \tag{1_0}$$

$$u_{k_i}(0) = 0, \quad 1 \leqslant k_i \leqslant n, \quad i = 1, \ldots, r \, (1 \leqslant r \leqslant n-1),$$
$$u_{m_j}(T) = 0, \quad 1 \leqslant m_j \leqslant n, \quad j = 1, \ldots, n-r. \tag{2_0}$$

Сформулируем условия, при которых решение $\bar{u}(t)$ этой задачи тождественно равно нулю.

Пусть Φ, F — линейные топологические пространства, $\Phi \subset F \subset E$, Φ — плотно в E, P^* — матрица $(n \times n)$, элементами которой являются непрерывные линейные операторы $F \to F$, причем

$$(P\bar{u}, \bar{f}) = (\bar{u}, P^*\bar{f}) \tag{3}$$

для любых $\bar{u} \in D_\rho^{(n)} \subset E'^{(n)}$, $\bar{f} \in F^{(n)}$.

Обозначим

$$N = \{j : 1 \leqslant j \leqslant n, \; j \neq k_i, \; i = 1, \ldots, r\},$$
$$M = \{j : 1 \leqslant j \leqslant n, \; j \neq m_k, \; k = 1, \ldots, n-r\}$$

и назовем сопряженной краевой задачей (по отношению к (1_0)-(2_0)) следующую задачу:

$$\frac{d\bar{v}(t)}{dt} = -P^*\bar{v}(t), \quad t \in [0, T], \quad \bar{v}(t) \in F^{(n)}, \tag{$1_0'$}$$

$$v_j(0) = \varphi_j, \quad j \in N; \quad v_j(T) = 0, \quad j \in M, \tag{$2_0'$}$$

где $\varphi_j \in \Phi$, $j \in N$ — заданные элементы.

Теорема 1. *(Обобщенный принцип Гольмгрена). Пусть 1) для любых $\varphi_j \in \Phi$, $j \in N$ задача $(1_0')$-$(2_0')$ имеет решение $\bar{v}(t)$ $(\in F^{(n)})$ и 2) задача Коши*

$$\frac{d\bar{u}(t)}{dt} = P\bar{u}(t), \quad \bar{u}(0) = 0, \quad \bar{u}(t) \in E'^{(n)} \; (0 \leqslant t \leqslant T)$$

имеет лишь тривиальное решение. Тогда решение задачи (1_0)-(2_0) тождественно равно нулю.

Доказательство. Пусть $\bar{u}(t) \in E'^{(n)}$ — решение задачи (1_0)-(2_0), $\bar{v}(t) \in F^{(n)}$ — решение задачи $(1_0')$-$(2_0')$. Полагая

$$L\bar{u}(t) \equiv \frac{d\bar{u}(t)}{dt} - P\bar{u}(t), \quad L^*\bar{v}(t) = \frac{d\bar{v}(t)}{dt} + P^*\bar{v}(t)$$

и используя (3), получим

$$\int_0^T (L\bar{u}(t), \bar{v}(t))\, dt - \int_0^T (\bar{u}(t), L^*\bar{v}(t))\, dt = (\bar{u}(t), \bar{v}(t))\big|_0^T = 0.$$

Отсюда, учитывая (2_0) и $(2_0')$, получаем

$$\sum_{j \in N} (u_j(0), \varphi_j) = 0.$$

В силу произвольности $\varphi_j \in \Phi$, $j \in N$, и плотности вложения $\Phi \subset E$ заключаем, что $u_j(0) = 0$, $j \in N$. Отсюда, снова учитывая (2_0), делаем вывод, что $\bar{u}(t)$ —

решение задачи Коши: $L\bar{u}(t) = 0$, $\bar{u}(0) = 0$, и поскольку $\bar{u}(t) \in E'^{(n)}$, то, по условию 2) теоремы 1, $\bar{u}(t) \equiv 0$. Теорема доказана.

В дальнейшем мы неоднократно будем пользоваться теоремой 1, выбирая всякий раз подходящие пространства E, Φ и F и истолковывая задачу (1)-(2) как задачу (1_0)-(2_0) в пространстве $E'^{(n)}$; при этом в некотором множестве $D_p \subset E'$ должны быть определены операторы P_{il} $(1 \leqslant i,\ l \leqslant n)$:

$$P_{il}\, u(x, t) = \sum_{(k)\,(j)} a_{il(k)\,(j)} \frac{\partial^k u(x + h_{(j)}, t)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_m^{k_m}}.$$

Обозначим P_{il}^* дифференциально-разностное выражение вида

$$P_{il}^*\, u(x, t) = \sum_{(k)\,(j)} (-1)^k a_{li(k)(j)} \frac{\partial^k u(x - h_{(j)}, t)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_m^{k_m}}.$$

Задача, сопряженная к (1)-(2), состоит в решении системы линейных уравнений

$$\frac{\partial v_i(x, t)}{\partial t} = -\sum_{l=1}^{n} P_{il}^* v_l(x, t)\; i = 1, \ldots, n,\; x \in R^m,\; t \in [0, T] \tag{4}$$

при краевых условиях

$$v_j(x, 0) = \varphi_j(x),\; j \in N;\; v_j(x, T) = 0,\; j \in \boldsymbol{M}. \tag{5}$$

Это определение при подходящем выборе пространств F и E совпадает с приведенным выше.

Введем основное для дальнейшего изложения понятие определителя краевой задачи (1)-(2) и на основе его свойств проведем классификацию этих задач.

Обозначим

$$A_{rl}(s) = \sum_{(k)\,(s)} a_{rl(k)\,(j)} \Big[\prod_{q=1}^{m} (is_q)^{k_q}\Big] \exp\{i(s, h_{(j)})\},$$

где $(s, h_{(j)}) = \sum_{q=1}^{m} s_q h_{j_q}$;

$$P(s) = (A_{rl}(s))_{r,\,l=1}^{n},\quad Q(s, t) = \exp\{tP'(-s)\},$$

где $P'(s)$ — матрица, транспонированная к $P(s)$. Элементы разрешающей матрицы $Q(s, t)$ при каждом $t \in [0, T]$ — целые функции s, вообще говоря, бесконечного порядка.

Определителем $\Delta(s)$ краевой задачи (1)-(2) будем называть определитель матрицы $(n-r) \times (n-r)$, получающейся из $Q(s, T)$ в результате вычерчивания строк с номерами $k_1, \ldots, k_r$ и столбцов, номера которых принадлежат $\boldsymbol{M}$.

Краевую задачу (1)-(2) назовем невырожденной, если $\Delta(s) \not\equiv 0$, и вырожденной в противном случае. Если задача (1)-(2) является невырожденной, то ее типом A назовем величину

$$A = \inf_{\{s:\Delta(s)=0\}} |\operatorname{Im} s|, \tag{6}$$

где $|\cdot|$ — эвклидова норма в R^m.

Очевидно, $0 \leqslant A \leqslant \infty$.

2. Оценки разрешающей матрицы и определителя краевой задачи

Дадим оценки элементов метрицы $Q(s, t)$ и оценки снизу определителя $\Delta(s)$ краевой задачи (1)-(2), используемые в дальнейшем.

Теорема 2. *Существуют такие постоянные* $H > 0$ *и* $p_0 > 0$, *что при каждом* $t \in [0, T]$ *и всех* $s = \sigma + i\tau$ *справедлива оценка*

$$\|Q(s, t)\| \leqslant C_1 \exp\{C_2 |\sigma|^{p_0} + C_3 \exp\{H|\tau|\}\} \tag{7}$$

с некоторыми $C_i > 0$, $i = 1, 2, 3$.

Доказательство. Обозначим $z_{(j)} = \exp\{i(s, h_{(j)})\}$. Тогда функции $A_{rl}(s)$ являются полиномами относительно переменных $s_1, \ldots, s_m, z_{(j)}$:

$$A_{rl}(s) \equiv A_{rl}(s, z_{(j)}) = \sum_{(k)(j)} a_{rl(k)(j)} z_{(j)} \prod_{q=1}^{m} (is_q)^{k_q}.$$

Следовательно, для матрицы $Q(s, t)$ при некоторых $p_0 > 0$ и $M > 0$ и любом фиксированном $t > 0$ имеет место оценка [2, стр. 77]:

$$\|Q(s, t)\| \leqslant C(1 + |s| + \sum_{(j)} |z_{(j)}|)^M \exp\{c'(|s|^{p_0} + \sum_{(j)} |z_{(j)}|^{p_0}\}, \tag{8}$$

где $C > 0$, $c' > 0$. Учитывая, что $|z_{(j)}| \leqslant \exp\{|\tau||h_{(j)}|\}$ $(\tau = \operatorname{Im} s)$, получим (7), где $H = p_0 \max\limits_{(j)} |h_{(j)}|$. В частности, при $s = \sigma$ (т. е. $\tau = 0$) имеем из (7)

$$\|Q(\sigma, t)\| \leqslant C_1 \exp\{C_2 |\sigma|^{p_0}\}. \tag{8'}$$

В случае $p = 0$, т. е. когда (1) — система разностных по x уравнений, в приведенных выше оценках $p_0 \leqslant 1$, а также в (8) можно положить $s = 1$. При переходе к (8′) можно считать $C_2 = 0$.

Замечание. Аналогичные оценки (иногда с другими постоянными) справедливы и для всех миноров матрицы $Q(s, t)$, в том числе для $\Delta(s)$.

Теорема 3. *Пусть краевая задача (1)-(2) имеет бесконечный тип,* $\Delta(s)$ — *ее определитель. Тогда справедлива оценка*

$$|\Delta(s)| > d_1 \exp\{-d_2 \exp\{d_3 |\sigma|^{1/2}\} - d_4 \exp\{d_5 |\tau|\}\}, \tag{9}$$

где $d_i > 0$, $i = 1, \ldots, 5$. Доказательство основано на следующей лемме.

Лемма 1.* *Пусть* $u(s) \equiv u(\sigma + i\tau)$ — *гармоническая функция, для которой справедлива оценка*

$$u(\sigma, \tau) \equiv u(\sigma + i\tau) < \exp\{A|\tau|\}, \quad A > 0. \tag{10}$$

Тогда

$$u(\sigma, \tau) \geqslant -C_1 \exp\{A(1 + \varepsilon)|\tau|\} - C_2 \exp\{\sqrt{2\pi A|\sigma|}\}, \tag{11}$$

где $\varepsilon > 0$ — любое, $C_1 = C_1(\varepsilon)$, $C_2 = C_2(\varepsilon)$.

Доказательство леммы 1. При $h > 0$ и $|\tau| \leqslant \frac{h}{A}$ из (10) имеем $e^h - u(\sigma, \tau) > 0$. Отобразим полосу $|\tau| \leqslant \frac{h}{A}$ на верхнюю полуплоскость $w = i \exp\left\{\frac{\pi A}{2h} s\right\}$ и рассмотрим гармоническую функцию $v(w) = e^h - u\left(\frac{2h}{\pi A} \ln \frac{w}{i}\right)$, которая, очевидно, при $\operatorname{Im} w \geqslant 0$ положительна. Голоморфная при $\operatorname{Im} w \geqslant 0$ функция $F(w)$, для которой $\operatorname{Im} F(w) \equiv v(w)$, удовлетворяет неравенствам Каратеодори [3, стр. 30]:

$$\frac{1}{5} |F(i)| \sin\theta \cdot r^{-1} < |F(w)| < 5 F(i) | r \sin^{-1}\theta,$$

где $r = |w| \geqslant 1$, $\sigma \geqslant 0$. Отсюда заключаем, что

$$|u(\sigma, \tau)| > e^h - 5|F(i)| \sin^{-1}\theta \exp\left\{\frac{\pi A}{2h} \sigma\right\} \tag{12}$$

* Неопубликованный результат Б. Я. Левина.

при $|\tau|<\frac{h}{A}$ и $\sigma\geqslant 0$. Здесь $|F(i)|=e^h-u(0)$ за счет выбора $\operatorname{Re}F(\omega)$ и условия $\operatorname{Re}F(i)=0$. Положим теперь $\theta=\frac{\pi}{2}$ и выберем $h=\sqrt{\frac{\pi\sigma A}{2}}$. Получим из (12)

$$u(\sigma,0)\geqslant\exp\left\{\sqrt{\frac{A\pi\sigma}{2}}\right\}-5\left[\exp\left\{\sqrt{\frac{A\pi\sigma}{2}}\right\}-u(0)\right]\exp\left\{\sqrt{\frac{A\pi\sigma}{2}}\right\}. \tag{12'}$$

Отсюда, учитывая, что при достаточно больших $\sigma>0$

$$\exp\left\{\sqrt{\frac{A\pi\sigma}{2}}\right\}-u(0)\leqslant\frac{6}{5}\exp\left\{\sqrt{\frac{A\pi\sigma}{2}}\right\},$$

заключаем

$$u(\sigma,0)\geqslant-6\exp\{\sqrt{2A\pi\sigma}\}.$$

Из соображений симметрии имеем для всех достаточно больших значений $|\sigma|$

$$u(\sigma,0)\geqslant-6\exp\{\sqrt{2A\pi|\sigma|}\}. \tag{13}$$

С другой стороны, из (12) при $\sigma=0$, $|\tau|\leqslant\frac{h}{A}$ имеем

$$u(0,\tau)\geqslant e^h-5[e^h-u(0)]\sin^{-1}\theta$$

и при $|\tau|=(1-\varepsilon)\frac{h}{A}$ получаем

$$u(0,\tau)\geqslant\exp\left\{\frac{A|\tau|}{1-\varepsilon}\right\}\left[1-5\sin^{-1}\frac{\pi\varepsilon}{2}\right]+5u(0)\sin^{-1}\frac{\pi\varepsilon}{2}. \tag{14}$$

Фиксируя произвольно $a\in R^1$ и полагая $u_a(s)\equiv u(s+a)$, заметим, что $u_a(s)$ удовлетворяет тем же условиям, что и $u(s)$, и потому для нее также верна оценка (14). Следовательно,

$$u(a+i\tau)\geqslant-C_\varepsilon\exp\left\{\frac{A|\tau|}{1-\varepsilon}\right\}+\frac{5u(a)}{\sin\frac{\pi\varepsilon}{2}},\quad C_\varepsilon=\frac{5}{\sin\frac{\pi\varepsilon}{2}}-1.$$

Отсюда и из (13) получаем (11). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Ограничимся случаем $m=2$, для больших значений m доказательство аналогично. В силу условия теоремы $\Delta(s)\equiv\equiv\Delta(s_1,s_2)$ — целая функция, нигде не обращающаяся в нуль; пусть $g(s_1,s_2)$ — целая функция такая, что $\Delta(s_1,s_2)=\exp\{g(s_1,s_2)\}$, и пусть $u(s_1,s_2)=\operatorname{Re}g(s_1,s_2)$. Поскольку $|\Delta(s_1,s_2)|=\exp\{u(s_1,s_2)\}$, то в силу замечания к теореме 1 из (7) имеем

$$u(s_1,s_2)\leqslant A+B(|\sigma_1|^{p_0}+|\sigma_2|^{p_0})+C\exp\{H|\tau_1|+H|\tau_2|\} \tag{15}$$

с некоторыми $A>0$, $B>0$, $C>0$.

Пусть q — целое число такое, что $2q>p_0$. Используя элементарное неравенство

$$-\operatorname{Re}(s_1^{2q}+s_2^{2q})\leqslant-(1-\varepsilon)(\sigma_1^{2q}+\sigma_2^{2q})+C(\varepsilon)(\tau_1^{2q}+\tau_2^{2q}),$$

справедливое при любом $\varepsilon>0$ и некотором $C(\varepsilon)>0$, и оценку (15), получим

$$u(s_1,s_2)-\operatorname{Re}(s_1^{2q}+s_2^{2q})\leqslant K_1+K_2\exp\{H|\tau_1|+H|\tau_2|\} \tag{16}$$

при некоторых $K_1>0$ и $K_2>0$.

Гармоническая функция $u_1(s_1,s_2)\equiv\frac{1}{K_2+1}[u(s_1,s_2)-\operatorname{Re}(s_1^{2q}+s_2^{2q})-K_1]$ удовлетворяет в силу (16) оценке

$$u_1(s_1,s_2)<\exp\{H|\tau_1|+H|\tau_2|\}. \tag{17}$$

Тогда

$$u_{s_2}(s_1) \equiv u_1(s_1, s_2)\, e^{-H|\tau_2|} < e^{H|\tau_1|}.$$

Таким образом, гармоническая функция $u_{s_2}(s_1)$ удовлетворяет условиям леммы 1. Тогда в силу (12′)

$$u_{s_2}(\sigma_1) \geqslant \exp\left\{\sqrt{\frac{H\pi\sigma_1}{2}}\right\} - 5\exp\{\sqrt{2\pi H\sigma_1}\} + 5\exp\left\{\sqrt{\frac{H\pi\sigma_1}{2}}\right\} u_1(0, s_2)\, e^{-H|\tau_2|}. \quad (18)$$

Рассмотрим теперь $u_1(0, s_2)$. Эта гармоническая функция удовлетворяет в силу (17) оценке

$$u_1(0, s_2) < \exp\{H|\tau_2|\}.$$

Тогда в силу леммы 1

$$u_1(0, s_2) \geqslant -C_2\exp\{H(1+\varepsilon)|\tau_2|\} - C_2\exp\{\sqrt{2\pi H|\sigma_2|}\},$$

возвращаясь к (18), после несложных преобразований получим при достаточно больших $\sigma_1 > 0$

$$u_{s_2}(\sigma_1) \geqslant -C_3\exp\{C_4\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{|\sigma_2|}\} - C_5\exp\{H\varepsilon(1+\varepsilon)|\tau_2|\} \quad (19)$$

при любом $\varepsilon > 0$ и некоторых $C_i = C_i(\varepsilon)$, $i = 3, 4, 5$.

Далее, аналогично (14), имеем

$$u_{s_2}(i\tau_1) \geqslant -C_6\exp\left\{\frac{H}{1-\varepsilon}|\tau_1|\right\} + C_7 u_{s_2}(0),$$

$$C_6 = C_6(\varepsilon),\ C_7 = C_7(\varepsilon),$$

откуда, как и в доказательстве леммы 1,

$$u_{s_2}(\sigma_1 + i\tau_1) \geqslant -C_6\exp\left\{\frac{H}{1-\varepsilon}|\tau_1|\right\} + C_7 u_{s_2}(\sigma_1). \quad (20)$$

Из (19) и (20), учитывая, что $u_1(s_1, s_2) = u_{s_2}(s_1)\exp\{H|\tau_2|\}$, получим оценку

$$u_1(s_1, s_2) \geqslant -C_6 e^{H[(1+\varepsilon)|\tau_1| + |\tau_2|]} - C_7' e^{C_4'|\sigma|^{1/2}} - C_7'' e^{H(1+\varepsilon)|\tau_2|},$$

справедливую при любом $\varepsilon > 0$ и некоторых $C_6 = C_6(\varepsilon)$, $C_7' = C_7'(\varepsilon)$, $C_7'' = C_7''(\varepsilon)$.

Из последней оценки, в силу определения $u_1(s_1, s_2)$ и формулы $|\Delta(s_1, s_2)| = \exp\{u(s_1, s_2)\}$, вытекает результат теоремы.

Теорема 4. *Пусть (1)-(2) — невырожденная краевая задача типа $A > 0$, $\Delta(s)$ — ее определитель. Тогда при $|\operatorname{Im} s| \leqslant A_1 < A$ справедлива оценка*

$$|\Delta(s)| \geqslant c_1\exp\{-c_2\exp\{c_3|s|\}\},\ c_i > 0,\ i = 1, 2, 3. \quad (21)$$

Доказательство. Снова для простоты ограничимся случаем $m = 2$. Очевидно, не уменьшая общности, можно считать $\Delta(0, 0) = 1$. Фиксируем $s^0 = \sigma^0 + i\tau^0 = (s_1^0, s_2^0)$ так, чтобы $|\operatorname{Im} s^0| \leqslant A_1$, и обозначим $f_1(s_1) = \Delta(s_1, s_2^0)[\Delta(0, s_2^0)]^{-1}$. Очевидно, $f_1(s_1)$ — целая функция, $f_1(0) = 1$, $f_1(s_1)$ не имеет нулей в полосе $|\tau_1| = |\operatorname{Im} s_1| \leqslant (A^2 - \tau_2^{02})^{1/2}$. Пусть $R_1 = |s_1^0| > 0$. Тогда в круге $|s_1| \leqslant R_1$ вне исключительных кружков, содержащих нули функции $f_1(s_1)$ с суммой радиусов, меньшей, чем $4\eta R_1$, имеет место оценка [3, гл. I, § 8]

$$\ln|f_1(s_1)| > -H(\eta)\ln M_{f_1}(2eR_1), \quad (22)$$

где

$$H(\eta) = 2 + \ln\frac{3e}{2\eta},\ M_{f_1}(R) = \sup_{|s_1|=R}|f_1(s_1)|.$$

Выбрав $\eta = \frac{A - A_1}{8R_1}$, получим, что сумма диаметров всех исключительных кружков меньше $A - A_1$. Поэтому полоса

$$|\tau_1| < (A_1^2 - \tau_2^{02})^{1/2} < (A^2 - \tau_2^{02})^{1/2} - (A - A_1)$$

свободна от исключительных кружков, и в ней имеет место оценка (22). В частности, она верна при $s_1 = s_1^0$, и потому

$$|\Delta(s_1^0, s_2^0)| \geqslant |\Delta(0, s_2^0)| [M_{f_1}(2eR_1)]^{-H(\eta)}. \tag{23}$$

Но в силу замечания к теореме 2 имеем

$$|\Delta(s_1, s_2)| \leqslant C_1' \exp\{C_2' \exp\{C_3' |s|\}\}$$

при некоторых $C_i' > 0$, $i = 1, 2, 3$. Поэтому

$$M_{f_1}(2eR_1) \leqslant \frac{C_1'}{|\Delta(0, s_2^0)|} \exp\{C_2' \exp\{C_3'' |s^0|\}\}, \quad C_3'' = 2eC_3'.$$

Подставляя в (23), получим

$$\begin{aligned} |\Delta(s_1^0, s_2^0)| &\geqslant C_1^{1-H(\eta)} |\Delta(0, s_2^0)|^{1+H(\eta)} \times \\ &\times \exp\{-H(\eta) C_2' \exp\{C_3'' |s^0|\}\}. \end{aligned} \tag{24}$$

Но $H(\eta) = 2\ln\frac{12e|s_1^0|}{A - A_1} = H_1 + \ln|s_1^0|$ (в силу выбора η).

Итак, из (24) получим

$$|\Delta(s_1^0, s_2^0)| \geqslant |\Delta(0, s_2^0)|^{H_2 + \ln|s_1^0|} \exp\{-H_3 \exp\{H_4 |s^0|\}\}, \tag{25}$$

где $H_2 = 1 + H_1$, $H_3 > 0$, $H_4 > C_3''$ — некоторые постоянные. Из соображений симметрии

$$|\Delta(s_1^0, s_2^0)| \geqslant |\Delta(s_1^0, 0)|^{H_2 + \ln|s_2^0|} \exp\{-H_3 \exp\{H_4 |s^0|\}\}. \tag{26}$$

Из (25) при $s_2^0 = 0$ имеем

$$|\Delta(s_1^0, 0)| \geqslant \exp\{-H_3 \exp\{H_4 |s_1^0|\}\}$$

и, подставляя в (26), получаем оценку вида (21). Теорема доказана.

3. Пространства $\overset{\circ}{S}$ и $\hat{S}$

При использовании в дальнейшем теоремы 1 в роли фигурирующих в этой теореме пространств Φ и F будут использованы некоторые пространства типа S [4] — пространства бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, $-\infty < x < \infty$, для которых при любых целых $k \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ конечны числа

$$m_{kq\varphi} = \sup_x |x^k \varphi^{(q)}(x)|. \tag{27}$$

Обозначим $\overset{\circ}{S}$ — пространство функций $\varphi(x)$, для которых числа $m_{kq\varphi}$ удовлетворяют оценкам

$$m_{kq\varphi} \leqslant C_\varphi A_\varphi^k B_\varphi^q a_k b_q, \tag{28}$$

где C_φ, A_φ, B_φ — какие-либо положительные постоянные, зависящие от функции $\varphi(x)$, $a_k = k^k (\ln k)^{-k}$, $b_q = (\ln q)^{2q}$ (при $k \geqslant 2$, $q \geqslant 2$), $a_0 = b_0 = a_1 = b_1 = 1$; $\hat{S}$ — пространство функций $\varphi(x)$, для которых верны оценки (27)-(28) с $a_k = k^k$, $b_q = (\ln q)^q$ (при $k \geqslant 2$, $q \geqslant 2$), $a_0 = b_0 = a_1 = b_1 = 1$; $\overset{\circ}{S}(A, B)$ ($\hat{S}(A, B)$) — подпространство пространства $\overset{\circ}{S}(\hat{S})$ такое, что для $\varphi(x) \in$

$\in \overset{\circ}{S}(A, B)(\hat{S}(A, B))$ при любых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ верны оценки (28) с $A_\varphi \leqslant \leqslant A + \alpha$, $B_\varphi \leqslant B + \beta$, $C_\varphi = (\varphi, \alpha, \beta)$.

Теорема 5. *Пространство* $\overset{\circ}{S}$ *содержит функции, отличные от тождественного нуля.*

Доказательство. Обозначим

$$M(x) = \sup_q [|x|(\ln q)^{-2}]^q, \quad L(x) = \sup_k [|x| k^{-1} \ln k]^k$$

(при $|x| \geqslant 1$), $\ln M(x) = O(x^2)$, $\ln L(x) = O(x^2)$ при $|x| < 1$. Тогда, как нетрудно подсчитать,

$$M(x) = \exp\{2|x|^{-\frac{1}{2}} e^{\sqrt{|x|}}(1 + o(1))\}, \tag{29}$$

$$L(x) = \exp\{|x| e^{-1} \ln |x| (1 + o(1))\}, \tag{30}$$

$$o(1) \to 0 \quad (|x| \to \infty).$$

Из последнего соотношения видно, что

$$\lim_{|x| \to \infty} \ln \ln L(x) [\ln |x|]^{-1} = 1.$$

Тогда в силу теоремы К. И. Бабенко [5, стр. 534] пространство $\overset{\circ}{S}$ содержит нетривиальные функции, если

$$\varliminf_{y \to \infty} \mu(y) \left[y^3 \int_0^\infty \frac{\ln L(\xi)\, d\xi}{\xi^2 (y^2 + \xi^2)} \right]^{-1} > 0, \tag{31}$$

где

$$\mu(y) = \ln \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} ty}{M(t)}\, dt;$$

из (29) вытекает, что

$$\mu(y) \geqslant \ln \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{ty - C \exp\{\sqrt{t}\}}\, dt.$$

Обозначив $t(y) = \ln^2 y$ и заметив, что при больших значениях y подынтегральная функция в последнем интеграле возрастает на отрезке $[t(y), t(y) + 1]$, получим оценку

$$\mu(y) \geqslant \ln \frac{1}{2} \int_{t(y)}^{t(y)+1} \exp\{ty - Ce^{\sqrt{t}}\}\, dt \geqslant \frac{1}{2} y \ln^2 y. \tag{32}$$

С другой стороны,

$$\ln L(x) \leqslant \begin{cases} C|x| \ln |x| & \text{при } |x| \geqslant 2, \\ Cx^2 & \text{при } |x| < 2. \end{cases}$$

Отсюда

$$\int_0^\infty \frac{\ln L(\xi)\, d\xi}{\xi^2 (\xi^2 + y^2)} \leqslant C[I_1(y) + I_2(y)],$$

где

$$I_1(y) = \int_0^2 \frac{d\xi}{\xi^2 + y^2} \leqslant \frac{2}{y^2},$$

$$I_2(y) = \int_2^\infty \frac{\ln \xi \, d\xi}{\xi(\xi^2 + y^2)} = \int_2^y \frac{\ln \xi \, d\xi}{\xi(\xi^2 + y^2]} + \int_y^\infty \frac{\ln \xi \, d\xi}{(\xi^2 + y^2)\xi} \leqslant \frac{\ln^2 y}{y^2} + \frac{\ln y}{y^2}.$$

Поэтому

$$y^3 \int_0^\infty \frac{\ln L(\xi) \, d\xi}{\xi^2(\xi^2 + y^2)} \leqslant C_1 y \ln^2 y.$$

Отсюда и из (32) следует (31). Теорема доказана.

Замечание. Всякая функция $\varphi(x) \in \overset{\circ}{S}$ при некоторых $A > 0$ и $B > 0_0$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{S}(A, B)$. Следовательно, существуют такие A и B_0, что пространство $\overset{\circ}{S}(A_0, B_0)$ нетривиально*. Кроме того, ясно, что если $\varphi(x) \in \overset{\circ}{S}(A_0, B_0)$, а $\lambda > 0$, то $\varphi(\lambda x) \in \overset{\circ}{S}(\lambda A_0, B_0 \diagdown \lambda)$, и потому пространство $\overset{\circ}{S}(A_0\lambda, B_0 \diagdown \lambda)$ также нетривиально. Поэтому, фиксируя одно из чисел A или B, всегда можно так подобрать второе, чтобы соответствующее пространство $\overset{\circ}{S}(A, B)$ было нетривиально.

Теорема 6. *Пространство $\hat{S}$ нетривиально*.*

Доказательство. Используем ту же теорему К. И. Бабенко [5]. В данном случае

$$L_1(x) \equiv \sup_k \left(\frac{|x|}{k}\right)^k = \exp\{|x| e^{-1}\}(1 + o(1)), \tag{33}$$

$$M_1(x) \equiv \sup_q \left(\frac{|x|}{\ln q}\right)^q = \exp\{|x|^{-1} e^{|x|-1}(1 + o(1))\},$$

$$o(1) \to 0 \quad (|x| \to \infty).$$

И в этом случае

$$\ln \ln L_1(x) [\ln |x|]^{-1} \to 1 \text{ при } |x| \to \infty.$$

Обозначив

$$\mu_1(y) = \ln \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} ty}{M_1(t)} dt$$

и проведя оценку аналогично (32), получим при больших значениях y

$$\mu_1(y) \geqslant {}^1/_2 y \ln y.$$

С другой стороны, в силу (33)

$$y^3 \int_0^\infty \ln L_1(\xi) \xi^{-2}(\xi^2 + y^2)^{-1} d\xi \leqslant C_1 y \ln y.$$

Поэтому условие типа (31) выполнено и в данном случае. Теорема доказана.

Замечание. Как и в случае пространства $\overset{\circ}{S}$ для любого $A > 0$ $(B > 0)$ можно так подобрать $B > 0$ $(A > 0)$, что пространство $\hat{S}(A, B)$ будет нетривиально.

---

* То есть содержит функцию $\varphi(x) \not\equiv 0$.

Теорема 7. *Пусть пространство* $\overset{\circ}{S}(A, B)$ $(\hat{S}(A, B))$ *нетривиально,* E — *нормированное пространство функций с нормой*

$$\|\varphi(x)\| = \int \varepsilon(x)\,|\varphi(x)|\,dx \tag{34}$$

($\varepsilon(x) > 0$ — *фиксированная локально суммируемая функция*). *Тогда если имеет место вложение* $\overset{\circ}{S}(A, B) \subset E$ $(\hat{S}(A, B) \subset E)$, *то это вложение плотно.*

Доказательство. Покажем, что условие $\varphi(x) \in \overset{\circ}{S}(A, B)$ $(\hat{S}(A, B))$ влечет за собой $\varphi(x-h) \in \overset{\circ}{S}(A, B)$ $(\hat{S}(A, B))$ при любом фиксированном h. Действительно, если k достаточно велико, то

$$|x^k \varphi^{(q)}(x-h)| = \left|\sum_{j=0}^{k} C_k^j (x-h)^j h^{k-j} \varphi^{(q)}(x-h)\right| \leqslant C(\varphi, \alpha, \beta)(B+$$

$$+\beta)^q b_q \sum_{j=0}^{k} C_k^j (A+\alpha)^j h^{k-j} a_j \leqslant C(\varphi, \alpha, \beta)(B+\beta)^q b_q (A+2\alpha)^k a_k$$

в силу монотонности a_k и того, что $a_k \to \infty$.

Покажем также, что при любом $\sigma \in R^1$, $\varphi_\sigma(x) \equiv \exp\{ix\sigma\}\varphi(x) \in S(A, B)$ $(\hat{S}(A, B))$, если $\varphi(x) \in \overset{\circ}{S}(A, B)$ $(\hat{S}(A, B))$. Действительно, при достаточно больших значениях q имеем

$$|x^k \varphi_\sigma^{(q)}(x)| \leqslant C(\varphi, \alpha, \beta)(A+\alpha)^k a_k \sum_{j=0}^{q} C_q^j |\sigma|^{q-j} b_j (B+\beta)^j \leqslant$$

$$\leqslant C(\varphi, \alpha, \beta)(A+\alpha)^k a_k (B+2\beta)^q b_q.$$

Нужный нам результат является теперь прямым следствием следующего предложения [4, стр, 278, 279].

Если в пространстве Φ существует хотя бы одна функция $\varphi(x) \neq 0$, из $\varphi(x) \in \Phi$ следует $\varphi(x+h) \in \Phi$ при любом h, $-\infty < h < \infty$ и $e^{i\sigma x}\varphi(x) \in \Phi$ при любом σ, $-\infty < \sigma < \infty$, то вложение $\Phi \subset E$ является плотным, если E — какое-либо нормированное пространство функций с нормой (34).

Замечание. Впредь мы будем рассматривать функции $\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_m)$, принадлежащие введенным выше пространствам по каждому своему аргументу: пространство $\overset{\circ}{S}$ $(\hat{S})$, состоящее из всех функций $\varphi(x)$, для которых

$$\left| x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m} \frac{\partial^{q_1+\cdots+q_m}\varphi(x)}{\partial x_1^{q_1} \cdots \partial x_m^{q_m}} \right| \leqslant C \prod_{i=1}^{m} [A_i^{k_i} B_i^{q_i} a_{k_i} b_{q_i}],$$

$$C = C(\varphi),\ A_i = A_i(\varphi),\ B_i = B_i(\varphi),\ a_{k_i} = \left(\frac{k_i}{\ln k_i}\right)^{k_i},\ b_{q_i} = (\ln q_i)^{2q_i}$$

(или $a_{k_i} = k_i^{k_i}$, $b_{q_i} = (\ln q_i)^{q_i}$), $k_i, q_i \geqslant 2$. Аналогично определяются пространства $\overset{\circ}{S}(\bar{A}, \bar{B})$ и $\hat{S}(\bar{A}, \bar{B})$, где $\bar{A} = (A_1, \ldots, A_m)$, $\bar{B} = (B_1, \ldots, B_m)$. Ясно, что результаты теорем 5—7 переносятся на эти пространства.

4. Классы единственности решения невырожденной краевой задачи

Докажем теорему единственности решения невырожденной краевой задачи (1)-(2).

Теорема 8. *Пусть (1)-(2) — невырожденная краевая задача бесконеч-*
...... существует такое $\alpha > 0$, *что всякое (обобщенное)*

решение $\bar{u}(x, t) = (u_1(x, t), \ldots, u_n(x, t))$ *этой задачи, удовлетворяющее оценке*

$$|D^{(k)}\bar{u}(x, t)| < C \exp\{\alpha \sum_{i=1}^{m} |x_i| \ln |x_i|\}, \quad |(k)| \leqslant p, \tag{35}$$

тождественно равно нулю.

Доказательство. Обозначим E_α нормированное пространство функций $\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_m)$ с нормой (34), где $\varepsilon(x) = \exp\{\alpha \sum_{i=1}^{m} |x_i| \ln |x_i|\}$.

Величину α выберем ниже, в роли Φ — нетривиальное пространство $\mathring{S}(\bar{A}, \bar{B})$, где $\bar{A} = (A, \ldots, A)$, $\bar{B} = (B, \ldots, B)$, его существование следует из теоремы 4. Покажем, что α можно выбрать так, чтобы $\mathring{S}(\bar{A}, \bar{B}) \subset E_\alpha$. Действительно, если $\varphi \in \mathring{S}(\bar{A}, \bar{B})$, то

$$|\varphi(x)| \leqslant C(\varphi, \varepsilon) \prod_{i=1}^{m} \inf_k f \frac{(A+\varepsilon)^k k^k}{(\ln k)^k |x_i|^k} \leqslant C(\varphi, \varepsilon) \exp\left\{-\sum_{i=1}^{m} \frac{|x_i| \ln |x_i|}{(A+\varepsilon) e}\right\}, \tag{36}$$

где $\varepsilon > 0$ — любое.

Таким образом, если $\alpha < \frac{1}{Ae}$, то $\mathring{S}(\bar{A}, \bar{B}) < E_\alpha$. В силу теоремы 7 это вложение является плотным.

В роли пространства F мы выберем пространство $\mathring{S}(\bar{A}_1, \bar{B}_1)$, где $\bar{A}_1 = (A_1, \ldots, A_1)$, $\bar{B}_1 = (B_1 \ldots, B_1)$, $\alpha < \frac{1}{A_1 e}$, но $A_1 > A$. Тогда очевидны включения $\Phi \subset F \subset E$ и, кроме того, оценки (35) и (36) (в последней для $\varphi \in F$ следует заменить A на A_1), и аналогичные (36) оценки производных функций $\varphi(x) \in F$ показывают справедливость соотношения (3), где $P = (P_{il})^n_{i, l=1}$, $P^* = (P^*_{il})^n_{i, l=1}$.

Проверим выполнение условий теоремы 1. Первое из них состоит в разрешимости в пространстве F задачи (4)-(5) при любых $\varphi_j \in \Phi$, $j \in N$, что мы и докажем.

После преобразования Фурье задача (4)-(5) перейдет в следующую:

$$\frac{dy_i(s, t)}{dt} = -\sum_{l=1}^{n} A_{il}(-s) y_l(s, t), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4'}$$

$$y_i(s, 0) = \psi_i(s), \quad i \in N; \quad y_i(s, T) = 0, \quad i \in M, \tag{5'}$$

где

$$A_{li}(-s) = \sum_{(k)(j)} a_{li(k)(j)} \left[\prod_{q=1}^{m} (-is_q)^{k_q}\right] \exp\{-i(s, h_{(j)})\},$$

$\psi_j(s)$ — преобразования Фурье $\varphi_j(x)$, $j \in N$.

Решение $\bar{y}(s, t)$ системы (4') запишем в виде

$$\bar{y}(s, t) = Q(s, T-t)\bar{y}_0(s). \tag{37}$$

Условия (5') при $t = T$ дают $y_{0j}(s) = 0$, $j \in M$, а при $t = 0$ получаем

$$\sum_{k \in M} q_{jk}(s) y_{0k}(s) = \psi_j(s), \quad j \in N, \tag{38}$$

где $q_{jk}(s)$ — элементы матрицы $Q(s, t)$. Определитель системы (38) совпадает с $\Delta(s)$ и по условию теоремы при любом s отличен от нуля.

Решая эту систему, найдем $y_{0k}(s)$ при $k \overline{\in} M$. Подставляя найденное решение в (37), получим

$$\bar{y}(s, t) = \sum_{j \in N} \frac{1}{\Delta(s)} \bar{R}_j(s, t) \psi_j(s), \tag{39}$$

где $\bar{R}_j(s, t) = (R_{j1}(s, t), \ldots, R_{jn}(s, t))$, $R_{jk}(s, t)$ — целые функции, для которых справедливы оценки вида (7).

Применяя теперь теорему 3, заключаем, что

$$|R_{jk}(s, t)[\Delta(s)]^{-1}| \leqslant a_1 \exp\{a_2 \exp\{a_3 |\sigma|^{1/2}\} + a_4 \exp\{a_5 |\tau|\}\},$$

где $a_i > 0$, $i = 1, \ldots, 5$, $j \in N$, $k = 1, \ldots, n$. Отсюда, учитывая, что $R_{jk}(s)[\Delta(s)]^{-1}$ — целые функции, с помощью формулы Коши получаем оценки их производных при $s = \sigma$:

$$|D^{(k)}(R_{jk}(\sigma)[\Delta(\sigma)]^{-1})| \leqslant \left[\prod_{i=1}^{m} \frac{k_i!}{R_i^{k_i}}\right] a_1 \exp\{a_2' e^{a_3' |\sigma|^{1/2}} + a_4' e^{a_5' |\tau|}\} \leqslant$$

$$\leqslant a_1 \prod_{i=1}^{m} [k_i! R_i^{-k_i} \exp\{a_2'' \exp\{a_3'' |\sigma_i|^{1/2}\} + a_4'' \exp\{a_5 R_i\}\}],$$

$$a_i' > 0, \ a_i'' > 0, \ i = 2, \ldots, 5, \ D^{(k)} = \frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_m}}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_m^{k_m}}.$$

Полагая здесь $a_5'' R_i = \ln k_i$, получим

$$|D^{(k)}(R_{ik}(\sigma)[\Delta(\sigma)]^{-1})| \leqslant$$

$$\leqslant a_1 \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{k_i}{\ln k_i}\right)^{k_i} \exp\{a_2'' \exp\{a_3'' |\sigma_i|^{1/2}\}\} M^{k_i}, \tag{40}$$

$$k = 1, \ldots, n, \ M > 0, \ j \in N.$$

Если $\varphi_j(x) \in \overset{\circ}{S}(\bar{A}, \bar{B})$, $j \in N$, то для функции $\psi_j(s)$ справедливы оценки [5, стр. 524—525]:

$$|\sigma_1^{q_1} \cdots \sigma_m^{q_m} D^{(k)} \psi_j(\sigma)| \leqslant C \prod_{i=1}^{m} \left[(B + \varepsilon)^{q_i} (4A + \delta)^{k_i} \left(\frac{k_i + 2}{\ln(k_i + 2)}\right)^{k_i + 2} (\ln q_i)^{2q_i}\right], \tag{41}$$

где $C = C(\psi_j, \varepsilon, \delta)$.

Поделив (41) на $|\sigma_1^{q_1} \cdots \sigma_m^{q_m}|$ и перейдя к нижней грани по $q_1, \ldots, q_m$, получим ($j \in N$)

$$|D^{(k)} \psi_j(\sigma)| \leqslant C' \prod_{i=1}^{m} (4A + \delta)^{k_i} \left(\frac{k_i + 2}{\ln(k_i + 2)}\right)^{k_i + 2} \exp\left\{-\exp\left\{\left(\frac{|\sigma_i|}{B + \varepsilon}\right)^{1/2}\right\}\right\}. \tag{42}$$

Из оценок (40) и (42), предполагая, что $B < (a_3'')^{-2}$ и учитывая произвольность $\varepsilon > 0$, заключаем, что

$$|D^{(k)}[R_{jk}(\sigma, t)[\Delta(\sigma)]^{-1} \psi_j(\sigma)]| \leqslant$$

$$\leqslant C'' \prod_{i=1}^{m} \left[(4A + M + \delta)^{k_i} \left(\frac{k_i + 2}{\ln(k_i + 2)}\right)^{k_i + 2} \exp\left\{-\exp\left(\frac{|\sigma_i|}{B + \varepsilon}\right)^{1/2}\right\}\right].$$

Эти оценки в силу формулы (39) влекут за собой оценки $\bar{y}(\sigma, t)$:

$$|\sigma_1^{q_1} \cdots \sigma_m^{q_m} D^{(k)}\bar{y}(\sigma, t)| \leqslant$$

$$\leqslant C_0 \prod_{i=1}^{m} (4A + M + \delta)^{k_i} \left(\frac{k_i + 2}{\ln(k_i + 2)}\right)^{k_i+2} (B + \varepsilon)^{q_i} (\ln q_i)^{2q_i}.$$

Отсюда, возвращаясь к $\bar{v}(x, t)$, получим

$$|x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m} D^{(q)}\bar{v}(x, t)| \leqslant$$

$$\leqslant C_0' \prod_{i=1}^{m} (4A + M + \delta)^{k_i} \left(\frac{k_i + 2}{\ln(k_i + 2)}\right)^{k_i+2} (4B + \varepsilon)^{q_i} (\ln(q_i + 2))^{2(q_i+2)}.$$

Следовательно, в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ получаем

$$\bar{v}(x, t) \in \overset{\circ}{S}{}^{(n)} (\overline{4A + M}, \overline{4B}).$$

Таким образом, если $F = \overset{\circ}{S}(\overline{4A + M}, \overline{4B})$, $\Phi = \overset{\circ}{S}(\bar{A}, \bar{B})$, то $\Phi \subset F$, а если, кроме того, $\alpha < [e(4A + M)]^{-1}$, то $\Phi \subset F \subset E_\alpha$ и это вложение в силу теоремы 7 плотно. Напомним, что включение $\bar{v}(x, t) \subset F^{(n)}$ доказано в предположении $B < (a_3'')^{-2}$. (Постоянные a_3'' и M (40) определяются по матрице системы и определителю краевой задачи). Поэтому, взяв любое $B > 0$, удовлетворяющее этому условию, мы можем выбрать A из условия нетривиальности пространства Φ. Затем следует выбрать $\alpha < [e(4A + M)]^{-1}$. В этих предположениях условие 1) теоремы 1 выполнено. Условие 2) этой теоремы также выполнено при достаточно малом α, что следует из результатов [2, стр. 110]. Применяя теорему 1, получаем справедливость доказываемого факта.

Теорема 9. *Пусть (1)-(2) — невырожденная краевая задача типа A, $0 < A < \infty$. Тогда всякое решение этой задачи, удовлетворяющее при некотором $\beta < A$ условию*
$|D^{(k)}\bar{u}(x, t)| \leqslant C \exp\{\beta |x|\}$, $x \in R^m$, $t \in [0, T]$, $|(k)| \leqslant p$, *тождественно равно нулю.*

Доказательство и здесь будет основано на применении теоремы 1. Пусть E_β — пространство функций $e(x)$, для которых

$$\|e(x)\| = \int_{R^m} |e(x)| \exp\{\beta |x|\}\, dx < \infty.$$

Докажем единственность решения задачи (1)-(2) в пространстве $E_\beta'^{(n)}$ при некотором $\beta < A$, что совпадает с утверждением теоремы.

Обозначим $\Phi = \hat{S}\left(\frac{\bar{1}}{\gamma e}, \bar{B}\right)$, где постоянные γ и B удовлетворяют условию нетривиальности Φ. Легко видеть, что, если $\varphi(x) \in \Phi$,

$$|D^{(q)}\varphi(x)| \leqslant C \prod_{i=1}^{m} [(B + \delta)^{q_i} (\ln q_i)^{q_i} \exp\{-(\gamma - \varepsilon)|x_i|\}],$$

$$C = C(\varphi, \varepsilon, \delta) > 0, \quad D^{(q)} = \frac{\partial^{q_1 + \cdots + q_m}}{\partial x_1^{q_1} \cdots \partial x_m^{q_m}}.$$

Следовательно, $\Phi \subset E_\beta$ при $\gamma > \beta$ и это вложение в силу теоремы 7 плотно. Сопряженная задача (4)-(5) должна быть разрешима в некотором пространстве $F^{(n)}$, где $\Phi \subset F \subset E_\beta$. Это пространство укажем ниже. Преобразование Фурье приводит к задаче (4′)-(5′), причем если в (5) $\varphi_j \in \Phi$, $j \in N$, то в (5′) $\psi_j(s)$ удовлетворяют оценкам

$$|\sigma_1^{q_1} \ldots \sigma_m^{q_m} D^{(k)}\psi_j(\sigma)| \leqslant C' \prod_{i=1}^{m} (B+\delta)^{q_i} (\ln q_i)^{q_i} \left(\frac{4}{\gamma e} + \varepsilon\right)^{k_i} k_i^{k_i},$$

$C' = C'(\psi, \varepsilon, \delta)$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ — любые.

Откуда следует

$$|D^{(k)}\psi_j(\sigma)| \leqslant C'' \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{4}{\gamma e} + \varepsilon\right)^{k_i} k_i^{k_i} \exp\left\{-C \exp\left(\frac{|\sigma_i|}{B+\delta}\right)\right\}, \tag{43}$$

$\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ — любые, $C'' = C''(\psi_j, \varepsilon, \delta) > 0$, $C = C(\delta) > 0$.

Решение задачи (4′)-(5′) снова имеет вид (39). В рассматриваемом случае применима теорема 4, с помощью которой, а также теоремы 2, получим

$$|R_{jk}(s, t)[\Delta(s)]^{-1}| \leqslant a_1 \exp\{a_2 \exp\{a_3 |s|\}\}, \quad |\operatorname{Im} s| \leqslant A_0 < A.$$

Отсюда с помощью формулы Коши получаем при $s = \sigma$

$$|D^{(k)}[R_{jk}(\sigma, t)[\Delta(\sigma)]^{-1}]| \leqslant a_1' \prod_{i=1}^{m} \frac{k_i!}{R_i^{k_i}} \exp\{a_2' \exp\{a_3' |\sigma_i|\}\},$$

где R_i таковы, что соответствующий полуцилиндр лежит в области $|\operatorname{Im} s| \leqslant A_0$. Отсюда

$$|D^{(k)}(R_{jk}(\sigma, t)[\Delta(\sigma)]^{-1})| \leqslant a_1'' \prod_{i=1}^{m} k_i^{k_i} R_0^{k_i} \exp\{a_2' \exp(a_3' |\sigma_i|)\}. \tag{44}$$

Из (43) и (44), учитывая (39), можно заключить, что

$$|\sigma_1^{q_1} \ldots \sigma_m^{q_m} D^{(k)} y_j(\sigma, t)| \leqslant a_1''' \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{4}{\gamma e} + R_0 + \varepsilon\right)^{k_i} (B+\delta)^{q_i} k_i^{k_i} (\ln q_i)^{q_i},$$

если только $B < \frac{1}{a_3'}$, и тогда $\bar{v}(x, t) \in S^{(n)}\left(\overline{\frac{4}{\gamma e} + R_0}, \overline{4B}\right)$, где $\bar{v}(x, t)$ — решение задачи (4)-(5). Именно это пространство и примем за $F^{(n)}$ и потребуем, чтобы $F \subset E_\beta$. Последнее имеет место, если

$$\beta < \left[e\left(\frac{4}{\gamma e} + R_0\right)\right]^{-1} = \frac{\gamma}{4 + R_0 e\gamma} \, (< \gamma). \tag{45}$$

Итак, по системе и определителю задачи находим a_3' и R_0, затем выбираем любое B из условия $B < \frac{1}{a_3'}$ и γ из условия нетривиальности пространства Φ и, наконец, β из условия (45). Тогда условие 1) теоремы 1 выполнено. Доказательство заканчивается как в теореме 8.

Теорема 10. *Пусть (1)-(2) — невырожденная краевая задача нулевого типа, причем либо 1) $\Delta(\sigma) \neq 0$ при всех $\sigma \in R^m$; либо 2) существует $\sigma_0 \in R^m$, $\Delta(\sigma_0) = 0$. Тогда всякое решение $\bar{u}(x, t)$ задачи (1)-(2), удовлетворяющее в случае 1) при каком-либо $\mu > 0$ оценке*

$$|D^{(k)}\bar{u}(x, t)| \leqslant C(1 + |x|)^{\mu}, \quad x \in R^m, \quad t \in [0, T],$$

а в случае 2) принадлежащее $L_1(R^m)$, тождественно равно нулю.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 8 и второй части теоремы 11 из [1].

Отметим, что условиям теоремы 10 случай 1) не может удовлетворять разностная (по x) система вида (1) (т. е. когда $p=0$). Действительно, $\Delta(s)$ в этом случае является аналитической функцией переменных $z_1=\exp(is_1),\ldots$ $\ldots, z_m=\exp(is_m)$ и отличен от нуля при $z\in I=\{z\colon |z_1|=\cdots=|z_m|=1\}$, т. е. при $s=\sigma$. Если $\inf\limits_I|\Delta(z)|=\inf\limits_\sigma|\Delta(\sigma)|=\delta>0$, то и при некотором $a>0$ и при $|\tau|<a$ по непрерывности $|\Delta(\sigma+i\tau)|>\delta/2$, т. е. тип такой краевой задачи $\geqslant a$.

5. Теоремы неединственности

В этом параграфе будут приведены примеры, а также установлены теоремы неединственности решения задачи (1)-(2), показывающие, что теоремы предыдущего параграфа не могут быть существенно усилены, кроме того, будет исследована вырожденная задача (1)-(2).

В связи с результатом, полученным в теореме 8, рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t}=P_1(\Delta_1)u_1(x,t)+P_2\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \Delta_{h_1},\ldots,\Delta_{h_N}\right)u_2(x,t),$$

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t}=P_3\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \Delta_{h_1},\ldots,\Delta_{h_N}\right)u_2(x,t). \tag{46}$$

Здесь $P_1(\Delta_1)$ — произвольный полином относительно оператора сдвига Δ_1 ($\Delta_h u(x,t)\equiv u(x+h,t)$), P_2 и P_3 — произвольные линейные дифференциально-разностные операторы с постоянными коэффициентами. К (46) присоединим краевые условия

$$u_1(x,0)=0,\quad u_2(x,T)=0. \tag{47}$$

Задача (46)-(47) является невырожденной задачей бесконечного типа ($\Delta(s)=\exp\{TP_3(is,\ \exp(ish_1),\ldots,\exp(ish_N))\}$). Ясно, что функция $\bar u(x,t)=$ $=\{u_1(x,t),0\}$, где $u_1(x,t)$ — решение задачи Коши

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t}=P_1(\Delta_1)u_1(x,t),\quad u_1(x,0)=0, \tag{48}$$

будет решением задачи (46)-(47). Из результатов [6] следует существование нетривиального решения $u_1(x,t)$ задачи (48), удовлетворяющего оценке

$$|u_1(x,t)|\leqslant C\exp\{\alpha|x|\ln|x|\}$$

при любом значении параметра α, если только α^{-1} меньше степени полинома $P_1(s)$.

Этот пример показывает, что результат теоремы, вообще говоря, существенно улучшен быть не может.

Обратимся к остальным теоремам предыдущего параграфа. Их результаты полезно сравнить со следующими утверждениями.

Теорема 11. *Пусть (1)-(2) — невырожденная краевая задача типа A, $0<A<\infty$. Тогда при любом $B>A$ задача (1)-(2) имеет нетривиальное решение $\bar u(x,t)$, удовлетворяющее оценке*

$$|\bar u(x,t)|\leqslant C\exp\{B|x|\}. \tag{49}$$

Если известно, что существует s_A такое, что $|\operatorname{Im}s_A|=A$, $\Delta(s_A)=$ $=0$, то в оценке (49) можно B заменить на A.

Теорема 12. *Невырожденная краевая задача нулевого типа при любом $\varepsilon>0$ имеет нетривиальное решение $\bar u(x,t)$, удовлетворяющее оценке*

$$|\bar u(x,t)|\leqslant C\exp\{\varepsilon|x|\},$$

а если $\Delta(s)$ имеет вещественные нули, то задача (1)-(2) имеет ограниченные нетривиальные решения.

Доказательства теорем 11 и 12 аналогичны доказательству теоремы 7 из [1]. Искомые решения могут быть найдены в виде

$$\bar{u}(x, t) = \exp\{-i(s, x)\}\bar{z}(t),$$

где

$$\Delta(s) = 0, \quad \bar{z}(t) \not\equiv 0.$$

Результаты теорем 11 и 12 показывают, что условия единственности, указанные в теоремах 9 и 10, существенно улучшить нельзя.

Перейдем к рассмотрению вырожденной задачи. Как и во втором утверждении теоремы 12, в этом случае всегда существует нетривиальное ограниченное решение. Следующая теорема содержит более сильное утверждение.

Теорема 13. *Пусть (1)-(2) — вырожденная краевая задача. Тогда существует решение $\bar{u}(x, t)$ этой задачи, удовлетворяющее при некотором $C > 0$ оценке*

$$|\bar{u}(x, t)| \leqslant C_1 \exp\{-C|x|\ln|x|\}. \tag{50}$$

Доказательство. Пусть $\bar{u}(x, t)$ — решение задачи (1)-(2), $\bar{v}(s, t)$ — его преобразование Фурье. Тогда $\bar{v}(s, t)$ удовлетворяет системе уравнений с параметром s, формально получающейся из (1). Пусть $P(s)$ — матрица этой системы. Решение $\bar{v}(s, t)$ будем искать в виде

$$\bar{v}(s, t) = \exp\{tP(s)\}\bar{v}_0(s), \tag{51}$$

где $\bar{v}_0(s) = (v_{01}(s), \ldots, v_{0n}(s))$ следует выбрать из условий (2):

$$v_j(s, 0) = v_{0j}(s) = 0, \quad j = k_1, \ldots, k_r,$$
$$v_j(s, T) = \sum_{k \in N} [\exp\{TP(s)\}]_{jk} v_{0k}(s) = 0, \quad j = m_1, \ldots, m_{n-r}. \tag{52}$$

Определитель системы (52), как нетрудно видеть, равен $\Delta(-s) \equiv 0$, и поэтому при любом s система (52) имеет нетривиальное решение, которое можно построить в виде произведения произвольной функции $\varphi(s)$ на вектор, компонентами которого будут некоторые миноры матрицы $\exp\{TP(s)\}$. Но для таких миноров справедлива оценка (7). Выберем $p > p_0$, $A \geqslant H$ и обозначим $W_{p, A}$ совокупность всех целых функций $\varphi(s) \equiv \varphi(\sigma + i\tau)$, для которых верна оценка

$$|\varphi(s)| \leqslant C \exp\{C_1 e^{A|\tau|} - C_2|\sigma|^p\},$$

где

$$C = C(\varphi) > 0, \quad C_1 = C_1(\varphi) > 0, \quad C_2 = C_2(\varphi) > 0.$$

Ясно, что

$$W_{p, A} \subset W^{\Omega}, \quad \Omega(\tau) = e^{\tau} - \tau - 1,$$

где W^{Ω} (см. [2, гл. 1]) — совокупность целых аналитических функций $\varphi(s)$, удовлетворяющих оценкам

$$|s^k\varphi(s)| \leqslant C_k \exp\{\Omega(b|\tau|)\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$C_k = C_k(\varphi) > 0, \quad b = b(\varphi) > 0.$$

Из определения $W_{p, A}$ и оценки вида (7) следует, что если

$$\varphi(s) \in W_{p, A}, \text{ то } v_{0k}(s) \in W_{p, A}, \quad k \in N.$$

Следовательно, $\bar{v}_0(s) \in W^{(n)}_{p, A}$. Но тогда из (51) и (7) вновь при каждом $t \in [0, T]$ получаем $\bar{v}(s, t) \in W^{(n)}_{p, A}$. Поскольку (см. [2]) $F(W^{\Omega}) = W_{M(x)}$, $M(x) =$

$=(x+1)\ln(x+1)-x$, $W_{M(x)}$ — совокупность функций $\varphi(x)$, бесконечно дифференцируемых и удовлетворяющих оценкам

$$|D^{(q)}\varphi(x)|\leqslant C_{(q)}\exp\{-M(a|x|)\},$$
$$C_{(q)}=C_{(q)}(\varphi)>0,\ a=a(\varphi)>0,$$

то из включения $W_{p,A}\subset W^{\Omega}$ следует, что $\bar{u}(x,\ t)=F(\bar{v}(s,\ t))\in W_{M(x)}$, что и влечет оценку (50). Теорема доказана.

Приведем в заключение два примера. В первом из них рассмотрим вырожденную краевую задачу (1)-(2), обладающую нетривиальным финитным решением:

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t}=P_1\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \Delta_{h_1},\ \ldots,\ \Delta_{h_N}\right)u_1(x,\ t),$$
$$\frac{\partial u_2(x,\ t)}{\partial t}=P_2\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \Delta_{h_1},\ \ldots,\ \Delta_{h_N}\right)u_1(x,\ t)+\frac{\partial u_2(x,\ t)}{\partial x},$$
$$u_1(x,\ 0)=u_1(x,\ T)=0,$$

P_1, P_2 — произвольные дифференциально-разностные операторы.

Очевидным финитным решением этой задачи служит функция $\bar{u}(x,\ t)=$ $=(0,\ \varphi(x+t))$, где $\varphi(x)$ — финитная дифференцируемая функция.

Однако следующий пример показывает, что такие решения (финитные и нетривиальные) имеет отнюдь не любая вырожденная краевая задача. Более того, система вообще может не иметь нетривиальних финитных решений:

$$\frac{\partial u_1(x,\ t)}{\partial t}=u_1(x+1,\ t)+P\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \Delta_{h_1},\ \ldots,\ \Delta_{h_N}\right)u_2(x,\ t),$$
$$\frac{\partial u_2(x,\ t)}{\partial t}=u_2(x+1,\ t).$$

Отсутствие финитных нетривиальных решений системы следует из того, что их, как нетрудно убедиться, не имеет второе уравнение системы, а тогда из структуры системы видно, что и функция $u_1(x,\ t)\not\equiv 0$ не может быть финитной.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Борок. Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. «Матем. сб.», т. 79 (121): 2,

2. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений (обобщенные функции), вып. 3, М., 1950.

3. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. Физматгиз, М., 1956.

4. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Пространства основных и обобщенных функций (обобщенные функции, вып. 2), М., 1958.

5. К. И. Бабенко. Об одной новой проблеме квазианалитичности и преобразовании Фурье целых функций. «Труды матем. о-ва», Б , М., 1956.

6. В. М. Борок. Классы единственности решения задачи Коши для разностного аналога уравнений типа Соболева—Гальперна. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 6. Изд-во Харьковск ун-та, 1969.

7. В. М. Борок. О краевой задаче в бесконечном слое для линейных дифференциально-разностных систем. ДАН СССР, 189, № 1, 1969.

Поступила 20 апреля 1970 г.