НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ИЗ ГЕОМЕТРИИ ПРОСТРАНСТВ МИНКОВСКОГО

В. И. Лиокумович

Геометрические свойства нормированных пространств связаны со строением единичной сферы, основными характеристиками которой являются модули гладкости и выпуклости. Понятие модуля гладкости было впервые введено М. Дэем [1], а затем в эквивалентной форме Г. Кёте [2]. Понятие модуля выпуклости впервые было введено Дж. Кларксоном [3], позднее было предложено несколько других определений модуля выпуклости (см., например, [4,5]). Недавно Буй Мин Чи и В. И. Гурарием [6] были введены определения модуля выпуклости и модуля гладкости, в известном смысле «симметричные» друг другу.

Й. Линденштраусс [7] установил связь между модулями выпуклости и гладкости в B-пространстве E и пространстве, сопряженном с E, пользуясь определениями Г. Кёте, и показал, что пространства со скалярным произведением характеризуются «наивысшей гладкостью», т. е. наименьшим модулем гладкости. Особенности различных определений модулей выпуклости и гладкости успешно использовались в ряде работ по геометрии линейных нормированных пространств. В частности, некоторые свойства модуля выпуклости, введенного в [5], были использованы М. И. Кадецом при решении проблемы гомеоморфизма сепарабельных B-пространств. Симметрично определенные модули выпуклости и гладкости в [6] позволили обобщить равенство Парсеваля на ортогональные базисы в B-пространстве. В этой же работе [6] был найден ряд оценок для различных модулей выпуклости и гладкости и установлен ряд связей между ними.

В настоящей работе устанавливаются некоторые связи между различными определениями модулей гладкости и приводится сводная таблица связей между различными определениями модулей гладкости и выпуклости.

Для получения таких связей основным приемом является рассмотрение плоских выпуклых центрально-симметричных кривых Γ — единичных окружностей Минковского.

В дальнейшем мы будем предполагать рассматриваемое пространство E пространством типа B и специально этого оговаривать не будем.

1. Вспомогательные сведения

Приведем различные определения модулей выпуклости и гладкости.

1. *Модулем выпуклости* [3] и *модулем гладкости* [2] пространства E называются функции

$$\delta(\omega) = \inf_{\substack{\|x\|=\|y\|=1 \\ \|x-y\|=\omega}} \left(1 - \frac{\|x+y\|}{2}\right) (0 \leqslant \omega \leqslant 2)$$

и соответственно

$$\rho(\omega) = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=\omega}} \left(\frac{\|x+y\| + \|x-y\|}{2} - 1\right) (\omega \geqslant 0).$$

2. *Модулем выпуклости* [6] (в несколько ином виде эта величина была введена в [5]) пространства E называется функция

$$\tilde{\beta}(\omega) = \inf_{\substack{\|x\|=\|y\|=1 \\ \|x-y\|=\omega}} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} (1 - \|tx + (1-t)y\|) (0 \leqslant \omega \leqslant 2).$$

3. *Модулем выпуклости* и *модулем гладкости* [6] пространства E называются функции

$$\varphi(\omega) = \inf_{\substack{\|x\|=1,\ \|y\|=\omega \\ \widehat{(x,y)}=1}} (\|x+y\| - 1) \ (\omega \geqslant 0)$$

и соответственно

$$\mu(\omega) = \sup_{\substack{\|x\|=1,\ \|y\|=\omega \\ \widehat{(x,y)}=1}} (\|x+y\| - 1) \ (\omega \geqslant 0),$$

где $\widehat{(x, y)} = \inf\limits_{-\infty < t < \infty} \| x + ty \|$ — наклон нормированного элемента x к y.

Приведем соответствующие определения локальных модулей выпуклости и гладкости.

1′. *Локальным модулем выпуклости и локальным модулем гладкости* пространства E называются функции

$$\delta(x, \omega) = \inf_{\substack{\|y\|=1 \\ \|x-y\|=\omega}} \left(1 - \frac{\|x+y\|}{2}\right) (\|x\| = 1,\ 0 \leqslant \omega \leqslant 2)$$

и соответственно

$$\rho(x, \omega) = \sup_{\|y\|=\omega} \left(\frac{\|x+y\| + \|x-y\|}{2} - 1\right) (\|x\| = 1,\ \omega \geqslant 0).$$

2′. *Локальным модулем выпуклости* пространства E называется функция

$$\tilde{\beta}(x, \omega) = \inf_{\substack{\|y\|=1 \\ \|x-y\|=\omega}} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} (1 - \|tx + (1-t)y\|) \ (\|x\| = 1,\ 0 \leqslant \omega \leqslant 2).$$

3′. *Локальным модулем выпуклости и локальным модулем гладкости* пространства E называются функции

$$\varphi(x, \omega) = \inf_{\substack{\|y\|=\omega \\ \widehat{(x,y)}=1}} (\|x+y\| - 1) \ (\|x\| = 1,\ \omega \geqslant 0)$$

и соответственно

$$\mu(x, \omega) = \sup_{\substack{\|y\|=\omega \\ \widehat{(x,y)}=1}} (\|x+y\| - 1) \ (\|x\| = 1,\ \omega \geqslant 0),$$

где $\widehat{(x, y)} = \inf\limits_{-\infty \leqslant t \leqslant \infty} \| x + ty \|$ — наклон нормированного элемента x к y.

2. Связи между некоторыми определениями модулей гладкости

Лемма. *Пусть x и y — некоторые элементы плоскости Минковского B_Γ, $\|x\| = 1$. Тогда для любого $\alpha \geqslant 1$ имеет место неравенство*

$$\|x+y\| + \|x-y\| \leqslant \|x+\alpha y\| + \|x-\alpha y\|.$$

Доказательство. Отождествим элемент $x \in B_\Gamma$, $\|x\| = 1$ с некоторым вектором $\overline{O_1O}$ (где $O \in \Gamma$, Γ — кривая Минковского с центром в точке O_1) и проведем аффинное преобразование на плоскости так, чтобы касательная к Γ в точке O составляла с $\overline{O_1O}$ прямой угол (рис. 1).

Введем систему прямоугольных координат (η, ξ) с центром в точке O и пусть положительное направление оси ξ совпадает с направлением вектора $\overline{O_1O}$.

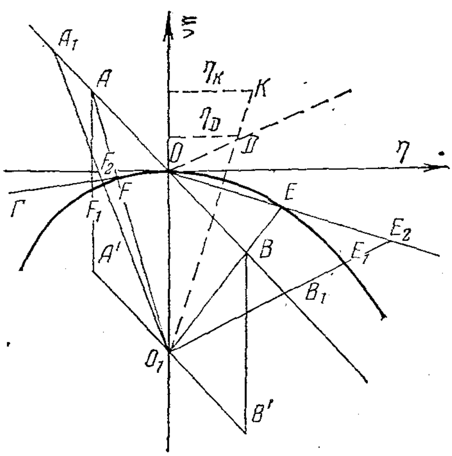

Рис. 1.

Выберем некоторый элемент $y \in B_\Gamma$, отождествим его с вектором $\overline{O_1A'}$ и пусть элементу $(x+y)$ соответствует вектор $\overline{O_1A}$, а элементу $(x-y)$ — вектор $\overline{O_1B}$. Соединим отрезком точки A и B, при этом, очевидно, AB пройдет через O и векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ будут представлять собой перенесенные в точку O векторы $\overline{O_1A'}$ и $\overline{O_1B'}$, где $\overline{O_1B'}$ соответствует элементу $(-y)$.

Если отложить вдоль направления $\overline{OA}$ и соответственно $\overline{OB}$ отрезки OA_1 ($|\overline{OA_1}| = \alpha|\overline{OA}|$, $\alpha > 1$) и OB_1 ($|\overline{OB_1}| = \alpha|\overline{OB}|$, $\alpha > 1$), затем соединить A_1 и B_1 с O_1, то вектор $\overline{O_1A_1}$ будет соответствовать элементу $(x+\alpha y)$, а вектор $\overline{O_1B_1}$ — элементу $(x-\alpha y)$.

Обозначим точки пересечения O_1A и O_1B (или их продолжений) с Γ через F и E соответственно, затем проведем через эти точки лучи из точки O. Тогда, учитывая выпуклость Γ, можно утверждать, что $\overline{O_1F_2} \geqslant |\overline{O_1F_1}|$ и $|\overline{O_1E_2}| \geqslant |\overline{O_1E_1}|$, где F_1 и E_1 — точки пересечения O_1A_1 и O_1B_1 (или их продолжений) с Γ, а F_2 и E_2 — соответственно с OF и OE.

Соединим отрезком точку $O_1(0, -1)$ с некоторой точкой $K(\eta_K, \xi_K)$. Пусть O_1K пересекает некоторый луч OD (описываемый уравнением $\xi = k_0\eta$) в точке $D(\eta_D, \xi_D)$. Тогда, очевидно, имеет место равенство

$$\frac{|\overline{O_1K}|}{|\overline{O_1D}|} = \frac{\eta_K}{\eta_D}.$$

Решая совместно уравнения $O_1K\left(\frac{\xi+1}{\xi_K+1} = \frac{\eta}{\eta_K}\right)$ и OD, получим значение координаты η_D, $\eta_D = \frac{\eta_K}{\xi_K - k_0\eta_K + 1}$, и величину отношения $\frac{\eta_K}{\eta_D} = \xi_K - k_0\eta_K + 1$.

Вследствие сказанного можно написать

$$\|x+\alpha y\| + \|x-\alpha y\| = \frac{|\overline{O_1A_1}|}{|\overline{O_1F_1}|} + \frac{|\overline{O_1B_1}|}{|\overline{O_1E_1}|} \geqslant \frac{|\overline{O_1A_1}|}{|\overline{O_1F_2}|} + \frac{|\overline{O_1B_1}|}{|\overline{O_1E_2}|} =$$

$$= (\alpha\xi_A) - k_1(-\alpha\eta_A) + 1 + (-\alpha\xi_A) - (-k_2)\alpha\eta_A + 1 = \alpha(k_1+k_2)\eta_A + 2$$

и аналогично (но без промежуточного неравенства)

$$\|x+y\| + \|x-y\| = (k_1+k_2)\eta_A + 2.$$

При этом мы предположили, что $\xi = k_1\eta$ — уравнение OF, $\xi = -k_2\eta$ — уравнение OE и координаты точек равны

$$A(-\eta_A, \xi_A),\ A_1(-\alpha\eta_A, \alpha\xi_A),\ B(\eta_A, -\xi_A),\ B_1(\alpha\eta_A, -\alpha\xi_A),$$

где, очевидно, k_1, k_2, η_A, $\xi_A > 0$.

Таким образом,

$$(\|x+\alpha y\| + \|x-\alpha y\|) - (\|x+y\| + \|x-y\|) \geqslant (\alpha-1)(k_1+k_2)\eta_A \geqslant 0,$$

что и доказывает лемму.

Следствие $\rho(x, \omega)$ и $\rho(\omega)$ — неубывающие функции от ω.

Действительно, пусть sup в определении $\rho(x, \omega)$ достигается для некоторого y_0, $\|y_0\| = \omega$. Но в соответствии с леммой, учитывая определение $\rho(x, \omega)$, имеем для $\alpha > 1$

$$\rho(x, \omega) = \sup_{\|y\|=\omega}\left(\frac{\|x+y\| + \|x-y\|}{2} - 1\right) = \frac{\|x+y_0\| + \|x-y_0\|}{2} - 1 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\|x+\alpha y_0\| + \|x-\alpha y_0\|}{2} - 1 \leqslant \sup_{\|y\|=\alpha\omega}\left(\frac{\|x+y\| + \|x-y\|}{2} - 1\right) = \rho(x, \alpha\omega).$$

Для $\rho(\omega)$ доказательство аналогичное.

Замечание. Результат, который доказывается этим следствием, непосредственно вытекает также из известной теоремы, доказанной Й. Линденштрауссом [7], *о связи между модулем гладкости B-пространства и модулем выпуклости пространства, сопряженного с ним.*

Предложение 1. $\rho(\omega)$, $\rho(x, \omega) \leqslant \omega$.

Действительно,

$$\rho(\omega) = \sup_{\|x\|=1,\ \|y\|=\omega}\left(\frac{\|x+y\| + \|x-y\|}{2} - 1\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\|x\|=1,\ \|y\|=\omega}\left(\frac{\|x\| + \|y\| + \|x\| + \|y\|}{2} - 1\right) = \omega.$$

Для $\rho(x, \omega)$ доказательство аналогичное.

Замечание. Эта же оценка имеет место и для $\mu(\mu(\omega), \mu(x, \omega) \leqslant \omega)$.

Предложение 2. *Для гильбертова пространства* [7,6]

$$\rho_H(\omega) = \mu_H(\omega) = \sqrt{1+\omega^2} - 1.$$

Теорема 1. *Для произвольного пространства Минковского справедливы неравенства*

$$\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\omega}{2}\right) \leqslant \mu(\omega),\quad \omega \geqslant 0,$$

$$\frac{3}{2}\rho\left(\frac{\omega}{3}\right) \leqslant \mu(\omega),\quad 1 \geqslant \omega \geqslant 0.$$

Теорема 2. *Для произвольного пространства Минковского справедливо неравенство*

$$\frac{3}{2}\rho\left(x, \frac{\omega}{3}\right) \leqslant \mu(x, \omega),\quad 1 \geqslant \omega \geqslant 0.$$

Объединим доказательства обеих теорем.

Доказательство. Пусть Γ — некоторая кривая Минковского с центром в точке O_1. И пусть для некоторых ее элементов x_1 и x_2 и некоторых чисел ω и c $(c \geqslant 1 \geqslant \omega \geqslant 0)$ выполняется

$$\rho\left(x_1, \frac{\omega}{c}\right) = \rho\left(\frac{\omega}{c}\right),\quad \mu(x_2, \omega) = \mu(\omega). \tag{1}$$

Обозначим

$$m = \mu(x_2, \omega) + 1 = \mu(\omega) + 1. \qquad (2)$$

Здесь $\rho\left(x_1, \frac{\omega}{c}\right)$, $\mu(x_2, \omega)$ — локальные модули гладкости, а $\rho\left(\frac{\omega}{c}\right)$, $\mu(\omega)$ — модули гладкости пространства Минковского, образованного Г.

Отождествим x_1 с $\overline{O_1O}$, где $O \in \Gamma$. Очевидно, можно провести такое аффинное преобразование на плоскости, что кривая Г будет вписана в квадрат (обозначим его $K = QRSP$) со стороной 2 и центром в O_1 так, что точка $O \in \Gamma$ совпадет (рис. 2) с серединой одной из его сторон (пусть это будет QR).

Соединим отрезками середины противоположных сторон квадрата K и обозначим точки пересечения Г с отрезком, перпендикулярным к $\overline{O_1O}$, через T и V.

Построим геометрическое место концов векторов вида $(x + y)$, где $x = \overline{O_1O}$, $\|y\| = \frac{\omega}{c}$. Полученная кривая Γ_0 с центром в точке O, очевидно, подобна Г и для $W \in \Gamma_0$, $W_1 \in \Gamma$ таких, что $\overline{OW} \parallel \overline{O_1W_1}$, имеет место соотношение $\frac{|\overline{OW}|}{|\overline{O_1W_1}|} = \frac{\omega}{c}$. Подобно предыдущему Γ_0 можно вписать в квадрат K_0 со стороной $2 \cdot \frac{\omega}{c}$.

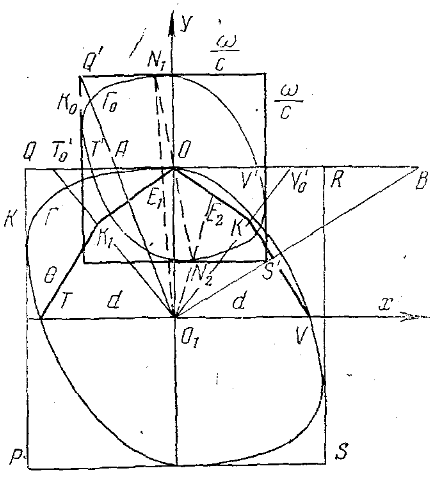

Рис. 2.

Введем соответствие между обозначениями: каждой точке $A \in \Gamma$, K будет соответствовать точка $A' \in \Gamma_0$, K_0, причем $\frac{|\overline{OA'}|}{|\overline{O_1A}|} = \frac{\omega}{c}$.

Отложим от точки O в сторону Q и R отрезки OT_0' и OV_0' соответственно такие, что $|\overline{OV_0'}| = |\overline{OT_0'}| = c|\overline{OV'}| = c|\overline{OT'}|$, т. е., если обозначить

$$d = |\overline{O_1T}| = |\overline{O_1V}|, \text{ то } |\overline{OV_0'}| = |\overline{OT_0'}| = d\omega.$$

Соединим отрезками точки T_0' и V_0' с O_1 и отложим от T_0' и V_0' вдоль $\overline{T_0'O_1}$ и $\overline{V_0'O_1}$ соответственно отрезки $\overline{T_0'K_1}$ и $\overline{V_0'K}$, такие, что

$$\frac{|\overline{O_1T_0'}|}{|\overline{O_1K_1}|} = \frac{|\overline{O_1V_0'}|}{|\overline{O_1K}|} = m,$$

и соединим отрезками точки T, K_1, O, K, V в порядке обхода.

Полученная ломаная $\theta = TK_1OKV$ не выходит за пределы кривой Г. Действительно, пусть, например, $|\overline{O_1K_1'}| < |\overline{O_1K_1}|$, где K_1' — точка пересечения $\overline{O_1T_0'}$ с Г. Но тогда для $x_1 = \overline{O_1O}$

$$\mu(x_1, \omega) = \sup_{\substack{\|y\|=\omega \\ \widehat{(x,\ y)}=1}} (\|x_1 + y\| - 1) \geqslant \frac{|\overline{O_1T_0'}|}{|\overline{O_1K_1'}|} - 1 > \frac{|\overline{O_1T_0'}|}{|\overline{O_1K_1}|} - 1 = m - 1 = \mu(\omega),$$

что невозможно, поскольку

$$\mu(\omega) = \sup_{\|x\|=1} \mu(x, \omega) \geqslant \mu(x_1, \omega).$$

Все сказанное полностью относится и к точке K.

Поэтому справедливо следующее неравенство:

$$|\overline{O_1E}| \leqslant |O_1E^{\Gamma}|, \ E \in \theta, \ E^{\Gamma} \in \Gamma, \ \overline{O_1E} \parallel \overline{O_1E^{\Gamma}}. \tag{3}$$

Согласно определению модуля гладкости ρ, учитывая (1) и лемму, можно написать

$$\rho\left(x_1, \frac{\omega}{c}\right) = \frac{1}{2} \sup_{\|y\| = \frac{\omega}{c}} (\|x_1 + y\| + \|x_1 - y\| - 2) =$$

$$= \frac{1}{2} \sup_{M \in \Gamma_0} (\|\overline{O_1O} + \overline{OM}\| + \|\overline{O_1O} - \overline{OM}\| - 2) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sup_{N \in K_0} (\|\overline{O_1O} + \overline{ON}\| + \|\overline{O_1O} - \overline{ON}\| - 2), \ \overline{ON} \parallel \overline{OM}. \tag{4}$$

Проведем прямую через точку O, обозначим точки пересечения ее с K_0 через N_1 и N_2 и соединим их отрезками с O_1. Если обозначить точки пересечения $\overline{O_1N_1}$ и $\overline{O_1N_2}$ с Γ (соответственно с θ) через E_1^{Γ} и E_2^{Γ}* (соответственно через E_1 и E_2), то, учитывая (3), получим для $N = N_1 \in K_0$

$$\|\overline{O_1O} + \overline{ON}\| + \|\overline{O_1O} - \overline{ON}\| = \|\overline{O_1O} + \overline{ON_1}\| + \|\overline{O_1O} + \overline{ON_2}\| =$$

$$= \frac{|\overline{O_1N_1}|}{|\overline{O_1E_1^{\Gamma}}|} + \frac{|\overline{O_1N_2}|}{|\overline{O_1E_2^{\Gamma}}|} \leqslant \frac{|\overline{O_1N_1}|}{|\overline{O_1E_1}|} + \frac{|\overline{O_1N_2}|}{|\overline{O_1E_2}|},$$

что в сочетании с (4) дает

$$\rho\left(\frac{\omega}{c}\right) \leqslant \frac{1}{c} \cdot \sup_{\substack{N_1, N_2 \in K_0, N_1 \neq N_2 \\ \overline{ON_1} \parallel \overline{ON_2}}} \left(\frac{|\overline{O_1N_1}|}{|\overline{O_1E_1}|} + \frac{|\overline{O_1N_2}|}{|\overline{O_1E_2}|} - 2\right), \ E_1, E_2 \in \theta. \tag{5}$$

Введем прямоугольную систему координат с центром в точке O_1 так, чтобы ось x совпадала с направлением $\overline{O_1V}$, ось y — соответственно с $\overline{O_1O}$. Пусть точка N_1 имеет в этой системе координату $x_{N_1} < 0$, N_2 — соответственно $x_{N_2} > 0$, O_1N_1 и O_1N_2 описываются уравнениями $y = -k_1x$ и $y = k_2x$, а пересекающиеся с O_1N_1 и O_1N_2 отрезки ломаной θ — уравнениями

$$y = k_3x + b_3 \quad \text{и} \quad y = -k_4x + b_4$$

соответственно, где

$$k_1, \ k_2 \ k_3, \ k_4, \ b_3, \ b_4 > 0. \tag{6}$$

В этих терминах x-координаты точек E_1 и E_2 будут

$$x_{E_1} = -\frac{b_3}{k_3 + k_1}, \ x_{E_2} = \frac{b_4}{k_4 + k_2}.$$

Определим $\sup\limits_{K_0}$ величины

$$s = \frac{|\overline{O_1N_1}|}{|\overline{O_1E_1}|} + \frac{|\overline{O_1N_2}|}{|\overline{O_1E_2}|} = \frac{x_{N_1}}{x_{E_1}} + \frac{x_{N_2}}{x_{E_2}}, \tag{7}$$

которая после подстановки в (7) значений x_{E_1}, x_{E_2} с учетом

$$x_{N_2} = -x_{N_1}, \ k_1 = -\frac{y_{N_1}}{x_{N_1}}, \ k_2 = \frac{y_{N_2}}{x_{N_2}} = \frac{2 - y_{N_1}}{-x_{N_1}}$$

примет вид

$$s = y_{N_1}\left(\frac{1}{b_3} - \frac{1}{b_4}\right) - x_{N_1}\left(\frac{k_3}{b_3} + \frac{k_4}{b_4}\right) + \frac{2}{b_4}. \tag{8}$$

* Точки E_1^{Γ} и E_2^{Γ} на рис. 2 не обозначены.

Учитывая осевую симметрию K_0 и θ, для определения наибольшего значения величины s при перемещении точки N_1 по контуру K_0 достаточно рассмотреть часть квадрата K_0 с границами $-\frac{\omega}{c} \leqslant x \leqslant 0,\ 1 \leqslant y \leqslant 1+\frac{\omega}{c}$.

Пусть $y_{N_1} = \mathrm{const}$, тогда s растет с ростом $(-x_{N_1})$, поскольку вторая скобка в (8) положительна.

Пусть $x_{N_1} = const$. Покажем, что s не убывает с ростом y_{N_1}, т. е., что первая скобка в (8) неотрицательна. Точка E_1 лежит либо на TK_1 (соответственно E_2 — на KV, но не на OK, в связи с очевидным неравенством $\angle N_1O_1O \leqslant \angle N_2O_1O$ и осевой симметрией θ) либо на K_1O (соответственно E_2 — на KV либо OK). В первом случае $b_3 = b_4$ ввиду симметрии θ, во втором $b_3 \leqslant b_4$ *. Таким образом, первая скобка в (8) неотрицательна.

Подводя итоги, приходим к выводу, что $\sup\limits_{K_0} s$ достигается при $N_1 = Q'$, $N_2 = S'$. Учитывая (5), (7), (8) и полученное выше заключение, можно написать

$$\rho\left(\frac{\omega}{c}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left[y_{Q'}\left(\frac{1}{b_3}-\frac{1}{b_4}\right) - x_{Q'}\left(\frac{k_3}{b_3}+\frac{k_4}{b_4}\right)+\frac{2}{b_4}-2\right]. \tag{9}$$

Для определения величин, входящих в (9), найдем координаты некоторых точек:

$$\begin{gathered} K_1\left(-\frac{d\omega}{m}, \frac{1}{m}\right),\ A\left(-\frac{\omega}{c+\omega}, 1\right),\ T_0'(-d\omega, 1), \\ K\left(\frac{d\omega}{m}, \frac{1}{m}\right),\ B\left(\frac{\omega}{c-\omega}, 1\right),\ V_0'(d\omega, 1), \end{gathered} \tag{*}$$

где A и B — точки пересечения QR с O_1Q' и продолжением O_1S' соответственно.

Учитывая, что выбор числа c в достаточной степени произволен, остановимся на двух вариантах определения величин k_3, b_3, k_4, b_4.

1) k_3, b_3 определяются уравнением K_1O, а k_4, b_4 — уравнением KV, для чего достаточно, чтобы $|\overline{OA}| \leqslant |\overline{OT_0'}|$, т. е. $\frac{\omega}{c+\omega} \leqslant d\omega$ и $|\overline{OB}| \geqslant |\overline{OV_0'}|$, т. е. $\frac{\omega}{c-\omega} \geqslant d\omega$ или, объединяя оба неравенства,

$$\frac{1}{c+\omega} \leqslant d \leqslant \frac{1}{c-\omega}. \tag{**}$$

2) k_4, b_4 определяются уравнением OK, а k_3, b_3 — как и в первом варианте, уравнением K_1O. Для выполнения обоих условий достаточно, чтобы $|\overline{OB}| \leqslant |\overline{OV_0'}|$, т. е.

$$\frac{1}{c-\omega} \leqslant d. \tag{***}$$

Определим величины k_3, b_3, k_4, b_4, соответствующие каждому из выбранных случаев, учитывая (*):

$$\begin{gathered} 1)\ k_3 = \frac{m-1}{d\omega},\ b_3 = 1,\ k_4 = \frac{\frac{1}{m}}{d-\frac{d\omega}{m}},\ b_4 = k_4 d \\ 2)\ k_3 = k_4 = \frac{m-1}{d\omega},\ b_3 = b_4 = 1. \end{gathered} \tag{****}$$

* Можно показать, что ломаная OKV всегда выпукла вверх. Это связано с тем, что $\mu(\omega) \leqslant \omega$ (см. замечание к предложению 1).

Рассмотрим сначала первый случай. Неравенство (9) перейдет в

$$\rho\left(\frac{\omega}{c}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{\omega}{c}\right)(1-m+\omega)+\frac{\omega}{c}\left(\frac{m-1}{d\omega}+\frac{1}{d}\right)+2(m-\omega)-2\right],$$

и если положить $c=\frac{1}{d}$, что не противоречит (**), и подставить $m-1=\mu(\omega)$, получим

$$\rho(\omega d) \leqslant \frac{1}{2}\mu(\omega)(2-\omega d)+\frac{\omega^2 d}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}\mu(\omega)\left[2-\omega d+\frac{\omega^2 d}{\mu(\omega)}\right]. \tag{10}$$

Как известно, «наиболее гладким», т. е. имеющим наименьший модуль гладкости, является гильбертово пространство (см., например, [7]). Подставив в квадратную скобку в (10) это значение модуля гладкости из предложения 2, мы не нарушим неравенства. Имеем

$$\rho(\omega, d) \leqslant \mu(\omega)\left[\frac{2-\omega d}{2}+\frac{\omega^2 d}{2(\sqrt{1+\omega^2}-1)}\right]=$$
$$=\mu(\omega)\left[1+d\frac{(1-\omega)+\sqrt{1+\omega^2}}{2}\right] \leqslant \mu(\omega)(1+d),$$

откуда, подставив слева наименьшее значение $d=\frac{1}{2}$, а справа наибольшее $d=1$, получим

$$\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\omega}{2}\right) \leqslant \mu(\omega), \tag{11}$$

что и требовалось доказать.

Здесь мы воспользовались неубыванием функции $\rho(\omega d)$ (см. следствие леммы) и неравенством $\frac{1}{2} \leqslant d \leqslant 1$, которое вытекает из выпуклости кривой Γ, вписанной в квадрат K со стороной 2. Остается проверить выполнение (11) для $\omega > 1$. Воспользуемся очевидным (с учетом следствия к лемме) неравенством

$$\frac{\rho\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\mu(\omega)} \leqslant \frac{\rho\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\mu_H(\omega)} \leqslant \frac{\omega}{2(\sqrt{1+\omega^2}-1)} \leqslant \frac{1}{\omega}+\frac{1}{2},$$

в котором правая часть убывает с ростом ω. Положив $\omega=\frac{2}{3}$, получаем снова (11), которое, таким образом, выполняется и для $\omega > 1\left(>\frac{2}{3}\right)$.

Рассмотрим второй вариант определения k_3, b_3, k_4, b_4 в (****), для которого должно выполняться (***). Подставив соответствующие значения в (9), получим неравенство

$$\rho\left(\frac{\omega}{c}\right) \leqslant \frac{\mu(\omega)}{cd},$$

которое после подстановки $d=d_{\min}=\frac{1}{2}$ и $c=3$ (причем первая подстановка не ослабляет само неравенство и обе подстановки не противоречат (***) для $\omega \leqslant 1$) переходит в

$$\frac{3}{2}\rho\left(\frac{\omega}{3}\right) \leqslant \mu(\omega), \quad \omega \leqslant 1, \tag{12}$$

чем доказывается второе утверждение теоремы 1.

Предположим, что в (1) $x_1 = x_2 = x$ и $\rho\left(\frac{\omega}{c}\right)$, $\mu(\omega)$ — локальные модули гладкости в некоторой точке $x = \overline{O_1O}$, $O \in \Gamma$. Но в этом случае получением неравенства (12) завершено также и доказательство теоремы 2.

В заключение приводим сводные таблицы связей между различным образом определенными модулями выпуклости и гладкости. Большинство этих связей получено в [6].

Автор пользуется случаем выразить глубокую признательность В. И. Гурарию за постановку задачи.

Таблица 1

Соотношения между различными модулями выпуклости

	$\delta(\omega)$	$\widetilde{\beta}(\omega)$	$\varphi(\omega)$
$\delta(\omega)$		$\delta(\omega) \leqslant \widetilde{\beta}(\omega)$	$\delta(\omega) \leqslant \varphi\left(\frac{3}{2}\omega\right)$
$\widetilde{\beta}(\omega)$	$\widetilde{\beta}(\omega) \leqslant 2\delta(\omega)$		$\widetilde{\beta}(\omega) \leqslant \varphi\left(\frac{3}{2}\omega\right)$
$\varphi(\omega)$	$\varphi\left(\frac{\omega}{4}\right) \leqslant 2\delta(\omega)$	$\varphi\left(\frac{\omega}{4}\right) \leqslant \widetilde{\beta}(\omega)$	

Таблица 2

Соотношения между различными локальными модулями выпуклости

	$\delta(x, \omega)$	$\widetilde{\beta}(x, \omega)$	$\varphi(x, \omega)$
$\delta(x, \omega)$		$\delta(x, \omega) \leqslant \widetilde{\beta}(x, \omega)$	$\delta(x, \omega) \leqslant \varphi\left(x, \frac{3}{2}\omega\right)$
$\widetilde{\beta}(x, \omega)$	$\widetilde{\beta}(x, \omega) \leqslant 2\delta(x, \omega)$		$\widetilde{\beta}(x, \omega) \leqslant \varphi\left(x, \frac{3}{2}\omega\right)$
$\varphi(x, \omega)$	——— *	——— *	

* Неравенство не имеет места [6].

Таблица 3

Соотношения между различными модулями гладкости и локальными модулями гладкости

	$\rho(\omega)$	$\mu(\omega)$
$\rho(\omega)$		1) $\rho\left(\frac{\omega}{2}\right) \leqslant 2\mu(\omega)$, $\omega \geqslant 0$ 2) $\rho\left(\frac{\omega}{3}\right) \leqslant \frac{2}{3}\mu(\omega)$, $1 \geqslant \omega \geqslant 0$
$\mu(\omega)$	$\mu(\omega) \leqslant 2\rho(\omega)$	

	$\rho(x, \omega)$	$\mu(x, \omega)$
$\rho(x, \omega)$		$\rho\left(x, \frac{\omega}{3}\right) \leqslant \frac{2}{3}\mu(x, \omega)$, $1 \geqslant \omega \geqslant 0$
$\mu(x, \omega)$	$\mu(x, \omega) \leqslant 2\rho(x, \omega)$	

ЛИТЕРАТУРА

1. M. M. Day. Uniform convexity in factor and conjugate spaces., Ann. of Math., (2), 45, 1944, 375—385.

2. G. Köthe. Topologishe lineare Raume, Berlin — Gottingen — Heidelberg, 1958.

3. J. A. Clarkson. Uniformly convex spaces., Trans. Amer. Math. Soc., **40**, 3, 1936, 396—414.

4. М. М. Дэй. Нормированные линейные пространства. ИЛ, М., 1961.

5. В. И. Гурарий. О модулях выпуклости и гладкости банаховых пространств. ДАН СССР, **161**, 5, 1965.

6. Буй Мин Чи и В. И. Гурарий. Некоторые характеристики нормированных пространств и их применение к обобщению равенства Парсеваля на пространства Банаха. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 8. Изд-во Харьковск. ун-та, 1969.

7. J. Lindenstrauss. On the modulus of smoothness and divergent series in Banach Spaces,. Michigan Math. Journ., **10**, 1963, 241—252.

Поступила 11 мая 1970 г.