ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ХИЛЛА С ОПЕРАТОРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ, ИМЕЮЩИМ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЕ СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ

Ф. С. Рофе-Бекетов, В. И. Храбустовский

Настоящая заметка связана с вопросами, рассмотренными М. Г. Крейном в его лекциях [1], и непосредственно примыкает к нашей предыдущей работе [2]. Цель заметки — обобщение на случай уравнения в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве H следующей теоремы, установленной М. Г. Крейном [3] в конечномерном случае ($\dim H = n < \infty$), а для скалярного случая — принадлежащей А. М. Ляпунову (1899 г.).

Теорема В. Пусть в уравнении для n-мерной вектор-функции $y(t)$:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda P(t)\, y = 0 \tag{1}$$

периодический самосопряженный операторный коэффициент $P(t)$,

$$P(t+T) = P(t), \quad P^*(t) = P(t) \tag{2}$$

удовлетворяет условиям

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\, dt \geqslant 0 \tag{3}$$

и для любого $f \in H$

$$\int_0^T \| P(t) f \|\, dt > 0, \quad (f \neq 0). \tag{4}$$

Тогда все решения уравнения (1) устойчиво ограничены, коль скоро

$$\lambda \in \Delta_0^+ \overset{\text{def}}{=} \{\lambda : 0 < \lambda < \lambda_1\}, \tag{5}$$

где $\lambda_1 > 0$ — наименьшее по абсолютной величине положительное число спектра краевой задачи:

$$y'' + \lambda P(t)\, y = 0, \quad y(0) + y(T) = y'(0) + y'(T) = 0. \tag{6}$$

В направлении обобщения теоремы В на случай $\dim H = \infty$ М. Г. Крейн привел в своих лекциях [1] следующие две теоремы.

Теорема С. Пусть в уравнении (1) коэффициент $P(t)$ удовлетворяет (2),

$$P(t) \text{ слабо измерим}, \quad \| P(t) \| \in L_1(0, T), \tag{7}$$

а оператор $P_{\text{ср}}$ равномерно положителен: $P_{\text{ср}} \gg 0$, т. е. $\exists \varepsilon > 0 : P_{\text{ср}} \geqslant \varepsilon I$. Тогда найдется такое $\mu > 0$, что при $0 < \lambda < \mu$ все решения уравнения (1) будут устойчиво ограничены.

Теорема D. При условиях теоремы C и дополнительном требовании $P(t) \geqslant 0$ все решения уравнения (1) устойчиво ограничены, коль скоро $\lambda \in \Delta_0^+$ (5).

Поясним (см. [2]), что в случае $\dim H = \infty$ под спектром задачи (6) подразумевается совокупность тех значений λ, при которых оператор в $H^2 = H \oplus H$

$$\Omega(\lambda) = \begin{pmatrix} \theta(T, \lambda) + I & \varphi(T, \lambda) \\ \theta'(T, \lambda) & \varphi'(T, \lambda) + I \end{pmatrix} \tag{8}$$

не имеет ограниченного обратного во всем H^2. Здесь $\theta(t, \lambda)$, $\varphi(t, \lambda)$ являются операторными решениями уравнения (1), удовлетворяющими начальным условиям

$$\theta(0, \lambda) = \varphi'(0, \lambda) = I, \quad \theta'(0, \lambda) = \varphi(0, \lambda) = 0,$$

где I — единичный оператор в H.

Из асимптотики для θ, φ, θ' φ' при $\lambda \to 0$ следует существование окрестности точки $\lambda = 0$, свободной от спектра задачи (6).

Докажем теперь следующее утверждение.

Теорема 1. *Все решения уравнения Хилла* (1) *с операторным коэффициентом* $P(t) = P^*(t) = P(t+T)$ *устойчиво* ограничены при* $\lambda \in \Delta_0^+$ (5) *в каждом из следующих двух случаев:*

1°. *Если оператор-функция* $P(t)$ *B-интегрируема**, удовлетворяет условию* (3) ($P_{\text{ср}} \geqslant 0$) *и при некотором* $\delta > 0$

$$\int_0^T \| P(t) f \| \, dt \geqslant \delta \| f \| \quad (f \in H). \tag{9}$$

2°. $P(t)$ *удовлетворяет (7) и*

$$P_{\text{ср}} \gg 0. \tag{10}$$

При этом в случае 1° *условие* (9) *нельзя заменить более слабым условием* (4), *если* $\dim H = \infty$, *а условие B-интегрируемости* $P(t)$ *нельзя заменить более слабыми условиями* (7).

Отметим, что в случае 1° сформулированная теорема 1 переходит в теорему B, когда $\dim H = n < \infty$, так как тогда условия (9) и (4) становятся эквивалентными, а случай 2° теоремы 1 уточняет теорему C, давая оценку снизу для правого конца односторонней зоны устойчивости уравнения (1), и охватывает при этом теорему D (см. также наше письмо в редакцию, стр. 195).

Доказательство теоремы 1 опирается на предложенное М. Г. Крейном ([3], $\dim H < \infty$) преобразование уравнения (1) к канонической системе в сдвоенном гильбертовом пространстве $H^2 = H \oplus H$ (см. также [4, гл. VI])

$$\frac{dx}{dt} = J\,[H_0 + \lambda H_1(t)]\,x \tag{11}$$

с помощью подстановок ($\lambda \neq 0$):

$$x(t) = y \oplus z, \quad z(t) = \frac{1}{\lambda}\frac{dy}{dt} + Q(t)\,y, \tag{12}$$

где

$$Q(t) = \int_0^t (P(s) - P_{\text{ср}})\, ds. \tag{13}$$

* Относительно возмущений коэффициента $P(t)$, подчиненных условиям (2), (7) и достаточно малых в метрике

$$\rho(\widetilde{P}, P) = \int_0^T \| \widetilde{P}(t) - P(t) \| \, dt.$$

** То есть интегрируема по Бохнеру в смысле равномерной операторной топологии.

Здесь

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad H_0 = \begin{pmatrix} P_{\text{ср}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_1(t) = \begin{pmatrix} Q^2(t) & -Q(t) \\ -Q(t) & I \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Обозначим через $U(t, \lambda)$ операторное решение задачи Коши

$$\frac{dU(t, \lambda)}{dt} = J[H_0 + \lambda H_1(t)]\, U(t, \lambda), \quad U(0, \lambda) = I_2, \tag{15}$$

где I_2 — единичный оператор в H^2. Легко видеть, что в силу (12), (13) операторы $\Omega(\lambda)$ (8) и $U(T, \lambda) + I_2$ подобны ($\lambda \neq 0$):

$$\Omega(\lambda) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \lambda I \end{pmatrix}^{-1} \{U(T, \lambda) + I_2\} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \lambda I \end{pmatrix}.$$

А так как спектр краевой задачи

$$\frac{dx}{dt} = J[H_0 + \lambda H_1(t)]\, x, \quad x(0) + x(T) = 0 \tag{16}$$

состоит из тех значений λ, при которых оператор $U(T, \lambda) + I_2$ не имеет ограниченного обратного во всем H^2, то спектры задач (6) и (16) совпадают.

Заметим теперь, что, как показано в [1, стр. 77], из равномерной положительности оператора

$$JV(\lambda) \gg 0, \tag{17}$$

где

$$V(\lambda) = -[U(T, \lambda) - I_2][U(T, \lambda) + I_2]^{-1},$$

вытекает сильная устойчивость оператора $U(T, \lambda)$ и, следовательно, сильная устойчивость решений уравнения (1) при тех же значениях λ.

Поэтому нам достаточно доказать справедливость (17) при $\lambda \in \Delta_0^+$ (5). С этой целью рассмотрим производную (ср. [1, стр. 77—78])

$$\frac{dV}{d\lambda} = -2[U(T, \lambda) + I_2]^{-1} \frac{\partial U(T, \lambda)}{\partial \lambda} [U(T, \lambda) + I_2]^{-1}.$$

Вычислим $\dot{U}(t, \lambda) = \dfrac{\partial U(t, \lambda)}{\partial \lambda}$.

Дифференцируя систему (15) по λ, получаем $\dot{U}(0, \lambda) = 0$,

$$\frac{d\dot{U}(t, \lambda)}{dt} = J[H_0 + \lambda H_1(t)]\, \dot{U}(t, \lambda) + JH_1(t)\, U(t, \lambda).$$

Отсюда находим, учитывая J-унитарность оператора $U(t, \lambda)$ ($UJU^* = J$), что

$$\dot{U}(t, \lambda) = U(t, \lambda) J \int_0^t U^*(s, \lambda) H_1(s) U(s, \lambda)\, ds.$$

Итак,

$$\frac{\partial U(T, \lambda)}{\partial \lambda} = U(T, \lambda) J R(\lambda),$$

где

$$R(\lambda) = \int_0^T U^*(s, \lambda) H_1(s) U(s, \lambda)\, ds.$$

Замечая, что

$$(U + I_2)^{-1} UJ = -J(JU^{-1}J - I_2)^{-1} = J[(U + I_2)^*]^{-1},$$

получаем

$$\frac{dV}{d\lambda} = -2J\,[(U(T,\lambda)+I_2)^*]^{-1}R(\lambda)\,[U(T,\lambda)+I_2]^{-1}.$$

Поскольку

$$JV(0) = \frac{T}{2}\begin{pmatrix} P_{\text{ср}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то

$$JV(\lambda) = \frac{T}{2}\begin{pmatrix} P_{\text{ср}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\,2\int\limits_0^{\lambda} [(U(T,\mu)+I_2)^*]^{-1}R(\mu)\,[U(T,\mu)+I_2]^{-1}\,d\mu. \qquad (18)$$

Легко видеть, что для любого вектора $f = u \oplus v \in H^2$

$$(H_1 f, f) = \| Q(t)\,u - v \|^2 \geqslant 0. \qquad (19)$$

Следовательно, оператор, стоящий под знаком интеграла в (18), неотрицателен.

С другой стороны, обозначив

$$H_2(t) = U^*(t, 0)\,H_1(t)\,U(t, 0),$$

получаем, что при малых μ

$$R(\mu) = \int\limits_0^T H_2(t)\,dt + O(\mu). \qquad (20)$$

Учитывая (19), (13) и то, что

$$U(t, 0) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -tP_{\text{ср}} & I \end{pmatrix},$$

имеем для любого вектора $f = u \oplus v \in H^2$

$$(H_2(t)\,f, f) = \| (Q(t) + tP_{\text{ср}})\,u - v \|^2 =$$

$$= \Big\| \Big(\int\limits_0^t P(s)\,ds \Big) u - v \Big\|^2 \geqslant 0. \qquad (21)$$

Докажем теперь, что оператор $H_{2\,\text{ср}} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T H_2(t)\,dt \gg 0$, т. е. равномерно положителен.

Допустим противное. Тогда существует последовательность нормированных векторов $w_k \in H^2$ ($w_k = u_k \oplus v_k$, $\|u_k\|^2 + \|v_k\|^2 = 1$) такая, что при $k \to \infty$

$$\int\limits_0^T (H_2(t)\,w_k,\ w_k)\,dt \to 0.$$

Отсюда следует (ср. [2]) с учетом (21), что при всех $t \in [0, T]$ и $k \to \infty$

$$\int\limits_0^t P(s)\,u_k\,ds \to 0, \quad \| u_k \| \to 1. \qquad (22)$$

Это непосредственно противоречит условию (10), а потому в случае 2° имеем $H_{2\text{ср.}} \gg 0$.

Рассмотрим вариант 1°. В силу B-интегрируемости $P(t)$ при почти всех t

$$P(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t P(s)\, ds,$$

где производная в правой части равенства понимается в сильном смысле. Вместе с (22) это означает (см. [2]), что при $k \to \infty$ почти всюду по t $\| P(t) u_k \| \to 0$ и, следовательно, так как $\| P(t) \| \in L_1(0, T)$,

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^T \| P(t) u_k \|\, dt = 0, \quad \| u_k \| \to 1,$$

что противоречит условию (9). Равномерная позитивность $H_{2\text{ср}} \gg 0$ в случае 1° тоже доказана.

Итак, в силу (20) оператор $R(\mu)$, а с ним и вся подынтегральная функция в (18) при достаточно малых μ равномерно позитивны. Следовательно, так как $P_{\text{ср}} \geqslant 0$ (или даже $P_{\text{ср}} \gg 0$) и так как при $\lambda \in \Delta_0^+(5)$ подынтегральная оператор-функция в (18) неотрицательна, имеем $JV(\lambda) \gg 0$, т. е. (17), а с ним и достаточность условий теоремы доказаны.

Следующие примеры показывают, что условия варианта 1° не могут быть заменены более слабыми, как это указано в теореме 1.

Пример 1. Пусть в некотором ортонормированном базисе

$$P(t) = p(t) \operatorname{diag}[m_1, m_2, \ldots], \tag{23}$$

где $m_k \downarrow 0$, $p_{\text{ср}} \geqslant 0$, и выполнено (2). Легко видеть, что в этом случае $P(t)$ B-интегрируема и удовлетворяет всем условиям варианта 1° теоремы 1, за исключением условия (9). С другой стороны, в силу установленного нами признака неустойчивости [2, теорема 2], уравнение (1) с коэффициентом (23) устойчивым не является.

Пример 2. Пусть

$$P(t) = \operatorname{diag}[\sin kt + \varepsilon_k]_{k=1}^{\infty}, \quad \varepsilon_k \downarrow 0. \tag{24}$$

Уравнение (1) с коэффициентом (24) неустойчиво в силу названного признака из [2, теорема 2]. С другой стороны, $P(t)$ (24) удовлетворяет всем условиям варианта 1°, кроме условия B-интегрируемости.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн. Введение в геометрию J-пространств и теорию операторов в этих пространствах. Вторая летняя математическая школа АН УССР, I (Кацивели, июнь—июль 1964), Киев, 1965, 15—92.
2. Ф. С. Рофе-Бекетов и В. И. Храбустовский. Об устойчивости решений уравнения Хилла с операторным коэффициентом. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 13. Изд-во Харьковск. ун-та, 1971, 140—147.
3. М. Г. Крейн. О признаках устойчивой ограниченности решений периодических канонических систем. ПММ, 19, № 6, 1955, 641—680.
4. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. «Наука», М., 1967.

Поступила 28 апреля 1970 г.