О ДЕФЕКТАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА

А. А. Гольдберг

Известно, что целые функции порядка $\rho \leqslant 1/2$ не могут иметь конечных дефектных значений [1, стр. 176, теорема 4.13]; при $\rho < 1/2$ это вытекает из классической теоремы Вимана, при $\rho = 1/2$ — из одного результата Эдрея и Фукса. С другой стороны, как показал Н. У. Аракелян [2], при $\rho > 1/2$ множество дефектных значений целой функции порядка ρ может содержать любое наперед заданное счетное множество. Тем самым была опровергнута гипотеза Р. Неванлинны о том, что целая функция порядка ρ может иметь не более $[2\rho]$ конечных дефектных значений ($[x]$ означает целую часть числа x). Однако для многих важных классов целых функций гипотеза Р. Неванлинны все же справедлива. Как показал недавно Ум Ки-чжул [3], к таким классам относится класс целых функций вполне регулярного роста (в. р. р.) относительно $V(r) = r^{\rho(r)}$, $\rho(r)$ — некоторый уточненный порядок, $\rho(r) \to \rho$, $0 < \rho < \infty$. Этот класс, введенный Б. Я. Левиным и А. Пфлюгером [4], играет важную роль в теории целых функций. Чтобы сформулировать результат Ум Ки-чжула, обозначим через $[x]^*$ наибольшее среди целых чисел, меньших x (таким образом, $[x]^*$ отличается от $[x]$ тем, что в целочисленных точках функция $[x]^*$ непрерывна слева, а не справа). Ум Ки-чжул [3] доказал, что целая функция в. р. р. порядка ρ, $1/2 < \rho < \infty$, имеет не более $[2\rho]^*$ конечных дефектных значений. Ум Ки-чжул предполагал, что его оценка не является точной. Здесь мы покажем, что на самом деле полученная им оценка не может быть улучшена. Более того, справедлива

Теорема 1. *Пусть заданы число ρ, $0 < \rho < \infty$, уточненный порядок $\rho(r) \to \rho$ при $r \to \infty$ и различные комплексные числа $a_1, \ldots, a_q$, $0 \leqslant q < 2\rho$ (при $q = 0$ множество $\{a_j\}$ пусто). Существует целая функция в. р. р. относительно $V(r) = r^{\rho(r)}$, имеющая конечные дефектные значения в точках $a_1, \ldots, a_q$ и только в них. В случае $\rho = 1$ дополнительно предполагаем, что $\rho(r)$ — сильный уточненный порядок в смысле Б. Я. Левина* [4, стр. 60].

Нам неизвестно, можно ли в случае $\rho = 1$ отказаться от предположения, что $\rho(r)$ — сильный уточненный порядок, а не просто — уточненный порядок.

Приведем также две теоремы, дающие оценку дефекта $\delta(0, f)$ для целых функций в. р. р. порядка ρ.

Теорема 2. *Пусть $f(z)$ — целая функция в. р. р. нецелого порядка ρ. Тогда*

$$\delta(0, f) \leqslant \begin{cases} \dfrac{[\rho]}{[\rho] + |\sin \pi\rho|}, & 0 < \rho - [\rho] \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{[\rho] + 1 - |\sin \pi\rho|}{[\rho] + 1}, & \dfrac{1}{2} \leqslant \rho - [\rho] < 1. \end{cases} \tag{1}$$

Чтобы для некоторой целой функции $f(z)$ в. р. р. порядка ρ в (1) имело место равенство, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой луч $\{\arg z = \psi_0\}$, что для любого $\eta > 0$ число нулей $f(z)$ в $\{|z| \leqslant r, \eta \leqslant |\arg z - \psi_0| \leqslant \pi\}$ является величиной порядка $o(V(r))$.

Вероятно, оценка (1) справедлива для всех целых функций порядка ρ, однако в общем случае Эдреем и Фуксом [5] доказана лишь менее точная оценка

$$\delta(0, f) \leqslant \frac{4{,}4\rho - |\sin \pi\rho|}{4{,}4\rho + |\sin \pi\rho|}.$$

Теорема 3. *Пусть $f(z)$ — целая функция в. р. р. порядка ρ, $1/2 < \rho < \infty$, $h(\theta, f)$ — ее индикатор. Пусть $h(\theta, f) < 0$ при $\theta \in \bigcup_{k=1}^{n} (\theta_k, \theta_k')$ и $h(\theta, f) \geqslant 0$*

при $\theta \in \bigcup_{k=1}^{n} [\theta'_k, \quad \theta_{k+1}]$, $\quad \theta_1 < \theta'_1 < \theta_2 < \theta'_2 < \cdots < \theta_n < \theta'_n < \theta_{n+1} = \theta_1 + 2\pi$.

Обозначим $l = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \{\theta'_k - \theta_k\}$, $L = \min \left\{\frac{2\pi}{\rho}, \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (\theta_{k+1} - \theta'_k)\right\}$. *Тогда*

$$\delta(0, f) \leqslant \frac{\sin^2 \frac{\rho l}{4}}{\sin^2 \frac{\rho L}{4}}. \tag{2}$$

При $1/2 < \rho \leqslant 1$ *оценка* (2) *точная. При* $1 < \rho < \infty$ *оценка* (2), *вообще говоря, не точная.*

Замечание. Отметим, что в силу известных свойств индикаторов [4, стр. 78, свойство е)] всегда выполняется $0 \leqslant l \leqslant \pi/\rho$, $\pi/\rho \leqslant L \leqslant 2\pi/\rho$. Поэтому из (2) следует

$$\delta(0, f) \leqslant 2 \sin^2 \frac{\rho l}{4} \leqslant 1. \tag{3}$$

При этом, как будет показано в конце статьи, при фиксированных ρ, $1 < \rho < \infty$, и l, $0 < l \leqslant \pi/\rho$, можно указать целую функцию $f(z)$ в. р. р., для которой $\delta(0, f) \geqslant \sin^2 \frac{\rho l}{4}$, ρ — порядок $f(z)$, l имеет тот же смысл, что и в теореме 3.

Прежде чем переходить к доказательству теорем, отметим следующие соотношения (см. [3]; их легко также получить из формулы (3.34) на стр. 202 в [4]), которыми мы будем постоянно пользоваться.

Пусть $f(z)$ — целая функция в. р. р., $h(\varphi, f)$ — ее индикатор относительно $V(r)$. Тогда при $r \to \infty$

$$T(r, f) = V(r) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^+(\varphi, f)\, d\varphi + o(V(r)), \tag{4}$$

$$N(r, 0, f) = V(r) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi, f)\, d\varphi + o(V(r)), \tag{5}$$

$$m(r, 0, f) = V(r) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^-(\varphi, f)\, d\varphi + o(V(r)), \tag{6}$$

$$\delta(0, f) = \int_0^{2\pi} h^-(\varphi, f)\, d\varphi \Bigg/ \int_0^{2\pi} h^+(\varphi, f)\, d\varphi, \tag{7}$$

где $x^+ = \frac{1}{2}(|x| + x)$, $x^- = \frac{1}{2}(|x| - x)$.

В дальнейшем, говоря о дефектных значениях целых функций, всегда будем иметь в виду конечные дефектные значения.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Будем считать, что $V(r)$ — строго возрастающая функция при $r \geqslant 1$, $V(1) = 1$, это не уменьшает общности. Легко убедиться, что функция $\rho_1(r)$, определяемая равенством

$$r^{\rho_1(r)} = V_1(r) = V(r^\mu), \quad 0 < \mu < \infty, \quad 1 \leqslant r < \infty, \tag{8}$$

является уточненным порядком, $\rho_1(r) \to \mu\rho$ при $r \to \infty$.

Рассмотрим целую функцию

$$g_\lambda(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{z_n}\right), \quad 1 \leqslant z_1 < z_2 < \cdots \tag{9}$$

с отрицательными нулями такими, что $n(r, 0, g_\lambda) = V_1(r) + o(V_1(r))$, $V_1(r) = r^{\rho_1(r)}$, $\rho_1(r) \to \lambda$, $0 < \lambda < 1$. Известно [4, стр. 88], что $g_\lambda(z)$ — целая функция порядка λ и

$$\ln|g_\lambda(re^{i\varphi})| = \frac{\pi}{\sin \pi\lambda} V_1(r)\cos\lambda\varphi + o(V_1(r)), \tag{10}$$

$$\arg g_\lambda(re^{i\varphi}) = \frac{\pi}{\sin \pi\lambda} V_1(r)\sin\lambda\varphi + o(V_1(r)) \tag{11}$$

равномерно по φ, $|\varphi| \leqslant \pi - \eta$, $\eta > 0$, а если в (10) знак равенства заменить на $\leqslant$, то (10) будет выполняться равномерно при $|\varphi| \leqslant \pi$.

Укажем сначала целые функции в. р. р., не имеющие дефектных значений (случай $q = 0$). Если $\rho \leqslant 1/2$, то, как мы отмечали, любая целая функция не имеет дефектных значений. Если $1/2 < \rho < \infty$, то выберем такое натуральное число n, что $\rho/n < 1/2$, и возьмем функцию $g_\lambda(z)$ (9) с $\lambda = \rho/n$, $\rho_1(r)$ определяется из (8) с $\mu = 1/n$. Тогда, как легко убедиться, $f(z) = g_\lambda(z^n)$ будет искомой функцией.

Теперь будем считать, что $q \geqslant 1$. Если $1/2 < \rho \leqslant 1$, то необходимо $q = 1$. При $1/2 < \rho < 1$ возьмем $f(z) = g_\rho(z) + a_1$ с $V_1(r) = V(r)$. Из (10) следует, что $f(z)$ является целой функцией в. р. р. относительно $V(r)$ и имеет единственное дефектное значение a_1 с

$$\delta(a_1, f) = 1 - \sin\pi\rho. \tag{12}$$

При $\rho = 1$ построим целую функцию $g(z)$ в. р. р. относительно сильного уточненного порядка $\rho(r)$ с индикатором $h(\varphi, g) = \cos\varphi$. Такая целая функция существует в силу теоремы Б. Я. Левина [4, стр. 124]; при $\rho(r) \equiv 1$ можно взять $g(z) = e^z$. Искомой функцией является $f(z) = g(z) + a_1$ с $\delta(a_1, f) = 1$.

В дальнейшем будем считать, что $\rho > 1$. Пусть $s = [2\rho]^*$, $\lambda = \rho/s$, $1/2 < \lambda < 1$. Возьмем s комплексных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ таких, чтобы множество их значений совпадало с множеством $\{a_1, \ldots, a_q\}$, $1 \leqslant q \leqslant s$. Обозначим через μ_k число точек из $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$, равных a_k, $1 \leqslant k \leqslant q$, $\mu_k \geqslant 1$, $\sum\limits_{k=1}^{q} \mu_k = s$. Функция $g_\lambda(z)$ определяется по (9), где $V_1(r)$ определяется из (8) с $\mu = 1/s$.

Пусть функция $w = g_\lambda(z)$ отображает конечную z-плоскость на риманову поверхность F. Структура этой римановой поверхности хорошо изучена [6—8]. Пусть ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, — нули $g'_\lambda(z)$, $-z_1 > \xi_1 > -z_2 > \xi_2 > -z_3 > \cdots$; $b_n = g_\lambda(\xi_n)$; $b_n = (-1)^n|b_n|$, $b_n \to 0$. Обозначим через S_0 экземпляр w-плоскости с разрезом по интервалу $(-\infty, b_1]$ действительной оси, через S_k $(k \geqslant 1)$ — экземпляр w-плоскости, разрезанный по действительной оси кроме интервала между b_k и b_{k+1}. Соединим S_0 с S_1 по разрезу $(-\infty, b_1]$ так, чтобы образовалась алгебраическая точка ветвления первого порядка над b_1; S_k соединяется с S_{k+1} по разрезу $[b_{k+1}, \infty)$, если k — нечетное число, и по разрезу $(-\infty, b_{k+1}]$, если k — четное число $(k \geqslant 1)$, так, что образуется алгебраическая точка ветвления первого порядка над b_{k+1}. Полученная в результате риманова поверхность и есть риманова поверхность F.

Легко видеть, что риманову поверхность Φ, на которую отображает конечную z-плоскость функция $w = g_\lambda(z^s)$, можно получить следующим образом. Возьмем s экземпляров поверхности F, на каждом из них по листу S_0 проведем разрез вдоль $[1, \infty)$ и соединим эти s экземпляров поверхности F с разрезом по $[1, \infty)$ (будем обозначать ее через $\tilde{F}$) так, чтобы образовалась алгебраическая точка ветвления порядка $s - 1$ над точкой $w = 1$. В результате получим искомую поверхность Φ.

Будем обозначать через $F(a)$ (через $\tilde{F}(a)$) риманову поверхность, которая получается из поверхности F (из поверхности $\tilde{F}$) преобразованием сдвига $w' = w + a$. Таким образом, функция $w = g_\lambda(z) + a$ отображает $\{|z| < \infty\}$ на $F(a)$, а $\{0 < \arg z < 2\pi\}$ — на $\tilde{F}(a)$. Аналогично определяется $S_0(a)$. Через $\tilde{S}_0(a)$ будем обозначать лист $S_0(a)$ с разрезом по $\{\operatorname{Im} w = \operatorname{Im} a,\ 1 + \operatorname{Re} a \leqslant \operatorname{Re} w < \infty\}$. Лист $\tilde{S}_0(a)$ представляется конечной w-плоскостью с разрезами по $\{\operatorname{Im} w = \operatorname{Im} a,\ 1 + \operatorname{Re} a \leqslant \operatorname{Re} w < \infty\}$ и по $\{\operatorname{Im} w = \operatorname{Im} a,\ -\infty < \operatorname{Re} w \leqslant b_1 + \operatorname{Re} a\}$.

Пусть $\sigma = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant q} \operatorname{Re} a_j$. Возьмем римановы поверхности $F(\alpha_j)$, $1 \leqslant j \leqslant s$, и в каждой из них на листе $S_0(\alpha_j)$ проведем разрез по интервалу действительной оси $[\sigma + 1, \infty)$. Риманову поверхность $F(\alpha_j)$ и лист $S_0(\alpha_j)$ с таким разрезом будем обозначать соответственно через $\hat{F}(\alpha_j)$ и $\hat{S}_0(\alpha_j)$. Соединяя поверхности $\hat{F}(\alpha_j)$, $j = 1, \ldots, s$, так, чтобы образовалась алгебраическая точка ветвления порядка $s - 1$ над $w = \sigma + 1$, получим риманову поверхность $\hat{\Phi}$.

Построим специальное квазиконформное отображение римановой поверхности $\hat{\Phi}$ на риманову поверхность Φ. Для этого отобразим сначала $\hat{F}(\alpha_j)$ на $\tilde{F}(\alpha_j)$ следующим образом. Часть листа $\hat{S}_0(\alpha_j)$, лежащую над $\{\operatorname{Re} w > \sigma + 1/2\}$, отобразим на часть листа $\tilde{S}_0(\alpha_j)$, лежащую над $\{\operatorname{Re} w > \operatorname{Re} \alpha_j + 1/2\}$, с помощью сдвига $w' = w - \sigma + \alpha_j$. Часть листа $\hat{S}_0(\alpha_j)$, лежащую над $\{\operatorname{Re} w < \operatorname{Re} \alpha_j\}$, отобразим на часть листа $\tilde{S}_0(\alpha_j)$, лежащую над $\{\operatorname{Re} w < \operatorname{Re} \alpha_j\}$, тождественно. Часть листа $\hat{S}_0(\alpha_j)$, лежащую над полосой $\{\operatorname{Re} \alpha_j \leqslant \operatorname{Re} w \leqslant \sigma + 1/2\}$, отобразим на часть листа $\tilde{S}_0(\alpha_j)$, лежащую над полосой $\{\operatorname{Re} \alpha_j \leqslant \operatorname{Re} w \leqslant \operatorname{Re} \alpha_j + 1/2\}$, с помощью аффинного отображения $w' = \psi_j(w)$ такого, что $\psi_j(w) \equiv w$ при $\operatorname{Re} w = \operatorname{Re} \alpha_j$, $\psi_j(w) \equiv w - \sigma + \alpha_j$ при $\operatorname{Re} w = \sigma + 1/2$. Риманову поверхность $\hat{F}(\alpha_j) \setminus \hat{S}_0(\alpha_j)$ отображаем на $\tilde{F}(\alpha_j) \setminus \tilde{S}_0(\alpha_j)$ тождественно. Мы получаем квазиконформное отображение $\hat{F}(\alpha_j)$ на $\tilde{F}(\alpha_j)$, которое будем обозначать через

$$P' = \Psi_j(P), \quad P \in \hat{F}(\alpha_j), \quad P' \in \tilde{F}(\alpha_j).$$

Очевидно, что это отображение может не быть конформным лишь при $P \in \hat{S}_0(\alpha_j)$, $P' \in \tilde{S}_0(\alpha_j)$ (это утверждение можно, разумеется, уточнить, указав полосу на $\hat{S}_0(\alpha_j)$, где отображение может не быть конформным, но нам это не потребуется). Мы теперь определим квазиконформное отображение $P' = \Psi(P)$ римановой поверхности $\hat{\Phi}$ на риманову поверхность Φ, положив $\Psi(P) = \Psi_j(P) - \alpha_j$, если $P \in \hat{F}(\alpha_j)$, $1 \leqslant j \leqslant s$. Ясно, что характеристика этого квазиконформного отображения ограниченная, поэтому $\hat{\Phi}$ — поверхность параболического типа. Так как $\hat{\Phi}$ не накрывает точку $w = \infty$, то существует целая функция $w = \omega(\zeta)$, отображающая $\{|\zeta| < \infty\}$ на $\hat{\Phi}$. Эта целая функция определяется с точностью до целого линейного отображения конечной ζ-плоскости.

С другой стороны, мы можем квазиконформно отобразить конечную z-плоскость на $\hat{\Phi}$ с помощью функции $P = \Psi^{-1}(g_\lambda(z^s))$.

Таким образом, функция

$$\zeta = \zeta(z) = \omega^{-1}\{\Psi^{-1}(g_\lambda(z^s))\} \tag{13}$$

осуществляет квазиконформное отображение конечной z-плоскости на конечную ζ-плоскость. Это отображение может не быть конформным лишь в тех областях z-плоскости, которые являются прообразами листов $\tilde{S}_0$ при отображении $w = g_\lambda(z^s)$. Из (10) и (11) следует, что при $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{s} - \eta$, $z \to \infty$

$$\ln|g_\lambda(z^s)| = \frac{\pi}{\sin \pi\lambda} V(|z|)\cos(\rho \arg z) + o(V(|z|)), \tag{14}$$

$$\arg g_\lambda(z^s) = \frac{\pi}{\sin \pi\lambda} V(|z|)\sin(\rho \arg z) + o(V(|z|)). \tag{15}$$

Учитывая, что функция $g_\lambda(z^s)$ автоморфна относительно преобразования $z \to ze^{i2\pi/s}$, легко получаем, что существуют такие положительные постоянные R_0 и K, что прообразы листов $\tilde{S}_0$ содержатся в области

$$D = \{|z| < R_0\} \cup \left(\bigcup_{j=0}^{s-1} \left\{\left|\arg z - \frac{2\pi}{s} j\right| < \frac{K}{|z|^\rho}\right\}\right).$$

Пусть $p(z)$ — характеристика квазиконформного отображения $\zeta = \zeta(z)$. Тогда $p(z) \equiv 1$ при $z \overline{\in} D$ и $p(z) \leqslant M$ при $z \in D$. Легко видеть, что ($z = x + iy$)

$$\iint\limits_{\{|z| > R_0\}} (p(z) - 1)\frac{dx\,dy}{|z|^2} \leqslant M \iint\limits_{\{|z| > R_0\} \cap D} \frac{dx\,dy}{|z|^2} = 2KMs\int\limits_{R_0}^{\infty} \frac{dr}{r^{1+\rho}} < \infty.$$

Поэтому в силу теоремы О. Тейхмюллера — П. П. Белинского [9] существует предел

$$\lim_{z \to \infty} \frac{\zeta(z)}{z} \neq 0, \ \infty.$$

Легко видеть, что целую функцию $w = \omega(\zeta)$ можно нормировать так, чтобы этот предел был равен 1, тогда

$$\zeta(z) = (1 + o(1))z, \quad z(\zeta) = (1 + o(1))\zeta \quad \text{при } z \to \infty. \tag{16}$$

Пусть $z \to \infty$, $z \overline{\in} D$, $\frac{2\pi}{s} j < \arg z < \frac{2\pi}{s}(j+1)$, $j = 0, 1, \ldots, s-1$. Из (13) и (16) следует, что

$$\omega(\zeta) = \Psi^{-1}(g_\lambda(\zeta^s(1 + o(1)))) = g_\lambda(\zeta^s(1 + o(1))) + a_j.$$

Учитывая (14), отсюда находим, что при $\left|\theta - \frac{2\pi}{s} j\right| \leqslant \frac{\pi}{2\rho} - \eta$, $\eta > 0$, $r \to \infty$, $0 \leqslant j \leqslant s-1$, справедливо

$$\ln|\omega(re^{i\theta})| \sim (\pi \operatorname{cosec} \pi\lambda) V(r) \cos\rho\left(\theta - \frac{2\pi}{s} j\right),$$

при $0 < \eta \leqslant \theta - \frac{\pi}{s}(2j+1) \leqslant \frac{\pi}{s} - \frac{\pi}{2\rho} - \eta$ справедливо

$$\ln|\omega(re^{i\theta}) - a_j| \sim (\pi \operatorname{cosec} \pi\lambda) V(r)\cos\rho\left(\frac{2\pi}{s}(j+1) - \theta\right),$$

при $0 < \eta \leqslant \frac{\pi}{s}(2j+1) - \theta \leqslant \frac{\pi}{s} - \frac{\pi}{2\rho} - \eta$ справедливо

$$\ln|\omega(re^{i\theta}) - a_j| \sim (\pi \operatorname{cosec} \pi\lambda) V(r)\cos\rho\left(\theta - \frac{2\pi}{s} j\right).$$

Известно [4, стр. 186], что множество лучей в. р. р. для целой функции замкнуто. Поэтому из полученных соотношений следует, что целая функция $\omega(\zeta)$, так же как и целые функции $\omega(\zeta) - a$ при любом постоянном a, является целой функцией в. р. р. относительно $V(r)$. Несложный подсчет с учетом (4), (6) и (7) дает

$$T(r,\ \omega) = (1 + o(1))\frac{s}{\rho}\operatorname{cosec}\pi\lambda\, V(r),$$

$$m(r,\ a_k,\ \omega) = (1 + o(1))\frac{\mu_k}{\rho}\operatorname{cosec}\pi\lambda\left(1 - \sin\frac{\rho\pi}{s}\right)V(r),\quad 1 \leqslant k \leqslant q,$$

$$m(r,\ a,\ \omega) = o(r^\rho),\quad a \neq a_k,\quad 1 \leqslant k \leqslant q.$$

Следовательно,

$$\delta(a_k,\ \omega) = \frac{\mu_k}{s}\left(1 - \sin\frac{\rho\pi}{s}\right),\ 1 \leqslant k \leqslant q, \tag{17}$$

$$\delta(a,\ \omega) = 0,\quad a \neq a_k,\quad 1 \leqslant k \leqslant q. \tag{18}$$

Построенная целая функция $w = \omega(\zeta)$ является искомой.

В случае, когда $\rho(r) \equiv \rho$, можно дать чисто аналитическое доказательство теоремы 1, не использующее римановых поверхностей и квазиконформных отображений. Это доказательство было сообщено мне Б. Я. Левиным и И. В. Островским и публикуется здесь с их согласия.

Второе доказательство теоремы 1 (случай $\rho(r) \equiv \rho$). Мы будем теперь считать в (9) $z_n = n^{1/\lambda}$, $V(r) = r^\rho$, $V_1(r) = r^\lambda$. В случае, когда $q = 0$ или $\rho \leqslant 1$, сохраняются прежние рассуждения, в которых римановы поверхности не фигурировали. Будем теперь считать, что $q \geqslant 1$ и $\rho > 1$. Числа s, $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, $\mu_1, \ldots, \mu_s$ имеют тот же смысл, что и раньше, $\lambda = \rho/s$.

Теперь для функции $g_\lambda(z)$ из (9) с $z_n = n^{1/\lambda}$ мы можем записать более точную асимптотическую формулу, чем (10) и (11), а именно [10, стр. 139—141]:

$$g_\lambda(z) = \frac{\exp\{z^\lambda\pi\operatorname{cosec}\pi\lambda\}}{\sqrt{(2\pi)^{1/\lambda}z}}\left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right),\quad z \to \infty, \tag{18'}$$

равномерно относительно $\arg z$ при $|\arg z| \leqslant \pi - \eta$, $\eta > 0$. Тогда ($A = 2\pi\operatorname{cosec}\pi\lambda$, $B = (2\pi)^{1/\lambda}$)

$$G(z) = \{g_\lambda(z^s)\}^2 = \frac{\exp\{Az^\rho\}}{Bz^s}\left(1 + O\left(\frac{1}{z^s}\right)\right),\quad z \to \infty, \tag{19}$$

при $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{s} - \eta$, $\eta > 0$. Кроме того,

$$G\left(ze^{i\frac{2\pi}{s}k}\right) = G(z),\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ s - 1.$$

Рассмотрим целую функцию ($\nu = 0,\ 1,\ 2, \ldots$)

$$F_\nu(z) = \int_0^z G(\zeta)\zeta^\nu d\zeta.$$

Легко видеть, что $F_\nu(z)$ — целая функция нормального типа порядка ρ и

$$F_\nu\left(ze^{i\frac{2\pi}{s}k}\right) = F_\nu(z)e^{i\frac{2\pi}{s}k(\nu+1)},\quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ s - 1. \tag{20}$$

Поэтому достаточно изучить асимптотическое поведение $F_\nu(z)$ в углу $\{|\arg z| \leqslant \pi/s\}$. Пусть $|\varphi| \leqslant \pi/(2\rho)$. Тогда в силу (19)

$$F_\nu(re^{i\varphi}) = O(1) + \frac{1}{B}\int_{e^{i\varphi}}^{re^{i\varphi}} e^{A\zeta^\rho}\zeta^{\nu-s}d\zeta + \int_{e^{i\varphi}}^{re^{i\varphi}} e^{A\zeta^\rho}O(\zeta^{\nu-2s})\,d\zeta = O(r^{\nu+1-2s}e^{Ar^\rho\cos\rho\varphi}) +$$

$$+ \frac{1}{B}\int_{e^{i\varphi}}^{re^{i\varphi}} e^{A\zeta^\rho}\zeta^{\nu-s}d\zeta. \tag{21}$$

Дважды интегрируя по частям, получаем ($z = re^{i\varphi}$):

$$\int\limits_{e^{i\varphi}}^{re^{i\varphi}} e^{A\zeta^\rho}\zeta^{\nu-s}d\zeta = O(1) + \frac{1}{A\rho}e^{Az^\rho}z^{\nu+1-s-\rho} - \frac{\nu+1-s-\rho}{(A\rho)^2}e^{Az^\rho}z^{\nu+1-s-2\rho} +$$

$$+\frac{(\nu+1-s-\rho)(\nu+1-s-2\rho)}{(A\rho)^2}\int\limits_{e^{i\varphi}}^{re^{i\varphi}} e^{A\zeta^\rho}\zeta^{\nu-s-2\rho}d\zeta =$$

$$= O(1) + \frac{1}{A\rho}e^{Az^\rho}z^{\nu+1-s-\rho}\left(1 + O\left(\frac{1}{z^\rho}\right)\right). \tag{22}$$

Из (21) и (22) следует, что при $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2\rho} - \eta$ равномерно выполняется

$$F_\nu(z) = \frac{1}{A\rho}e^{Az^\rho}z^{\nu+1-s-\rho}(1 + o(1)). \tag{23}$$

Обозначим

$$\gamma_\nu = \int\limits_0^\infty \{g_\lambda(-x^s)\}^2 x^\nu\, dx. \tag{24}$$

Учитывая (18′), легко убеждаемся, что интеграл в (24) сходится, а также что $0 < \gamma_\nu < \infty$. Очевидно,

$$\lim_{r\to\infty} F_\nu\left(re^{i\frac{\pi}{s}}\right) = \int\limits_0^\infty G\left(re^{i\frac{\pi}{s}}\right)r^\nu e^{i\frac{\pi}{s}(\nu+1)}dr = \gamma_\nu e^{i\frac{\pi}{s}(\nu+1)}$$

Кроме того, в силу (19)

$$\int\limits_{C_r} G(\zeta)\,\zeta^\nu d\zeta \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

где интеграл берется по дуге $C_r = \left\{|z| = r,\ \frac{\pi}{2\rho} + \eta \leqslant \arg r \leqslant \frac{\pi}{s}\right\}$, $\eta > 0$. Поэтому, используя теорему Коши, получаем

$$\lim_{r\to\infty} F_\nu(re^{i\varphi}) = \int\limits_0^\infty G(re^{i\varphi})\,r^\nu e^{i\varphi(\nu+1)}dr = \gamma_\nu e^{i\frac{\pi}{s}(\nu+1)} \tag{25}$$

при $\frac{\pi}{2\rho} < \varphi \leqslant \frac{\pi}{s}$. Из (25) следует, что при $\frac{\pi}{2\rho} + \eta \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{s}$

$$F_\nu(re^{i\varphi}) - \gamma_\nu e^{i\frac{\pi}{s}(\nu+1)} = -\int\limits_{re^{i\varphi}}^{\infty e^{i\varphi}} G(\zeta)\,\zeta^\nu d\zeta. \tag{26}$$

При $\frac{\pi}{2\rho} + \eta \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{s} - \eta$ асимптотику функции, стоящей в правой части (26), получаем, как выше, используя (19) и дважды интегрируя по частям. Тогда получим в углу $\left\{\frac{\pi}{2\rho} + \eta \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{s} - \eta\right\}$

$$F_\nu(z) - \gamma_\nu e^{i\frac{\pi}{s}(\nu+1)} = \frac{1}{A\rho}e^{Az^\rho}z^{\nu+1-s-\rho}(1 + o(1)). \tag{27}$$

Учитывая, что $F_\nu(\bar z) = \overline{F_\nu(z)}$, находим, что при $-\frac{\pi}{s} + \eta \leqslant \arg z \leqslant -\frac{\pi}{2\rho} - \eta$ выполняется

$$F_\nu(z) - \gamma_\nu e^{-i\frac{\pi}{s}(\nu+1)} = \frac{1}{A\rho}e^{Az^\rho}z^{\nu+1-s-\rho}(1 + o(1)). \tag{28}$$

Используя (20), можно записать формулы типа (23), (27), (28) для всей конечной z-плоскости, кроме углов $\left\{\left|\arg z-\Theta-\frac{2\pi}{s}(k-1)\right|<\eta\right\}$, $\Theta=\frac{\pi}{s}$, $\pm\frac{\pi}{2\rho}$, $k=1, \ldots, s$. Мы не будем их выписывать, отметим лишь, что функция $F_\nu(z)$ при $z\to\infty$ равномерно стремится к ∞ в

$$\bigcup_{k=0}^{s-1}\left\{\left|\arg z-\frac{2\pi}{s}k\right|\leqslant\frac{\pi}{2\rho}-\eta\right\}$$

и равномерно стремится к $\gamma_\nu\exp\left\{i\frac{\pi}{s}(\nu+1)(2k-1)\right\}$ в углу

$$\left\{\left|\arg z-\frac{\pi}{s}(2k-1)\right|\leqslant\frac{\pi}{s}-\frac{\pi}{2\rho}-\eta\right\},\quad k=1, \ldots, s.$$

Определим числа c_ν, $\nu=0, 1, \ldots, s-1$, из системы линейных уравнений

$$\sum_{\nu=0}^{s-1}c_\nu\gamma_\nu\exp\left\{i\frac{\pi}{s}(\nu+1)(2k-1)\right\}=\alpha_k,\quad k=1, \ldots, s. \tag{29}$$

Эта система имеет единственное решение, так как ее детерминант равен ($\omega=e^{2\pi i/s}$):

$$\prod_{\nu=0}^{s-1}\left(\gamma_\nu e^{i\frac{\pi}{s}(\nu+1)}\right)\begin{vmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\\ \omega & \omega^2 & \ldots & \omega^s\\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \omega^{s-1} & \omega^{2(s-1)} & \ldots & \omega^{(s-1)s}\end{vmatrix}=$$

$$=e^{i\frac{\pi}{2}(s+1)}\prod_{\nu=0}^{s-1}\gamma_\nu\prod_{1\leqslant k<l\leqslant s}(\omega^l-\omega^k)\neq 0.$$

Не уменьшая общности, можно считать, что все $a_1, \ldots, a_q$ отличны от нуля, а следовательно, и все $\alpha_1, \ldots, \alpha_s\neq 0$. Поэтому по крайней мере одно $c_\nu\neq 0$. Искомой функцией является

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{s-1}c_\nu F_\nu(z).$$

Очевидно, функция $f(z)$ имеет рост не выше нормального типа порядка ρ. В углу $\left\{|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2\rho}-\eta\right\}$, $\eta>0$, учитывая (23), имеем при $z\to\infty$

$$f(z)=(1+o(1))\frac{1}{A\rho}e^{Az^\rho}z^{1-s-\rho}\sum_{\nu=0}^{s-1}c_\nu z^\nu,$$

поэтому равномерно выполняется

$$\ln|f(re^{i\varphi})|=(1+o(1))Ar^\rho\cos\rho\varphi,\quad r\to\infty.$$

Аналогично при $\left|\varphi-\frac{2\pi}{s}k\right|\leqslant\frac{\pi}{2\rho}-\eta$, $k=0, \ldots, s-1$, выполняется

$$\ln|f(re^{i\varphi})|=(1+o(1))Ar^\rho\cos\rho\left(\varphi-\frac{2\pi}{s}k\right),\quad r\to\infty. \tag{30}$$

При $\frac{\pi}{2\rho}+\eta\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{s}-\eta$, используя (27), имеем

$$f(z)-\alpha_1=\sum_{\nu=0}^{s-1}c_\nu\left\{F_\nu(z)-\gamma_\nu e^{i\frac{\pi}{s}(\nu+1)}\right\}=$$

$$=\frac{1}{A\rho}e^{Az^\rho}z^{1-s-\rho}\sum_{\nu=0}^{s-1}c_\nu z^\nu,$$

откуда $\left(\frac{\pi}{2\rho}+\eta\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{s}-\eta\right)$

$$\ln|f(re^{i\varphi})-\alpha_1|=(1+o(1))\,Ar^{\rho}\cos\rho\varphi,\quad r\to\infty.$$

Аналогично получаем, что при $0<\eta\leqslant\left|\varphi-\frac{\pi}{s}(2k-1)\right|\leqslant\frac{\pi}{s}-\frac{\pi}{2\rho}-\eta$, $k=1,\ \ldots,\ s$, выполняется

$$\ln|f(re^{i\varphi})-a_k|=(1+o(1))\,Ar^{\rho}\cos\rho\left(\frac{\pi}{s}-\left|\varphi-\frac{\pi}{s}(2k-1)\right|\right),\quad r\to\infty. \tag{31}$$

Как раньше для функции $\omega(\zeta)$, из (30) и (31) заключаем, что целая функция $f(z)-a$ является функцией в. р. р. при любом $a\neq\infty$, и находим, что

$$T(r,\ f)=(1+o(1))\,\frac{2s}{\rho}(\operatorname{cosec}\pi\lambda)\,r^{\rho},$$

$$m(r,\ a_k,\ f)=(1+o(1))\,\frac{2\mu_k}{\rho}(\operatorname{cosec}\pi\lambda)\,r^{\rho},\quad 1\leqslant k\leqslant q,$$

$$m(r,\ a,\ f)=o(r^{\rho}),\quad a\neq a_k,\quad 1\leqslant k\leqslant q.$$

Следовательно, для дефектов функции $f(z)$ остаются в силе формулы (17) и (18).

Доказательство теоремы 2. Пусть $f(z)$ — целая функция в. р. р. нецелого порядка ρ, $h(\theta,\ f)$ — ее индикатор. Не уменьшая общности, можно считать, что производная $h'(\theta,f)$ непрерывна в точке $\theta=0$. Обозначим через $\Delta(\psi)$, $0\leqslant\psi\leqslant2\pi$, величину

$$\Delta(\psi)=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{n(r,\ [0,\ \psi);\ f)}{V(r)}, \tag{31'}$$

где $n(r,\ [0,\ \psi);\ f)$ — число нулей функции $f(z)$ в секторе $\{|z|\leqslant r,\ 0\leqslant\arg z<\psi\}$; $\Delta(0)=0$. Известно [4], что в (31') предел существует для всех $\psi\in[0,\ 2\pi]$, кроме, самое большее, счетного множества $\psi\in(0,\ 2\pi)$, в которых неубывающая функция $\Delta(\psi)$ имеет разрывы. Если в некоторой точке θ_0 функция $\Delta(\psi)$ имеет разрыв, то в этой точке не существует производная $h'(\theta,\ f)$, а правосторонняя производная больше левосторонней. Наше предположение о том, что $h'(\theta,\ f)$ непрерывна в $\theta=0$, обеспечивает непрерывность $\Delta(\psi)$ при $\psi=0$ и $\psi=2\pi$. Для $h(\theta,\ f)$ имеет место формула [4]

$$h(\theta,\ f)=\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\int_0^{2\pi}\cos\rho(|\theta-\psi|-\pi)\,d\Delta(\psi),\quad 0\leqslant\theta\leqslant2\pi. \tag{32}$$

Обозначим через $c_{\rho}(\theta)$ 2π-периодическую функцию, равную $\cos\rho(\theta-\pi)$ при $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$. Пусть $M(\psi)$ — множество тех значений θ, $-\infty<\theta<\infty$, для которых $c_{\rho}(\theta-\psi)>0$, $-\infty<\psi<\infty$. Нетрудно убедиться, что $M(\psi')=M(\psi'')$ тогда и только тогда, когда $\psi'-\psi''=2\pi k$, k — целое число.

Предположим сначала, что $p=[\rho]$ — четное число. Тогда $\sin\pi\rho>0$. Обозначим через K множество тех θ, $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$, для которых $h(\theta,\ f)>0$. Тогда из (4) и (32) следует

$$T(r,\ f)=\frac{1+o(1)}{2\sin\pi\rho}V(r)\int_K d\theta\int_0^{2\pi}\cos\rho(|\theta-\psi|-\pi)\,d\Delta(\psi)=$$

$$=\frac{1+o(1)}{2\sin\pi\rho}V(r)\int_0^{2\pi}d\Delta(\psi)\int_K\cos\rho(|\theta-\psi|-\pi)\,d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1+o(1)}{2\sin\pi\rho}V(r)\int_0^{2\pi}d\Delta(\psi)\int_0^{2\pi}\cos^+\rho(|\theta-\psi|-\pi)\,d\theta. \tag{33}$$

Но в силу 2π-периодичности функции $\{c_\rho(\theta)\}^+$ имеем

$$\int_0^{2\pi} \cos^+ \rho(|\theta-\psi|-\pi)\,d\theta = \int_0^{2\pi} \{c_\rho(\theta-\psi)\}^+ d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \{c_\rho(\theta)\}^+ d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^+ \rho(\theta-\pi)\,d\theta = 2\int_0^{\pi} \cos^+ \rho\theta\,d\theta.$$

Таким образом,

$$T(r,\ f) \leqslant \frac{1+o(1)}{\sin \pi\rho} V(r) \int_0^{\pi} \cos^+ \rho\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\Delta(\psi) =$$

$$= \frac{1+o(1)}{\sin \pi\rho} V(r) \int_0^{\pi} \cos^+ \rho\theta\,d\theta \lim_{r\to\infty} \frac{n(r,\ [0,\ 2\pi);\ f)}{V(r)}.$$

Применяя правило Лопиталя, получим

$$\frac{N(r,\ 0,\ f)}{V(r)} \sim \frac{n(r,\ [0,\ 2\pi);\ f)}{V(r)\{\rho(r)+\rho'(r)r\ln r\}} \sim \frac{n(r,\ [0,\ 2\pi);\ f)}{\rho V(r)}.$$

Поэтому

$$T(r,\ f) \leqslant \frac{1+o(1)}{\sin \pi\rho} \rho N(r,\ 0,\ f) \int_0^{\pi} \cos^+ \rho\theta\,d\theta,$$

$$\delta(0,\ f) \leqslant 1 - \frac{\sin \pi\rho}{\rho} \left\{\int_0^{\pi} \cos^+ \rho\theta\,d\theta\right\}^{-1}. \tag{34}$$

Вычисляя интеграл, стоящий справа в (34), получим (1).

Предположим теперь, что в (1) имеет место равенство. Из предыдущих выкладок следует, что тогда необходимо

$$\int_0^{2\pi} d\Delta(\psi) \int_K \cos \rho(|\theta-\psi|-\pi)\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\Delta(\psi) \int_0^{2\pi} \cos^+ \rho(|\theta-\psi|-\pi)\,d\theta,$$

или

$$\int_0^{2\pi} d\Delta(\psi) \left\{\int_0^{2\pi} \cos^+ \rho(|\theta-\psi|-\pi)\,d\theta - \int_K \cos \rho(|\theta-\psi|-\pi)\,d\theta\right\} = 0. \tag{35}$$

Выражение в фигурных скобках при всех $\psi \in [0,\ 2\pi]$ неотрицательно, причем может равняться нулю лишь для тех ψ, для которых $M(\psi) = K$. Если таких точек нет, то мы приходим к противоречию, так как тогда выражение в фигурных скобках в (35) положительно для всех ψ из $[0,\ 2\pi]$ и левая часть (35) тоже была бы положительной. Следовательно, или существует такое единственное $\psi_0 \in (0,\ 2\pi)$, что $M(\psi_0) = K$, или $M(0) = M(2\pi) = K$. Второй случай исключается, так как $\Delta(2\pi) > 0$ и в силу непрерывности $\Delta(\psi)$ в точках $\psi = 0,\ 2\pi$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} d\Delta(\psi) > 0,$$

т. е. левая часть (35) опять должна быть положительной. Если же $M(\psi_0) = K,\ 0 < \psi_0 < 2\pi$, то в силу (35) $\Delta(\psi) \equiv \mathrm{const}$ при $\psi \in [0,\ \psi_0)$ и при $\psi \in (\psi_0,\ 2\pi]$. Наоборот, если функция $\Delta(\psi)$ кусочно-постоянна и имеет единственный положительный скачок в точке ψ_0, $0 < \psi_0 < 2\pi$, то из (32) следует, что

$$h(\theta, f) = \frac{\pi}{\sin \pi\rho}\{\Delta(\psi_0+0) - \Delta(\psi_0-0)\} \cos\rho(|\theta - \psi_0| - \pi), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

и очевидно, что в (1) имеет место равенство. Таким образом, доказано последнее утверждение теоремы 2.

Если $p = [\rho]$ — нечетное число, то все рассуждения проводим аналогично с небольшими изменениями. Например, вместо (33) получим

$$T(r, f) \leqslant \frac{1+o(1)}{2|\sin \pi\rho|} \int_0^{2\pi} d\Delta(\psi) \int_0^{2\pi} \cos^- \rho(|\theta - \psi| - \pi)\, d\theta.$$

Доказательство теоремы 3. Мы докажем, что для любой тригонометрически ρ-выпуклой 2π-периодической функции $h(\theta)$, удовлетворяющей условиям, наложенным в теореме 3 на индикатор $h(\theta, f)$, выполняется

$$\int_0^{2\pi} h^-(\theta)\, d\theta \leqslant \frac{\sin^2 \frac{\rho l}{4}}{\sin^2 \frac{\rho L}{4}} \int_0^{2\pi} h^+(\theta)\, d\theta. \tag{36}$$

Отсюда в силу (17) следует (2).

Пусть $\tau < \theta_k < \theta < \frac{\theta_k + \theta_k'}{2}$. Поскольку $\frac{\theta_k' - \theta_k}{2} \leqslant \frac{\pi}{2\rho}$, то мы можем выбрать τ так, чтобы $(\theta_k + \theta_k')/2 - \tau < \pi/\rho$, и применить к точкам τ, θ_k, θ основное неравенство для тригонометрически ρ-выпуклых функций. Учитывая, что $h(\theta_k) = 0$, получим

$$0 \leqslant h(\tau) \sin\rho(\theta - \theta_k) + h(\theta) \sin\rho(\theta_k - \tau),$$

$$h^-(\theta) \leqslant \sin\rho(\theta - \theta_k) \frac{h(\tau)}{\sin\rho(\theta_k - \tau)}.$$

Устремив τ к θ_k, получим

$$h^-(\theta) \leqslant -\frac{1}{\rho} h_-'(\theta_k) \sin\rho(\theta - \theta_k),$$

откуда

$$\rho^2 \int_{\theta_k}^{(\theta_k+\theta_k')/2} h^-(\theta)\, d\theta \leqslant -h_-'(\theta_k)\left\{1 - \cos\rho\frac{\theta_k' - \theta_k}{2}\right\}. \tag{37}$$

Аналогичными рассуждениями, примененными к точкам $(\theta_k + \theta_k')/2 < \theta < \theta_k' < \tau$, находим

$$\rho^2 \int_{(\theta_k+\theta_k')/2}^{\theta_k'} h^-(\theta)\, d\theta \leqslant h_+'(\theta_k')\left\{1 - \cos\rho\frac{\theta_k' - \theta_k}{2}\right\}. \tag{38}$$

Из (37) и (38) следует

$$\rho^2 \int_{\theta_k}^{\theta_k'} h^-(\theta)\, d\theta \leqslant \{-h_-'(\theta_k) + h_+'(\ {}_k)\}\left(1 - \cos\rho\frac{\theta_k' - \theta_k}{2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \{-h_-'(\theta_k) + h_+'(\theta_k')\}\left(1 - \cos\frac{\rho l}{2}\right) = \{-h_-'(\theta_k) + h_+'(\theta_k')\}\, 2\sin^2\frac{\rho l}{4}. \tag{39}$$

Возьмем теперь числа θ и τ такие, чтобы $\theta_k - L/2 < \theta < \tau < \theta_k$, и применим к θ, τ, θ_k, $\theta_k - \theta < \pi/\rho$ основное неравенство для тригонометрически ρ-выпуклых функций. Тогда получим

$$-h(\theta)\sin\rho(\theta_k-\tau)+h(\tau)\sin\rho(\theta_k-\theta)\leqslant 0,$$
$$-h(\theta)+\frac{h(\tau)}{\sin\rho(\theta_k-\tau)}\sin\rho(\theta_k-\theta)\leqslant 0.$$

Устремив τ к θ_k, получим

$$-h(\theta)-\frac{1}{\rho}h'_{-}(\theta_k)\sin\rho(\theta_k-\theta)\leqslant 0,$$

откуда, учитывая, что $h(\theta)\geqslant 0$ при $\theta_k-L/2\leqslant\theta\leqslant\theta_k$, находим $-h'_{-}(\theta_k)\sin\rho(\theta_k-\theta)\leqslant\rho h^{+}(\theta)$,

$$-h'_{-}(\theta_k)\,2\sin^2\frac{\rho L}{4}\leqslant\rho^2\int\limits_{\theta_k-\frac{L}{2}}^{\theta_k}h^{+}(\theta)\,d\theta. \tag{40}$$

Аналогично получаем

$$h'_{+}(\theta'_k)\,2\sin^2\frac{\rho L}{4}\leqslant\rho^2\int\limits_{\theta'_k}^{\theta'_k+\frac{L}{2}}h^{+}(\theta)\,d\theta. \tag{41}$$

Из (39), (40), (41) следует, что

$$\int\limits_{\theta_k}^{\theta'_k}h^{-}(\theta)\,d\theta\leqslant\frac{\sin^2\frac{\rho l}{4}}{\sin^2\frac{\rho L}{4}}\left\{\int\limits_{\theta_k-\frac{L}{2}}^{\theta_k}h^{+}(\theta)\,d\theta+\int\limits_{\theta'_k}^{\theta'_k+\frac{L}{2}}h^{+}(\theta)\,d\theta\right\}.$$

Суммируя по k от 1 до n и учитывая, что $\theta'_k+\frac{L}{2}\leqslant\theta_{k+1}-\frac{L}{2}$, $0\leqslant\leqslant k\leqslant n$, $\theta'_0=\theta'_n-2\pi$, получим неравенство (36), откуда, как мы отмечали, следует (2).

Исследуем теперь точность оценки (2), причем ограничимся случаем, когда $\rho(r)\equiv\rho$. Пусть сначала $1/2<\rho<1$. Так как $L\geqslant\pi/\rho>\pi$, то $h(\theta, f)<0$ на одном интервале (θ_1,θ'_1), $\theta'_1-\theta_1=l$, и $h(\theta, f)\geqslant 0$ при $[\theta'_1, \theta_1+2\pi]$, $\theta_1+2\pi-\theta'_1=L$. Пусть $\varphi=\frac{1}{2}\left(L-\frac{\pi}{\rho}\right)$, $\frac{\pi}{2\rho}\geqslant\varphi\geqslant 0$. Возьмем целую функцию

$$\Omega(z)=\Omega(z;\ \rho,\ \varphi)=g_\rho(ze^{-i\varphi})+g_\rho(ze^{i\varphi}),$$

где $g_\rho(z)$ — целая функция, определенная по (9) с $z_n=n^{1/\rho}$. Учитывая (10), легко получаем, что $\Omega(z)$ — целая функция в. р. р. и

$$h(\theta,\ \Omega)=\pi\operatorname{cosec}\pi\rho\cos\rho(|\theta|-\varphi),\quad -\pi\leqslant\theta\leqslant\pi.$$

Следовательно, $h(\theta,\Omega)\geqslant 0$ при $|\theta|\leqslant\varphi+\frac{\pi}{2\rho}=L/2$ и $h(\theta,\Omega)<0$ при $\varphi+\frac{\pi}{2\rho}<|\theta|\leqslant\pi$, $l=2\pi-L=2\pi-2\varphi-\pi/\rho$. Легко видеть, что

$$\delta(0,\Omega)=\int\limits_{\varphi+\frac{\pi}{2\rho}}^{\pi}-\cos\rho(\theta-\varphi)\,d\theta\left\{\int\limits_{0}^{\varphi+\frac{\pi}{2\rho}}\cos\rho(\theta-\varphi)\,d\theta\right\}^{-1}=$$

$$=\frac{1-\sin\rho(\pi-\varphi)}{1+\sin\rho\varphi}=\frac{\sin^2\frac{\rho l}{4}}{\sin^2\frac{\rho L}{4}}.$$

При $\rho = 1$ возьмем $\Omega(z) = \Omega(z;\ 1,\ \varphi) = \exp(ze^{-i\varphi}) + \exp(ze^{i\varphi})$, где $\varphi = (L - \pi)/2$. Так же, как и выше, показываем, что для $\Omega(z)$ в (2) имеет место равенство.

Пусть теперь $3/2 < \rho < \infty$, ρ — нецелое число. Пусть $l = L = \pi/\rho$. Тогда оценка (2) примет вид $\delta(0, f) \leqslant 1$. Если бы она достигалась, то это противоречило бы (1). То, что при любом нецелом ρ, $3/2 < \rho < \infty$, существуют целые функции в. р. р. с $l = L = \pi/\rho$, показывают функции, для которых в (1) достигается равенство. Теорема 3 доказана.

В заключение приведем примеры, показывающие, что оценка (3) не может быть существенно уточнена. Пусть $1 < \rho < \infty$ и задано l, $0 < l \leqslant \pi/\rho$. Определим на $[-\pi, \pi]$ функцию $H(\theta)$ формулами

$$H(\theta) = \sin\rho\left(|\theta| - \frac{l}{2}\right), \text{ если } l/2 + \pi/\rho \geqslant \pi, \tag{42}$$

$$H(\theta) = \begin{cases} \sin\rho\left(|\theta| - \frac{l}{2}\right) \text{ при } |\theta| \leqslant \frac{l}{2} + \frac{\pi}{\rho}, \\ 0 \quad \text{при} \quad \frac{l}{2} + \frac{\pi}{\rho} \leqslant |\theta| \leqslant \pi, \end{cases} \tag{43}$$

если $l/2 + \pi/\rho < \pi$. Нетрудно проверить, что функция $H(\theta)$ является тригонометрически ρ-выпуклой. Тогда существует целая функция $f(z)$ в. р. р. порядка ρ такая, что $h(\theta, f) \equiv H(\theta)$, $|\theta| \leqslant \pi$ [4, стр. 124]. Очевидно, что $h(\theta, f) < 0$ при $|\theta| < l/2$ и $h(\theta, f) \geqslant 0$ при $l/2 \leqslant |\theta| \leqslant \pi$. Нетрудно подсчитать, что если имеет место случай (42) (тогда необходимо $L = 2\pi - l$), то

$$\delta(0, f) = \frac{\sin^2\frac{\rho l}{4}}{\sin^2\frac{\rho L}{4}} \geqslant \sin^2\frac{\rho l}{4}.$$

Если же имеет место случай (43), то

$$\delta(0, f) = \sin^2\frac{\rho l}{4}.$$

Таким образом, в оценке (3) множитель 2 перед $\sin^2\frac{\rho l}{4}$ не может быть заменен множителем, меньшим единицы. Отметим еще, что при специальных соотношениях между ρ, l и L оценка (2) может достигаться и при $\rho > 1$. Таков рассмотренный нами случай (42), возможный при $\rho \leqslant 3/2$. Если существует такое целое число n, что $1/2 < \rho/n \leqslant 1$, $L + l = 2\pi/n$, то в (2) также может достигаться равенство. Это имеет место, например, для функции

$$f(z) = \Omega\left(z^n;\ \rho/n,\ \frac{n}{2}\left(L - \frac{\pi}{\rho}\right)\right),$$

где функция $\Omega(z;\ \rho, \varphi)$ была определена выше.

В заключение выражаю благодарность Б. Я. Левину и И. В. Островскому за большую помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. У. К. Хейман. Мероморфные функции. Изд-во «Мир», М., 1966.
2. Н. У. Аракелян. Целые функции конечного порядка с бесконечным множеством дефектных значений. ДАН СССР, 170 (1966), 999—1002.
3. Oum Ki-Choul. Bounds for the number of deficient values of entire functions whose zeros have angular densities. Pacif. J. Math., 29, № 1 (1969), 187—202.
4. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. Гостехиздат, М., 1956.
5. A. Edrei, W. H. J. Fuchs. On the growth of meromorphic functions with several deficient values. Trans. Amer. Math. Soc., 93 (1959), 292—328.
6. G. R. Maclane. Concerning the uniformization of certain inverse-cosine and inverse-gamma surfaces. Trans. Amer. Math. Soc., 62 (1947), 99—113.

7. H. Schubart. Einige ganze Funktionen und ihre Riemannschen Flächen. Math. Ann., 124 (1951), 55—64.

8. H. Schubart, H. Wittich. Einige ganze Funktionen und ihre Riemannschen Flächen. Math. Ann., 124 (1952), 450—452.

9. П. П. Белинский. Поведение квазиконформного отображения в изолированной особой точке. Уч. зап. Львовск. ун-та, 29, серия мех.-матем., вып. 6, 1954.

10. М. А. Евграфов. Асимптотические оценки и целые функции. 1-е изд. Гостехиздат, М., 1957.

Поступила 18 апреля 1970 г.