О НЕВАНЛИННОВСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ НЕКОТОРЫХ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

А. З. Мохонько

В этой статье мы получим оценки неванлинновской характеристики $T(r, f)$ для одного класса мероморфных функций.

Будем пользоваться стандартными обозначениями и основными фактами неванлинновской теории без дополнительных пояснений [1, 2].

Все функции от z, которые будут встречаться ($f(z)$, $a_j(z)$, $b_i(z)$ и др.), предполагаются мероморфными в конечной плоскости, что не всегда будет оговорено.

Пусть

$$F_d(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} = \frac{P_m(z, f(z))}{Q_n(z, f(z))} = \frac{a_0(z) + a_1(z) f(z) + \cdots + a_m(z)\{f(z)\}^m}{b_0(z) + b_1(z) f(z) + \cdots + b_n(z)\{f(z)\}^n}, \tag{1}$$

где $a_m(z) \not\equiv 0$, $b_n(z) \not\equiv 0$, $d = d[P_m(z, w)/Q_n(z, w)] = \max(m, n) \geqslant 1$. Причем $P_m(z, w)$ и $Q_n(z, w)$ взаимно просты как многочлены от w над полем мероморфных функций.

Через $\Omega(r; f_1, \ldots, f_n) = \Omega(r, f_i)$ обозначим всякую действительную функцию от $r > 0$, для которой при $r \to \infty$

$$\Omega(r, f_i) = O\Big(\sum_{i=1}^{n} T(r, f_i)\Big). \tag{2}$$

Докажем следующую теорему.

Теорема. *Имеет место равенство*

$$T(r, F_d) = dT(r, f) + \Omega(r; a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_n). \tag{3}$$

Когда $a_j(z)$ и $b_i(z)$ — рациональные и, следовательно, $\Omega(r; a_j, b_i) = O(\ln r)$, мы получаем теорему Валирона [3] (случай, когда $a_j(z) \equiv \mathrm{const}$, $0 \leqslant j \leqslant m$, $b_i(z) \equiv \mathrm{const}$, $0 \leqslant i \leqslant n$, изложен в [1, теорема 6.1, гл. 1]). Наш метод отличен от метода Валирона, который, по-видимому, не позволяет получить нужную нам теорему.

Нам потребуются две леммы.

Лемма 1. *Пусть*

$$A(z) = (\varphi_1 f + \cdots + \varphi_{m-1} f^{m-1} + f^m) f^{m-2} = \varphi_1 f^{m-1} + \cdots + \varphi_{m-1} f^{2m-3} + f^{2m-2}, \quad (m \geqslant 2)$$

где $f(z)$, $\varphi_j(z)$ — мероморфные функции, $1 \leqslant j \leqslant m-1$.

Существуют такие мероморфные функции $u_{m-1}(z) \equiv 1$, $u_{m-2}(z), \ldots, u_0(z)$; $q_{m-2}(z), \ldots, q_0(z)$, что

$$A(z) + \sum_{k=0}^{m-2} q_k f^k \equiv \{F_{m-1}(z)\}^2, \tag{4}$$

где

$$F_{m-1}(z) = u_0 + \cdots + u_{m-2} f^{m-2} + u_{m-1} f^{m-1}, \tag{5}$$

$$q_k = \sum_{\substack{s+t=k \\ s<m-1 \\ t<m-1}} u_s u_t, \quad k = 0, \ldots, m-2, \tag{5'}$$

а $u_0(z), \ldots, u_{m-2}(z)$ являются некоторыми многочленами от функций $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_{m-1}(z)$.

Доказательство. Найдем функции $u_0, \ldots, u_{m-2}$ такие, чтобы при одинаковых степенях f в (4) стояли тождественно равные коэффициенты. По условию $u_{m-1}(z) \equiv 1$. Предположим, что уже определили $u_{m-1}, \ldots, u_p$, $m-1 \geqslant p \geqslant 1$.

Учитывая $m+p-2 \geqslant m-1$ и равенство

$$\{F_{m-1}(z)\}^2 = \sum_{k=0}^{2m-2} f^k \sum_{\substack{s+t=k \\ s \leqslant m-1 \\ t \leqslant m-1}} u_s u_t = \sum_{k=0}^{2m-2} f^k l_k = \sum_{k=0}^{m-2} f^k l_k + \sum_{k=m-1}^{2m-2} f^k l_k,$$

$$l_k = \sum_{\substack{s+t=k \\ s \leqslant m-1 \\ t \leqslant m-1}} u_s u_t, \quad k = 0, \ldots, 2m-2,$$

определим функцию u_{p-1} из тождества

$$l_{m+p-2} \equiv \varphi_p \equiv \sum_{\substack{s+t=m+p-2 \\ s \leqslant m-1 \\ t \leqslant m-1}} u_s u_t \equiv 2u_{m-1}u_{p-1} + \sum_{\substack{s+t=m+p-2 \\ s \leqslant m-2 \\ t \leqslant m-2}} u_s u_t,$$

$$u_{p-1} = \frac{1}{2}\Big\{\varphi_p - \sum_{\substack{s+t=m+p-2 \\ s \leqslant m-2 \\ t \leqslant m-2}} u_s u_t\Big\}. \qquad (6)$$

Из условий $s+t=m+p-2$, $s \leqslant m-2$, $t \leqslant m-2$ следует, что $s \geqslant p$, $t \geqslant p$, т. е. в сумме, стоящей в правой части равенства (6), все функции u_s, u_t известны. Таким образом, мы можем последовательно найти все коэффициенты $u_{m-2}, \ldots, u_0$. Затем положим $q_k(z) \equiv l_k(z)$, $0 \leqslant k \leqslant m-2$.

Тогда, очевидно, выполняется тождество (4). Из (6) ясно, что $u_j(z)$, $0 \leqslant j \leqslant m-2$ являются многочленами от $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$. Лемма доказана. Заметим еще, что и $q_k(z) \equiv l_k(z)$, $0 \leqslant k \leqslant m-2$ также являются многочленами от $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$.

Лемма 2. (См. [1, гл. 1 (6.15)]). *Пусть $R(w_1, \ldots, w_q)$ — рациональная функция от переменных $w_1, \ldots, w_q$, а $f_1(z), \ldots, f_q(z)$ — некоторые мероморфные функции. Тогда при $r \to \infty$*

$$T(r, R(f_1, \ldots, f_q)) = O\Big(\sum_{j=1}^{q} T(r, f_j)\Big).$$

1°. Переходим к доказательству теоремы. Рассмотрим сначала случай, когда $Q_n(z) \equiv 1$. Тогда $d[P_m/Q_n] = m \geqslant 1$ и

$$F_m(z) = a_0 + a_1 f + \cdots + a_m f^m. \qquad (1')$$

Известно ([4], а также [1, гл. 1 (6.16)]), что

$$T(r, F_m) \leqslant m \cdot T(r, f) + \sum_{j=0}^{m} T(r, a_j) + O(1) = mT(r, f) + \Omega(r; a_j). \qquad (7)$$

Докажем обратное неравенство:

$$T(r, F_m) \geqslant mT(r, f) + \Omega(r; a_j).$$

При $m = 1$

$$T(r, f) = T(r, (F_1 - a_0)/a_1) \leqslant T(r, F_1) + T(r, a_0) + T(r, a_1) + O(1).$$

Значит,

$$T(r, F_1) \geqslant T(r, f) + \Omega(r; a_j).$$

Допустим, что уже доказано: если

$$F_{m-1}(z)=a_0+\cdots+a_{m-1}f^{m-1},\quad a_{m-1}(z)\not\equiv 0\quad (m\geqslant 2),$$

то

$$T(r, F_{m-1})\geqslant (m-1)\,T(r, f)+\Omega(r;\, a_j). \tag{8}$$

Учитывая (7), видим, что тогда верна формула

$$T(r, F_{m-1})=(m-1)\,T(r, f)+\Omega(r;\, a_j). \tag{9}$$

Докажем, что неравенство, аналогичное (8), верно и для $F_m(z)$. Запишем

$$\frac{F_m-a_0}{a_m}=\frac{a_1}{a_m}f+\cdots+\frac{a_{m-1}}{a_m}f^{m-1}+f^m,$$

$$\left(\frac{F_m-a_0}{a_m}\right)f^{m-2}=(\varphi_1 f+\cdots+\varphi_{m-1}f^{m-1}+f^m)\cdot f^{m-2},$$

где $\varphi_j=a_j/a_m$. Применяя лемму 1, можем найти функции $q_0, \ldots, q_{m-2}$ и F_{m-1} вида (5) и (5′), такие что

$$L(z)=\{(F_m-a_0)/a_m\}\,f^{m-2}+q_{m-2}f^{m-2}+\cdots+q_0=$$
$$=\left(\frac{F_m-a_0}{a_m}+q_{m-2}\right)f^{m-2}+q_{m-3}f^{m-3}+\cdots+q_0=\{F_{m-1}(z)\}^2.$$

Известно [1, упр. 1, стр. 49], что если k — натуральное число, то

$$T(r, f^k)=k\cdot T(r, f). \tag{10}$$

Используя лемму 2, (9) и (10), получаем

$$T(r, L(z))=T(r, F_{m-1}^2)=2\cdot T(r, F_{m-1})=2\,[(m-1)\,T(r, f)+\Omega(r,\, u_j)]=$$
$$=2(m-1)\,T(r, f)+\Omega(r,\, a_j). \tag{11}$$

В то же время, учитывая (7),

$$T(r, L(z))\leqslant (m-2)\,T(r, f)+\sum_{j=0}^{m-3}T(r, q_j)+T\left(r,\ \frac{F_m-a_0}{a_m}+q_{m-2}\right)+$$
$$+O(1)\leqslant (m-2)\cdot T(r, f)+T(r, F_m)+T(r, a_0)+T(r, a_m)+$$
$$+\sum_{j=0}^{m-2}T(r, q_j)+O(1)=(m-2)\cdot T(r, f)+T(r, F_m)+\Omega(r,\, a_j). \tag{12}$$

Из (11) и (12) получаем

$$2(m-1)\,T(r, f)+\Omega(r;\, a_j)\leqslant (m-2)\cdot T(r, f)+T(r, F_m)+\Omega(r,\, a_j),$$
$$T(r, F_m)\geqslant mT(r, f)+\Omega(r;\, a_j). \tag{13}$$

Следовательно, из (7) и (13) находим

$$T(r, F_m)=mT(r, f)+\Omega(r;\, a_j). \tag{9′}$$

2°. Перейдем к общему случаю, когда в (1), возможно, $Q_n(z)\not\equiv 1$. Докажем для $T(r, F_d)$ оценку сверху

$$T(r, F_d)\leqslant d\cdot T(r, f)+\Omega(r;\, a_j,\, b_j). \tag{14}$$

Предположим, что $0\leqslant m<n$. Это не уменьшает общности, так как при $m>n$

$$T(r, F_d)=T(r;\, 1/F_d)+O(1)=T(r, Q_n/P_m)+O(1),$$

а при $m=n$

$$|T(r, F_d)-T(r, F_d-a_n/b_n)|\leqslant T(r, a_n)+T(r, b_n)+O(1)=\Omega(r;\, a_i,\, b_i),$$

где $F_d - a_n/b_n = P^*/Q_n b_n$, P^* — многочлен относительно f степени $\leqslant n-1$, взаимно-простой с Q_n над полем мероморфных функций.

Итак, у нас $d = n > m \geqslant 0$. При $m = 0$

$$F_n(z) = a_0/(b_0 + \cdots + b_n f^n),$$

$$T(r, F_n) = T(r, 1/F_n) + O(1) \leqslant n \cdot T(r, f) + \sum_{j=0}^{n} T(r, b_j/a_0) + $$
$$+ O(1) \leqslant n \cdot T(r, f) + \Omega(r; a_j; b_i).$$

Таким образом, при $m = 0$ оценка (14) справедлива. Допустим, что она справедлива для всех $F_d = P_k/Q_n$, где $k \leqslant m-1$ и $n > k$. Докажем, что (14) имеет место и при $k = m$, $n > m$.

Мы имеем

$$\frac{1}{F_n} = \frac{Q_n}{P_m} = \frac{b_0 + \cdots + b_n f^n}{a_0 + \cdots + a_m f^m} = c_{n-m} f^{n-m} + \cdots + c_0 + \frac{b'_{m-1} f^{m-1} + \cdots + b'_0}{a_m f^m + \cdots + a_0},$$

где $b'_{m-1} f^{m-1} + \cdots + b'_0 \not\equiv 0$, так как Q_n и P_m как многочлены от w взаимно-просты над полем мероморфных функций. Функции $c_j(z)$, $0 \leqslant j \leqslant n-m$, и $b'_i(z)$, $0 \leqslant i \leqslant m-1$,— некоторые рациональные функции от a_j и b_i, $0 \leqslant j \leqslant m$, $0 \leqslant i \leqslant n$. Поэтому, применяя предположение индукции, лемму 2 и (7), получаем

$$T(r, F_n) + O(1) = T(r, 1/F_n) \leqslant T(r, c_{n-m} f^{n-m} + \cdots + c_0) +$$
$$+ T\left(r, \frac{b'_{m-1} f^{m-1} + \cdots + b'_0}{a_m f^m + \cdots + a_0}\right) \leqslant (n-m) T(r, f) + \Omega(r; c_j) + mT(r, f) +$$
$$+ \Omega(r; a_j, b'_i) = nT(r, f) + \Omega(r; a_j, b_i).$$

Неравенство (14) доказано.

Докажем теперь, что

$$T(r, F_n) \geqslant n \cdot T(r, f) + \Omega(r; a_j, b_i). \tag{15}$$

Пусть сначала $m = 0$. Тогда

$$F_n = a_0/(b_n f^n + \cdots + b_0), \quad a_0/F_n = b_n f^n + \cdots + b_0.$$

Используя доказанное в 1°, имеем

$$T(r, F_n) \geqslant n \cdot T(r, f) + \Omega(r; b_i) - T(r, a_0) = nT(r, f) + \Omega(r; a_j, b_i)^*.$$

Пусть теперь $0 < m < n$. Так как $P_m(z, w)$ и $Q_n(z, w)$ взаимно-просты как многочлены от w над полем мероморфных функций, то, как известно, существуют такие многочлены от w над полем мероморфных функций $U_s(z, w)$ и $V_t(z, w)$, $\deg U_s(z, w) = s$, $\deg V_t(z, w) = t$, что

$$P_m U_s + Q_n V_t \equiv 1, \tag{16}$$

где

$$U_s(z, f(z)) = c_0 + \cdots + c_s f^s,$$
$$V_t(z, f(z)) = p_0 + \cdots + p_t f^t$$

и $c_k(z)$, $p_l(z)$, $0 \leqslant k \leqslant s$, $0 \leqslant l \leqslant t$, являются рациональными функциями от $a_j(z)$, $b_i(z)$, $0 \leqslant j \leqslant m$, $0 \leqslant i \leqslant n$. Последнее вытекает из того, что c_k, p_l получаются из a_j, b_i с помощью алгоритма Евклида.

Тождество (16) можно переписать так:

$$\frac{P_m}{Q_n} + \frac{V_t}{U_s} \equiv \frac{1}{Q_n \cdot U_s}. \tag{16'}$$

Из (16) следует, что $s > t$, и что $V_t(z, w)$ и $U_s(z, w)$ взаимно-просты как многочлены от w над полем мероморфных функций. Используя (16′) и (*), можем записать

$$T\left(r, \frac{P_m}{Q_n} + \frac{V_t}{U_s}\right) = T\left(r, \frac{1}{Q_n U_s}\right) \geqslant (n+s)\, T(r, f) + \Omega(r; a_i, b_i). \quad (17)$$

С другой стороны, в силу (14)

$$T\left(r, \frac{P_m}{Q_n} + \frac{V_t}{U_s}\right) \leqslant T\left(r, \frac{P_m}{Q_n}\right) + T\left(r, \frac{V_t}{U_s}\right) + O(1) \leqslant T\left(r, \frac{P_m}{Q_n}\right) + $$
$$+ sT(r, f) + \Omega(r; a_i, b_i). \quad (18)$$

Из (17) и (18) следует

$$T(r, F_n) \geqslant nT(r, f) + \Omega(r; a_i, b_i).$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Как мы отмечали для $F_m(z)$ вида (1′), справедливо неравенство

$$T(r, F_m) \leqslant mT(r, f) + \sum_{j=0}^{m} T(r, a_j) + O(1).$$

Возникает вопрос, можно ли вместо неравенства (13) получить более точное неравенство

$$T(r, F_m) \geqslant mT(r, f) - \sum_{j=0}^{m} T(r, a_j) + O(1). \quad (19)$$

В общем случае ответ отрицательный, как показывает следующий пример. Пусть

$$F_2(z) = f^2 + a_1 f + a_0,$$

где $f(z) = e^z$, $a_1(z) = -e^z$, $a_0 = z$.

Если бы (19) было верно, то мы имели бы

$$T(r, F_2) \geqslant 2T(r, f) - T(r, a_1) - T(r, a_0) + O(1) = 2T(r, e^z) - T(r, e^z) -$$
$$- T(r, z) + O(1) = T(r, e^z) - T(r, z) + O(1) = \frac{r}{\pi} - \ln^+ r + O(1).$$

На самом же деле $F_2(z) = z$ и $T(r, F_2) = \ln^+ r$.

Замечание 2. Пусть $F_m(z)$ имеем вид (1′). Незначительно изменяя рассуждения п. 1°, нетрудно получить

$$m \cdot N(r, f) + \sum_{j=0}^{m} N(r, a_j) \geqslant N(r, F_m) \geqslant m \cdot N(r, f) +$$
$$+ O\left(\sum_{j=0}^{m-1} N(r, a_j) + N(r, 1/a_m)\right).$$

Аналогичная система неравенств справедлива и для $m(r, F_m)$.

Выражаю глубокую благодарность А. А. Гольдбергу за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Гольдберг, И. В. Островский. Распределение значений мероморфных функций. Изд-во «Наука», М., 1970.

2. У. Хейман. Мероморфные функции. Изд-во «Мир», М., 1966.

3. Valiron G. Sur la dérivée des fonctions algébroïdes, Bull. Soc. math. France, 59 (1931), № 1—2, 17—39.

4. Hellerstein S., Rubel L. A. Subfields that are algebraically closed in the field of all meromorphic functions, Journ. analyse math., 12, 1964, 105—111.

Поступила 15 апреля 1970 г.