ВЕЙЛЕВСКИЕ СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРНЫХ УЗЛОВ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ИМ ОТКРЫТЫЕ ПОЛЯ

В. К. Дубовой

1. Введение

Все рассматриваемые в этой статье пространства предполагаются конечномерными линейными пространствами над полем комплексных чисел *.

1. Пусть даны некоторая группа G преобразований координат в фиксированном пространстве P и линейное представление $g \to u_g$ группы G в некотором пространстве H. Напомним, что *величиной, отвечающей представлению* $g \to u_g$, называется вектор $h \in H$, отнесенный к данной системе координат в P и переходящий в $u_g h$ при преобразовании g координат в P.

Пусть G — группа Лоренца, $g \in G$, $\| g_{jk} \|_0^3$ — матрица, соответствующая элементу g, и $g \to u_g$ — представление группы G в пространстве H. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{i} \sum_{k=0}^{3} L_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + \chi \psi = 0, \tag{1.1}$$

где ψ — искомая функция от x_0, x_1, x_2, x_3, значениями которой являются величины, отвечающие представлению $g \to u_g$, L_0, L_1, L_2, L_3 — заданные линейные операторы в H, а χ — вещественное число.

---

* Для полного понимания статьи необходимо знакомство с теорией инвариантных операторных узлов, изложенной в работе [1].

Уравнение (1.1) называется *инвариантным уравнением относительно группы Лоренца*, если оно не изменяется при преобразованиях $g \in G$ точки (x_0, x_1, x_2, x_3) и одновременном преобразовании u_g величины ψ.

Напомним, что необходимое и достаточное условие инвариантности уравнения (1.1) относительно группы Лоренца состоит в выполнении условий

$$\sum_{k=0}^{3} g_{jk}\tilde{u}_g L_k u_g^{-1} = L_j \ (j = 0, 1, 2, 3) \tag{1.2}$$

где $g \to \tilde{u}_g$ — также некоторое представление группы Лоренца в H, при этом, если $\chi \neq 0$, то $\tilde{u}_g = u_g$ для всех $g \in G^*$.

Пусть уравнение (1.1) инвариантно относительно группы Лоренца, а H — пространство с метрикой. Тогда уравнение (1.1) можно получить из инвариантной функции Лагранжа в том и только в том случае, если

$$L_k^+ = L_k \ (k = 0, 1, 2, 3), \tag{1.3}$$

$$\tilde{u}_g^+ = u_g^{-1}. \tag{1.4}$$

Определение. *Пусть H — пространство с метрикой, $H_{\tilde{u}, u}$ — бимодуль над G и $\{L_k\}_{k=0}^3$ — операторы, действующие в H. Будем говорить, что совокупность*

$$(\{L_k\}_{k=0}^3, H_{\tilde{u}, u}) \tag{1.5}$$

является связкой, если выполнены условия (1.2)—(1.4).

Итак, каждому инвариантному относительно группы Лоренца уравнению (1.1), получающемуся из инвариантной функции Лагранжа, можно поставить в соответствие связку (1.5) и наоборот, при этом, если $\tilde{u} \neq u$, то связке (1.5) соответствует уравнение (1.1) с $\chi = 0$.

Напомним, что инвариантное относительно группы Лоренца уравнение (1.1) называется *нераспадающимся*, если не существует невырожденного в H подпространства, приводящего операторы $\{L_k\}_{k=0}^3$ и разлагающего бимодуль $H_{\tilde{u}, u}$. В связи с этим введем

Определение. *Связку* (1.5) *будем называть нераспадающейся, если соответствующее этой связке уравнение* (1.1) *является нераспадающимся.*

В релятивистской квантовой механике принимается, что поле свободной частицы должно описываться нераспадающимся инвариантным относительно группы Лоренца уравнением, которое получается из некоторой функции Лагранжа. Таким образом, каждой свободной частице можно поставить в соответствие нераспадающуюся связку.

Следуя принятому в физике формализму, мы можем считать, что каждому нераспадающемуся инвариантному уравнению (1.1), получающемуся из инвариантной функции Лагранжа, соответствует свободная частица.

2. Пусть $(\{L_k\}_{k=0}^3, H_{\tilde{u}, u})$ — связка. Если связка $(\{L_k\}_{k=0}^3, H_{\tilde{u}, u})$ распадается, то соответствующее этой связке уравнение (1.1) распадается на несколько нераспадающихся уравнений. Это соответствует тому, что уравнение (1.1) описывает в рассматриваемом случае поле свободных частиц.

Пусть $\theta = (A, H, K, E)$ — операторный узел и $g \to v_g$ — некоторое представление группы G в E. Основная идея в переходе к открытым полям состоит в рассмотрении уравнений

$$\sum_{k=0}^{3} L_k \frac{\partial\psi}{\partial x_k} + A\psi = K^+\varphi^-, \ \varphi^+ = \varphi^- - iK\psi, \tag{1.6}$$

* Подробное изложение теории инвариантных относительно группы Лоренца уравнений имеется в [2, 4].

где φ^- и φ^+ — функции от x_0, x_1, x_2, x_3, значениями которых являются величины, отвечающие представлению $g \to v_g$ *.

Оператор A можно рассматривать как оператор, описывающий линейные взаимодействия между частицами. Заметим, что если где-либо в дальнейшем будет идти речь о взаимодействии между частицами, то это взаимодействие будет пониматься в указанном выше смысле.

Нетрудно показать, что уравнения (1.6) инвариантны относительно группы Лоренца тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$\sum_{k=0}^{3} g_{jk}\tilde{u}_g L_k u_g^{-1} = L_j \ (j = 0, 1, 2, 3), \tag{1.7}$$

$$\tilde{u}_g A = A u_g, \tag{1.8}$$

$$v_g K = K u_g, \tag{1.9}$$

$$\tilde{u}_g K^+ = K^+ v_g. \tag{1.10}$$

Но условия (1.7) выполнены, так как $(\{L_k\}_{k=0}^3, H_{\tilde{u}, u})$ — связка. Поэтому для инвариантности уравнений (1.6) необходимо и достаточно выполнение условий (1.8)—(1.10), которые являются условиями инвариантности узла θ.

Определение. *Уравнения вида*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{i}\displaystyle\sum_{k=0}^{3} L_k \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_k} + A\psi(x) = K^+\varphi^-(x), \\ \varphi^+(x) = \varphi^-(x) - iK\psi(x), \end{cases} \tag{1.11}$$

где $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $(\{L_k\}_{k=0}^3, H_{\tilde{u}, u})$ — *связка, а* $(A, H_{\tilde{u}, u}, K, E_v)$ — *инвариантный относительно группы Лоренца операторный узел, будем называть уравнениями открытого поля.*

Как и в теории открытых систем функцию $\varphi^-(x)$ будем называть *входом*, $\psi(x)$ — *внутренним состоянием*, а $\varphi^+(x)$ — *выходом открытого поля* (1.11).

3. Решим уравнения открытого поля (1.11) для того случая, когда вход имеет вид

$$\varphi^-(x_0, x_1, x_2, x_3) = \varphi^-(p_0, p_1, p_2, p_3)e^{i(-p_0x_0+p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3)}$$

(такой вход будем называть *плоской волной*). Величина $\varphi^-(p_0, p_1, p_2, p_3) = \varphi^-(p)$ не зависит от x_0, x_1, x_2, x_3, а числа p_0, p_1, p_2, p_3 мы будем предполагать действительными. Нетрудно показать, что вектор $\varphi^-(p_0, p_1, p_2, p_3)$ преобразуется по закону

$$\varphi^-(p') = v_g\varphi^-(p),$$

где $p' = gp$, т. е.

$$p_i' = \sum_{k=0}^{3} g_{ik}p_k \ (i = 0, 1, 2, 3).$$

Решение уравнения

$$\frac{1}{i}\sum_{k=0}^{3} L_k \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_k} + A\psi(x) = K^+\varphi^-(p)\,e^{i(-p_0x_0+p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3)} \tag{1.12}$$

естественно искать в виде

$$\psi(x_0, x_1, x_2, x_3) = \psi(p_0, p_1, p_2, p_3)e^{i(-p_0x_0+p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3)} \tag{1.13}$$

где величина $\psi(p_0, p_1, p_2, p_3)$ уже не зависит от x_0, x_1, x_2, x_3.

---

* Уравнения (1.6) имеют структуру уравнений открытой системы. Заметим в связи с этим, что подробное изложение теории открытых систем имеется в [3].

Подставляя функцию (1.13) в уравнение (1.12), получаем

$$\left(-L_0p_0+\sum_{\alpha=1}^{3}L_\alpha p_\alpha\right)\psi(p)+A\psi(p)=K^+\varphi^-(p).$$

Если оператор $-L_0p_0+\sum_{\alpha=1}^{3}L_\alpha p_\alpha+A$ имеет обратный, то

$$\psi(p)=R(p)\varphi^-(p),$$

где $R(p)=\left(-L_0p_0+\sum_{\alpha=1}^{3}L_\alpha p_\alpha+A\right)^{-1}$.

Нетрудно видеть, что выход $\varphi^+(x)$ будет иметь следующий вид:

$$\varphi^+(x_0,x_1,x_2,x_3)=\varphi^+(p_0,p_1,p_2,p_3)e^{i(-p_0x_0+p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3)}$$

при этом величина $\varphi^+(p_0,p_1,p_2,p_3)=\varphi^+(p)$ не зависит от x_0, x_1, x_2, x_3 и

$$\varphi^+(p)=\varphi^-(p)-iK\psi(p).$$

Можно показать, что величины $\psi(p)$ и $\varphi^+(p)$ преобразуются по закону

$$\psi(p')=u_g\psi(p),\quad \varphi^+(p)=v_g\varphi^+(p),\quad p'=gp.$$

Заметим, что величина $\varphi^+(p)$ связана с $\varphi^-(p)$ так:

$$\varphi^+(p)=\left(I-iK\left(-L_0p_0+\sum_{\alpha=1}^{3}L_\alpha p_\alpha+A\right)^{-1}K^+\right)\varphi^-(p).$$

О п р е д е л е н и е. *Оператор-функцию*

$$W(p_0,p_1,p_2,p_3)=I-iK\left(-L_0p_0+\sum_{\alpha=1}^{3}L_\alpha p_\alpha+A\right)^{-1}K^+ \qquad (1.14)$$

будем называть характеристической оператор-функцией (х.о-ф.) открытого поля (1.11) *.

Таким образом, открытое поле в случае, когда вход является плоской волной, полностью определяется отображениями

$$R(p):E\to H,\quad W(p):E\to E.$$

Решая уравнения открытого поля (1.11) для случая, когда вход является плоской волной, мы получаем совокупность операторных узлов,

$$\left(-L_0p_0+\sum_{\alpha=1}^{3}L_\alpha p_\alpha+A,\ H_{\tilde u,u},\ K,\ E_v\right),$$

где $(A, H_{\tilde u,u}, K, E_v)$ — инвариантный относительно группы Лоренца узел а $(\{L_k\}_{k=0}^{3}, H_{\tilde u,u})$ — связка.

О п р е д е л е н и е. *Совокупность операторных узлов*

$$\tau(p)=\left(-L_0p_0+\sum_{\alpha=1}^{3}L_\alpha p_\alpha+A,\ H_{\tilde u,u},\ K,\ E_v\right), \qquad (1.15)$$

где $p=(p_0,p_1,p_2,p_3)\in R^4$, будем называть инвариантным семейством операторных узлов над группой Лоренца, если $(A, H_{\tilde u,u}, K, E)$ — инвариантный относительно группы Лоренца узел, а $(\{L_k\}_{k=0}^{3}, H_{\tilde u,u})$ — связка.

Таким образом, каждому открытому полю соответствует определенное инвариантное семейство операторных узлов. Очевидно, и обратно, каждому

* В теории открытых систем оператор-функция, связывающая вход с выходом, называется передаточной.

инвариантному семейству операторных узлов (1.15) соответствует открытое поле (1.11).

Отметим, что, имея инвариантное семейство операторных узлов (1.15), мы можем независимо от понятия открытого поля рассмотреть оператор-функцию (1.14). В этом случае функцию (1.14) будем называть [*х. о-ф.*] *инвариантного семейства операторных узлов.*

Замечание. На инвариантные семейства узлов переносятся все определения, относящиеся к инвариантным узлам. Так, например, оператор A инвариантного семейства узлов (1.15) будем называть *основным*, а оператор K — *каналовым.*

2. Разложение инвариантного семейства узлов

1. Пусть

$$\tau_i(p) = \Big(-\mathbb{L}_0^{(i)} p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} \mathbb{L}_\alpha^{(i)} p_\alpha + A_i,\ H_{\tilde{u}^{(i)},\,u^{(i)}}^{(i)},\ K_i,\ E_v\Big) \qquad (i = 1,2)$$

два инвариантных семейства операторных узлов. Обозначим через P_1 и P_2 проекторы на $H^{(1)}$ и $H^{(2)}$ в пространстве $H = H^{(1)} \oplus H^{(2)}$. Итак, P_1 проектирует на $H^{(1)}$ параллельно $H^{(2)}$, а P_2 проектирует на $H^{(2)}$ параллельно $H^{(1)}$.

Рассмотрим совокупность узлов $\tau(p) = \big(-\mathbb{L}_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} \mathbb{L}_\alpha p_\alpha + A,\ H_{\tilde{u},\,u},\ K,\ E_v\big)$, где

$$\begin{gathered} \mathbb{L}_j = \mathbb{L}_j^{(1)} P_1 + \mathbb{L}_j^{(2)} P_2 \ \ (j = 0,\ 1,\ 2,\ 3), \\ A = A_1 P_1 + A_2 P_2 + i K_1^{+} K_2 P_2,\ \ K = K_1 P_1 + K_2 P_2, \\ \tilde{u}_g = \tilde{u}_g^{(1)} P_1 + \tilde{u}_g^{(2)} P_2,\ \ u_g = u_g^{(1)} P_1 + u_g^{(2)} P_2. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Совокупность узлов $\tau(p)$ является, очевидно, инвариантным семейством узлов. Семейство узлов $\tau(p)$ будем называть *сцеплением* семейств узлов $\tau_1(p)$ и $\tau_2(p)$ и писать

$$\tau(p) = \tau_1(p) \vee \tau_2(p).$$

Непосредственная проверка показывает, что справедлива формула

$$(\tau_1(p) \vee \tau_2(p)) \vee \tau_3(p) = \tau_1(p) \vee (\tau_2(p) \vee \tau_3(p)).$$

Пусть $\tau(p) = \big(-\mathbb{L}_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} \mathbb{L}_\alpha p_\alpha + A,\ \ H_{\tilde{u},\,u},\ \ K,\ \ E_v\big)$ — инвариантное семейство узлов и невырожденное подпространство H' осуществляет распад связки $(\{\mathbb{L}_k\}_{k=0}^{3},\ H_{\tilde{u},\,u})$, т. е. приводит операторы $\{\mathbb{L}_k\}_{k=0}^{3}$ и разлагает бимодуль $H_{\tilde{u},\,u}$. Обозначим через P' оператор проектирования на H' параллельно $H \ominus H'$ и рассмотрим совокупность узлов

$$\tau'(p) = \Big(-\mathbb{L}_0' p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} \mathbb{L}_\alpha' p_\alpha + A',\ H_{\tilde{u}',\,u'}^{\prime},\ K',\ E_v\Big),$$

где $\mathbb{L}_j' = \mathbb{L}_{j|H'}$ $(j = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ $A' = P' A_{|H'}$, $K' = K_{|H'}$, $\tilde{u}_g' = \tilde{u}_{g|H'}$, $u_g' = u_{g|H'}$. Очевидно, совокупность узлов $\tau'(p)$ является инвариантным семейством узлов. Семейство узлов $\tau'(p)$ будем называть *проекцией* семейства узлов $\tau(p)$ на подпространство H' и писать $\tau'(p) = \mathrm{pr}_{H'}\,\tau(p)$.

Если $\tau_i(p) = \big(-\mathbb{L}_0^{(i)} p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} \mathbb{L}_\alpha^{(i)} p_\alpha + A_i,\ H_{\tilde{u}^{(i)},\,u^{(i)}}^{(i)},\ K_i,\ E_v\big)$ $(i = 1,\ 2)$ — два инвариантных семейства узлов и $\tau(p) = \tau_1(p) \vee \tau_2(p) = \big(-\mathbb{L}_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} \mathbb{L}_\alpha p_\alpha + A,\ H_{\tilde{u},\,u},\ K,\ E_v\big)$, то, как следует из формул (2.1), семейства узлов $\tau_1(p)$ и $\tau_2(p)$ являются проекциями инвариантного семейства узлов

$\tau(p)$ соответственно на $H^{(1)}$ и $H^{(2)}$, причем $H^{(1)}$ инвариантно относительно A. Обратно, каждое инвариантное семейство узлов $\tau(p) = (-L_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} L_\alpha p_\alpha + A,\ H_{\tilde{u},u},\ K,\ E_v)$ представляет собой сцепление своих проекций $\tau_1(p) = (-L_0^{(1)} p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} L_\alpha^{(1)} p_\alpha + A_1\ H^{(1)}_{\tilde{u}^{(1)},u^{(1)}},\ K_1,\ E_v)$ и $\tau_2(p) = (-L_0^{(2)} p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} L_\alpha^{(2)} p_\alpha + A_2,\ H^{(2)}_{\tilde{u}^{(2)},u^{(2)}},\ K_2,\ E_v)$ на инвариантное относительно A подпространство $H^{(1)}$, осуществляющее распад связки $(\{L_k\}_{k=0}^{3},\ H_{\tilde{u},u})$ и его ортогональное дополнение $H^{(2)}$.

Определение. *Инвариантное семейство узлов будем называть разложимым, если его можно представить в виде сцепления инвариантных семейств операторных узлов.*

2. Пусть $F_i\ (i = 1,\ 2,\ 3)$ — открытые поля, причем полю F_i соответствует инвариантное семейство операторных узлов $\tau_i(p) = (-L_0^{(i)} p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} L_\alpha^{(i)} p_\alpha + A_i,\ H^{(i)}_{\tilde{u}^{(i)},u^{(i)}},\ K_i,\ E_v)$.

Пусть далее поле F_i в случае, когда вход является плоской волной, определяется парой отображений

$$R_i(p): E \to H^{(i)},\quad W_i(p): E \to E.$$

Определение. *Будем говорить, что поле F_1 является сцеплением полей F_2 и F_3 и писать*

$$F_1 = F_2 \vee F_3,$$

если

$$H^{(1)} = H^{(2)} \oplus H^{(3)},\quad L_k^{(1)} = L_k^{(2)} P_2 + L_k^{(3)} P_3\ (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3),$$
$$\tilde{u}_g^{(1)} = \tilde{u}_g^{(2)} P_2 + \tilde{u}_g^{(3)} P_3,\quad u_g^{(1)} = u_g^{(2)} P_2 + u_g^{(3)} P_3,$$
$$R_1(p) = R_2(p) + R_3(p) W_2(p),$$
$$W_1(p) = W_3(p) W_2(p),$$

где P_i — *оператор проектирования в $H^{(1)}$ на $H^{(i)}$ параллельно $H^{(j)}$* $(i,\ j = 1,\ 2;\ i \neq j)$.

Как и в теории открытых систем*, можно доказать следующее утверждение.

Теорема (2.1). *Пусть F — открытое поле, которому соответствует инвариантное семейство узлов $\tau(p)$. Если семейство узлов $\tau(p)$ допускает разложение на инвариантные семейства узлов $\tau_1(p)$ и $\tau_2(p)$:*

$$\tau(p) = \tau_1(p) \vee \tau_2(p),$$

то

$$F = F_2 \vee F_1,$$

где F_i — открытое поле, соответствующее семейству узлов $\tau_i(p)$.

3. Вейлевские семейства операторных узлов. Разложение вейлевского семейства узлов на неразложимые

1. Пусть $\{\sigma_k\}_{k=0}^{3}$ — так называемые матрицы Паули, т. е.

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

* См., например, [3].

Матрицы Паули удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{k=0}^{3} g_{jk}\,\tilde{c}_g\,\sigma_k\,c_g^{-1} = \sigma_j \quad (j = 0,\ 1,\ 2,\ 3),$$

где $\tilde{c}: g \to \tilde{c}_g$ и $c: g \to c_g$ — представления собственной группы Лоренца, определяемые соответственно парами $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, т. е. $\tilde{c}_g^* = c_g^{-1}$ [2]. Таким образом, совокупность $(\{\sigma_k\}_{k=0}^3, M_{\tilde{c}, c})$, где M — двумерное унитарное пространство, является связкой.

Введем в рассмотрение матрицы $\{\tilde{\sigma}_k\}_{k=0}^3 : \tilde{\sigma}_0 = \sigma_0$, $\tilde{\sigma}_\alpha = -\sigma_\alpha\,(\alpha = 1,\ 2,\ 3)$. Известно, что матрицы $\{\tilde{\sigma}_k\}_{k=0}^3$ удовлетворяют формулам $\sum_{k=0}^{3} g_{jk}\,c_g\,\tilde{\sigma}_k\,\tilde{c}_g^{-1} = \tilde{\sigma}_j$ $(j = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ [2], т. е. совокупность $(\{\tilde{\sigma}_k\}_{k=0}^3, M_{c, \tilde{c}})$, где M — двумерное унитарное пространство, является связкой.

Рассмотрим теперь в унитарном пространстве H операторы $\{N_k\}_{k=0}^3$, матрицы которых в некотором ортонормированном базисе совпадают с матрицами

$$\begin{pmatrix} \underbrace{\sigma_k \ \cdots \ \sigma_k}_{n} & \\ & \underbrace{\tilde{\sigma}_k \ \cdots \ \tilde{\sigma}_k}_{m} \end{pmatrix} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{3.1}$$

Условимся называть ортонормированный базис пространства H, в котором матрицы операторов $\{N_k\}_{k=0}^3$ имеют вид (3.1), *каноническим*.

Определим в H представления $\tilde{u}: g \to \tilde{u}_g$, $u: g \to u_g$ собственной группы Лоренца, положив в каноническом базисе:

$$\tilde{u}_g = \begin{pmatrix} \underbrace{c_q^{*-1} \ \cdots \ c_q^{*-1}}_{n} & \\ & \underbrace{c_q \ \cdots \ c_q}_{m} \end{pmatrix}, \quad u_g = \begin{pmatrix} \underbrace{c_q \ \cdots \ c_q}_{n} & \\ & \underbrace{c_q^{*-1} \ \cdots \ c_q^{*-1}}_{m} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Очевидно, совокупность $(\{N_k\}_{k=0}^3, H_{\tilde{u}, u})$ является связкой.

Определение. *Инвариантное семейство узлов* $\tau(p) = \left(-N_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} N_\alpha p_\alpha + A,\ H_{\tilde{u}, u},\ K,\ E_v\right)$, *где H — унитарное пространство, а операторы N_k, $\tilde{u}_g$, u_g определены в некотором ортонормированном базисе при помощи формул (3.1) и (3.2), будем называть вейлевским.*

2. В этом пункте будут описаны неразложимые вейлевские семейства узлов и будет указан способ разложения произвольного вейлевского семейства узлов на неразложимые. Отметим вначале без доказательства следующее простое утверждение.

Лемма (3.1). *Внутренние представления $g \to \tilde{u}_g$, $g \to u_g$ для вейлевского семейства узлов нормальны, их инвариантные подпространства совпадают и приводят операторы $\{N_k\}_{k=0}^3$.*

Из леммы (3.1) непосредственно следует

Теорема (3.1). *Вейлевское семейство узлов* $\tau(p) = (-N_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} N_\alpha p_\alpha + A,\ H_{\tilde{u},u},\ K,\ E_v)$ *разложимо тогда и только тогда, когда инвариантный узел* $(A,\ H_{\tilde{u},u},\ K,\ E_v)$ *разлагается на инвариантные узлы.*

Пусть $\tau(p) = (-N_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} N_\alpha p_\alpha + A,\ H_{\tilde{u},u},\ K,\ E_v)$ — неразложимое вейлевское семейство узлов. Предположим вначале, что $\operatorname{Ker} A \neq 0$. Нетрудно видеть, что в этом случае $A = 0$ и представления $g \to \tilde{u}_g$, $g \to u_g$ не имеют общего инвариантного подпространства, отличного от нулевого и всего H. Очевидно, это возможно, когда в выражении (3.2) либо $n = 1$, $m = 0$, либо $n = 0$, $m = 1$. В первом случае

$$\tau(p) = (-\sigma_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} \sigma_\alpha p_\alpha,\ H_{\tilde{u},u},\ K,\ E_v),$$

при этом $\tilde{u}_g = c_g^{*-1}$, $u_g = c_g$; во втором случае

$$\tau(p) = (-\tilde{\sigma}_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} \tilde{\sigma}_\alpha p_\alpha,\ H_{\tilde{u},u},\ K,\ E_v),$$

причем $\tilde{u}_g = c_g$, $u_g = c_g^{*-1}$. Кроме того, как легко видеть, в обоих случаях либо $\Delta_{K^+} = 0$, либо $\Delta_{K^+} = H$. Следовательно, доказана

Теорема (3.2). *Пусть* $\tau(p) = (-N_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} N_\alpha p_\alpha + A,\ H_{\tilde{u},u},\ K,\ E_v)$ *— неразложимое вейлевское семейство узлов и* $\operatorname{Ker} A \neq 0$. *Тогда* $A = 0$ *и возможны два случая:*

$$1)\ \tau(p) = (-\sigma_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} \sigma_\alpha p_\alpha,\ H_{\tilde{u},u},\ K,\ E_v),\ \tilde{u}_g = c_g^{*-1},\ u_g = c_g;$$

$$2)\ \tau(p) = (-\tilde{\sigma}_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} \tilde{\sigma}_\alpha p_\alpha,\ H_{\tilde{u},u},\ K,\ E_v),\ \tilde{u}_g = c_g,\ u_g = c_g^{*-1}.$$

Кроме того, в обоих случаях либо каналовое подпространство равно нулю, либо совпадает со всем H.

Пусть теперь A — невырожденный оператор. Из (1.8) следует, что в этом случае представления $g \to \tilde{u}_g$ и $g \to u_g$ эквивалентны. Это, очевидно, может быть лишь при $n = m$. Но тогда эти представления унитарно эквивалентны, а именно,

$$\tilde{u}_g = U u_g U^{-1},\ U^* = U^{-1}, \tag{3.3}$$

при этом матрица оператора в каноническом базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \underbrace{\begin{matrix} I & & \\ & \ddots & \\ & & I \end{matrix}}_{n} \\ \underbrace{\begin{matrix} I & & \\ & \ddots & \\ & & I \end{matrix}}_{n} & 0 \end{pmatrix}$$

Как следует из результатов, полученных в [1], в данном случае $A = \lambda B$, $B^2 = I$ и оператор B не имеет с представлением $g \to u_g$ общего инва риантного подпространства отличного от нулевого и всего H. Из (1.8) и (3.3) получаем $u_g U^{-1} A = U^{-1} A u_g$, т. е.

$$u_g C = C u_g, \quad C = U^{-1} B. \tag{3.4}$$

Так как $B = UC$, $B = B^{-1}$, то $UC = C^{-1} U^{-1}$. Следовательно,

$$C = U C^{-1} U^{-1}. \tag{3.5}$$

Представим теперь пространство H в виде $H = H_1 \oplus H_2$, где H_1 — инвариантное относительно u_g подпространство, на котором представление $g \to u_g$ является n-кратной ортогональной суммой представлений $g \to c_g$. Очевидно, на H_2 представление $g \to u_g$ разлагается в n-кратную ортогональную сумму представлений $g \to c_g^{*-1}$. Кроме того,

$$UH_1 = H_2, \quad UH_2 = H_1. \tag{3.6}$$

Пусть P_i — ортопроектор на H_i $(i = 1, 2)$. Из (3.4) видно, что H_i инвариантно относительно C. Таким образом, $C = C_1 P_1 + C_2 P_2$, где C_i — сужение оператора C на H_i. Из (3.5) получаем $C_2 = U C_1^{-1} U^{-1}$, т. е.

$$C = C_1 P_1 + U C_1^{-1} U^{-1} P_2. \tag{3.7}$$

Пусть μ — одно из собственных значений оператора C_1 и $\widetilde{M}_\mu$ — соответствующее собственное подпространство. Из (3.4) следует, что $\widetilde{M}_\mu$ инвариантно относительно u_g. Выберем в M_μ одно из инвариантных относительно u_g подпространств, на котором представление $g \to u_g$ неприводимо. Обозначим его M_μ. Очевидно, $\dim M_\mu = 2$ и представление $g \to u_g$ на M_μ эквивалентно представлению $g \to c_g$. Из (3.3) видно, что UM_μ инвариантно относительно представления $g \to \tilde{u}_g$, а так как инвариантные подпространства у представлений $g \to \tilde{u}_g$ и $g \to u_g$ совпадают, то UM_μ инвариантно и относительно u_g. Далее, так как $C_2 = U C_1^{-1} U^{-1}$, то UM_μ инвариантно относительно C_2 и

$$C_{2|UM_\mu} = \frac{1}{\mu} I.$$

Обозначим поэтому UM_μ через $M_{\frac{1}{\mu}}$. Таким образом, подпространство $M_\mu \oplus M_{\frac{1}{\mu}}$ инвариантно относительно C, U, u_g. Следовательно, $M_\mu \oplus M_{\frac{1}{\mu}}$ инвариантно и относительно $B = UC$. Так как оператор B и представление $g \to u_g$ не имеют общих инвариантных подпространств, отличных от нулевого и всего H, то

$$H = M_\mu \oplus M_{\frac{1}{\mu}}.$$

То есть $M_\mu = H_1$, $M_{\frac{1}{\mu}} = H_2$. Это значит, что $n = m = 1$. Следовательно в каноническом базисе

$$C = \begin{pmatrix} \mu I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} I \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\mu} I \\ \mu I & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \lambda B = \lambda \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\mu} I \\ \mu I & 0 \end{pmatrix},$$

$$u_g = \begin{pmatrix} c_g^{*-1} & 0 \\ 0 & c_g \end{pmatrix}, \quad u_g = \begin{pmatrix} c_g & 0 \\ 0 & c_g^{*-1} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что допустимыми подпространствами в данном случае являются 0, M_μ, $M_{\frac{1}{\mu}}$, H. Легко проверить, что либо $A - A^* = 0$, либо $A - A^*$ — невырожденный оператор. Значит, если $A - A^* = 0$, то каналовыми подпространствами могут быть 0, M_μ, $M_{\frac{1}{\mu}}$, H, если же $A - A^*$ — невырожденный оператор, то каналовое подпространство совпадает со всем H.

Итак доказана

Теорема (3.3). *Пусть* $\tau(p) = (-N_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} N_\alpha p_\alpha + A,\ H_{\tilde{u},u},\ K,\ E_v)$ — *неразложимое вейлевское семейство узлов, основной оператор которого невырожден. Тогда в каноническом базисе пространства* H:

$$N_k = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3),\quad A = \lambda \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\mu} I \\ \mu I & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{u}_g = \begin{pmatrix} c_g^{*-1} & 0 \\ 0 & c_g \end{pmatrix},\quad u_g = \begin{pmatrix} c_g & 0 \\ 0 & c_g^{*-1} \end{pmatrix}.$$

Кроме того, если $A - A^* = 0$, *то каналовыми подпространствами могут быть* 0, M_μ, $M_{\frac{1}{\mu}}$, H, *если же* $A \neq A^*$, *то* $A - A^*$ — *невырожденный оператор и в этом случае каналовое подпространство совпадает со всем* H.

Укажем теперь способ разложения произвольного вейлевского семейства узлов на неразложимые.

Пусть вначале $\tau(p) = (-N_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} N_\alpha p_\alpha,\ H_{\tilde{u},u},\ K,\ E_v)$ — произвольное вейлевское семейство узлов, основной оператор которого равен нулю. В каноническом базисе $\{e_i\}_{i=1}^{2r}$ операторы $\{N_k\}_{k=0}^{3}$ имеют вид (3.1), а операторы $\tilde{u}_g$ и u_g задаются выражениями (3.2), при этом $r = n + m$. Пусть H_s ($s = 1, \ldots, r$) — подпространства, натянутые соответственно на векторы (e_{2s-1}, e_{2s}). Очевидно, каждое H_s осуществляет распад связки $(\{N_k\}_{k=0}^{3}, H_{\tilde{u},u})$, т. е. можно рассмотреть вейлевские семейства узлов $\tau_s(p) = \mathrm{pr}_{H_s} \tau(p)$ $(s = 1, 2, \ldots, r)$. Нетрудно видеть, что семейства узлов $\tau_s(p)$ неразложимы и имеют вид вейлевских семейств, описанных в теореме (3.2), при этом

$$\tau(p) = \tau_1(p) \vee \tau_2(p) \vee \ldots \vee \tau_r(p).$$

Пусть теперь $\tau(p) = (-N_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} N_\alpha p_\alpha + A,\ H_{\tilde{u},u},\ K,\ E_v)$ — произвольное вейлевское семейство узлов, основной оператор которого невырожден. В этом случае мы воспользуемся следующей леммой.

Лемма (3.2). *Если* $\tau(p) = (-N_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} N_\alpha p_\alpha + A,\ H_{\tilde{u},u},\ K,\ E_v)$ — *вейлевское семейство узлов, то*

$$u_g A^2 = A^2 u_g.$$

Пусть λ — собственное значение оператора A. Тогда $\nu = \lambda^2$ — собственное значение A^2. Пусть Q'_ν — соответствующее собственное подпространство оператора A^2. Из леммы (3.2) следует, что Q'_ν инвариантно относительно u_g. Выберем в Q'_ν произвольное инвариантное относительно u_g подпространство, представление $g \to u_g$ на котором неприводимо. Обозначим его через $Q_\nu^{(1)}$.

Пусть, наконец, $Q_\nu^{(2)} = AQ_\nu^{(1)}$. Подпространство $Q_\nu = Q_\nu^{(1)} \oplus Q_\nu^{(2)}$, очевидно, инвариантно относительно оператора A и осуществляет распад связки $(\{N_k\}_{k=0}^{3}, H_{\widetilde{u}, u})$. Следовательно,

$$\tau(p) = \mathrm{pr}_{Q_\nu} \tau(p) \vee \mathrm{pr}_{H \ominus_\nu Q_\nu} \tau(p),$$

при этом $\mathrm{pr}_{Q_\nu} \tau(p)$ — неразложимое вейлевское семейство узлов того типа, который указан в теореме (3.3). Так как основной оператор вейлевского семейства узлов $\mathrm{pr}_{H \ominus Q_\nu} \tau(p)$, очевидно, невырожден, то указанным способом можно продолжить разложение дальше. При таком разложении будут получены неразложимые вейлевские семейства узлов, описанные в теореме (3.3).

Пусть, наконец, $\tau(p) = (-N_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} N_\alpha p_\alpha + A, \ H_{\widetilde{u}, u}, \ K, \ E_v)$ — произвольное вейлевское семейство узлов. Если $\mathrm{Ker}\, A = 0$, то способ разложения этого семейства узлов на неразложимые указан выше. Пусть $\mathrm{Ker}\, A \neq 0$. Тогда $\mathrm{Ker}\, A$ осуществляет распад связки $(\{N_k\}_{k=0}^{3}, \ H_{\widetilde{u}, u})$. Следовательно,

$$\tau(p) = \mathrm{pr}_M \tau(p) \vee \mathrm{pr}_{H \ominus M} \tau(p),$$

где $M = \mathrm{Ker}\, A$. Будем говорить, что вейлевское семейство узлов $\tau'(p) = \mathrm{pr}_{H \ominus M} \tau(p)$ получено *отщеплением ядра* от вейлевского семейства $\tau(p)$. Основной оператор вейлевского семейства узлов $\mathrm{pr}_M \tau(p)$ равен нулю. Способ разложения подобного вейлевского семейства узлов на неразложимые был указан выше. Рассмотрим поэтому вейлевское семейство узлов $\tau'(p)$. Если основной оператор этого семейства узлов невырожден, то мы находимся в ситуации рассмотренной выше. Если же он вырожден, то производим отщепление ядра и продолжаем процесс разложения дальше.

Очевидно, при разложении произвольного вейлевского семейства узлов на неразложимые возможны следующие три случая.

α) *Спектр основного оператора сосредоточен в нуле.* В этом случае вейлевское семейство узлов разложится на неразложимые семейства узлов, вид которых описан в теореме (3.2).

β) *Спектр основного оператора содержит кроме нулевой точки еще хотя бы одно ненулевое значение.* В этом случае вейлевское семейство узлов разложится на неразложимые семейства узлов, описанные как в теореме (3.2), так и в теореме (3.3).

γ) *Основной оператор невырожден.* В этом случае вейлевское семейство узлов разлагается на неразложимые вейлевские семейства узлов, описанные в теореме (3.3).

Одновременно доказана

Теорема (3.4). *Пусть* $\tau(p) = (-N_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} N_\alpha p_\alpha + A, \ H_{\widetilde{u}, u}, K, E_v)$ — *произвольное вейлевское семейство узлов. Тогда типы неразложимых вейлевских семейств узлов, на которые разлагается семейство узлов* $\tau(p)$, *определяются по спектру оператора* A.

Заметим, что из рассуждений, проведенных выше, следует

Теорема (3.5). *Пусть* A *— основной оператор вейлевского семейства узлов* $\tau(p)$. *Тогда каждое собственное значение оператора* A *является собственным значением четной кратности, при этом с каждым значением* λ *в спектр оператора* A *входит и* $-\lambda$.

Определение. *Вейлевским открытым полем будем называть открытое поле, соответствующее вейлевскому семейству операторных узлов.*

Замечание. Вейлевские открытые поля можно рассматривать как поля взаимодействующих нейтрино и антинейтрино. В подобной интерпретации основной результат этого параграфа говорит о том, что открытое поле взаимодействующих нейтрино и антинейтрино разлагается в цепочку неразложимы открытых полей, описывающих соответственно либо открытое поле нейтрино либо открытое поле антинейтрино, либо открытое поле пары сцепленны нейтрино и антинейтрино.

4. Вейлевские семейства операторных узлов, инвариантные относительно отражения пространственных координат

Пусть уравнения

$$\begin{cases} \frac{1}{i}\sum_{k=0}^{3} N_k \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_k} + A\psi(x) = K^+\varphi^-(x), \\ \varphi^+(x) = \varphi^-(x) - iK\psi(x) \end{cases} \tag{4.1}$$

определяют вейлевское открытое поле, которому соответствует семейство узлов $\tau(p) = (-N_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} N_\alpha p_\alpha + A,\ H_{\tilde{u},u},\ K,\ E_v)$.

Обозначим через s матрицу, соответствующую отражению пространственных координат, т. е.

$$s = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Добавляя к собственной группе Лоренца G_+ матрицу s, получим группу Лоренца G. Пусть S — оператор, обладающий тем свойством, что соответствие $g \to w_g$, $g \in G$, где

$$\left.\begin{aligned} w_{g_+} &= u_{g_+}, \\ w_g &= Su_{g_+},\ g = sg_+, \end{aligned}\right\} g_+ \in G_+,$$

является представлением группы Лоренца. Очевидно, в этом случае

$$S^2 = I, \tag{4.2}$$

$$\tilde{u}_g S = Su_g. \tag{4.3}$$

Пусть $\tilde{S}$ — оператор, обладающий тем свойством, что соответствие $g \to \tilde{w}_g$, $g \in G$, где

$$\left.\begin{aligned} \tilde{w}_{g_+} &= \tilde{u}_{g_+}, \\ \tilde{w}_g &= \tilde{S}\tilde{u}_{g_+},\ g = sg_+, \end{aligned}\right\} g_+ \in G_+,$$

является представлением группы Лоренца.

Уравнения (4.1) будут, очевидно, инвариантны относительно отражения пространственных координат (группы Лоренца) в том и только в том случае, когда

$$\tilde{S}N_0 = N_0 S,\quad \tilde{S}N_\alpha = -N_\alpha S\,(\alpha = 1, 2, 3), \tag{4.4}$$

$$\tilde{S}A = AS, \tag{4.5}$$

$$\tilde{S}K^+ = K^+Q, \tag{4.6}$$

$$QK = KS, \tag{4.7}$$

при этом оператор Q обладает тем свойством, что соответствие $g \to \tilde{v}_g$, $g \in G$, где

$$\left.\begin{aligned} \tilde{v}_{g_+} &= v_{g_+}, \\ \tilde{v}_g &= Qv_{g_+},\ g = sg_+, \end{aligned}\right\} g_+ \in G_+,$$

является представлением группы Лоренца в E.

Так как $N_0 = I$, то из (4.4) получаем

$$\tilde{S} = S. \tag{4.8}$$

Далее, для того, чтобы представления $g \to w_g$, $g \to \tilde{w}_g$ удовлетворяли условию (1.4), необходимо и достаточно, чтобы $\tilde{S}^* = S^{-1}$. Следовательно,

$$S = S^* = S^{-1}. \tag{4.9}$$

В дальнейшем вейлевское семейство узлов, инвариантное относительно группы Лоренца, будем обозначать следующим образом:

$$\left(-N_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} N_\alpha p_\alpha + A,\ H_{\tilde{u}, u, S},\ K,\ E_{v, Q}\right),$$

где S и Q — операторы, входящие в соотношения (4.4) — (4.9).

Из (4.4)—(4.9) непосредственно следует

Теорема (4.1). *Пусть* $\tau(p) = \left(-N_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} N_\alpha p_\alpha + A, H_{\tilde{u}, u, S}, K, E_{v, Q}\right)$ — *неразложимое относительно группы Лоренца вейлевское семейство узлов. Тогда, если* $\operatorname{Ker} A \neq 0$, то $A = 0$ *и в каноническом базисе пространства* H

$$N_k = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}_k \end{pmatrix} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3),$$

$$u_g = \begin{pmatrix} c_g & 0 \\ 0 & c_g^{*-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{u}_g = \begin{pmatrix} c_g^{*-1} & 0 \\ 0 & c_g \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

при этом либо $\Delta_{K^+} = 0$, *либо* $\Delta_{K^+} = H$.

Докажем теперь следующее утверждение.

Теорема (4.2). *Пусть* $\tau(p) = \left(-N_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} N_\alpha P_\alpha + A, H_{\tilde{u}, u, S}, K, E_{v, Q}\right)$ — *неразложимое относительно группы Лоренца вейлевское семейство узлов. Тогда, если* $\operatorname{Ker} A = 0$, *то в каноническом базисе пространства* H

$$N_k = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}_k \end{pmatrix} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3), \quad A = \lambda \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{u}_g = \begin{pmatrix} c_g^{*-1} & 0 \\ 0 & c_g \end{pmatrix}, \quad u_g = \begin{pmatrix} c_g & 0 \\ 0 & c_g^{*-1} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

при этом либо $\Delta_{K^+} = 0$, *либо* $\Delta_{K^+} = H$.

Доказательство. Используя соотношение (4.5) и учитывая, что $\tilde{S} = S$, можно показать, что семейство $\tau(p)$ имеет вид вейлевского семейства узлов, описанного в теореме (3.3), при этом в каноническом базисе пространства H

$$A = \lambda \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\mu} I \\ \mu I & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя соотношение (4.5) еще раз, получим $\mu = 1$.

5. Вейлевские семейства узлов, инвариантные относительно обращения времени

Пусть уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{1}{i} \displaystyle\sum_{k=0}^{3} N_k \dfrac{\partial \psi(x)}{\partial x_k} + A\psi(x) = K^+ \varphi^-(x), \\ \varphi^+(x) = \varphi^-(x) - iK\psi(x) \end{cases} \tag{5.1}$$

определяют вейлевское открытое поле, которому соответствует семейство узлов $\tau(p) = \left(-N_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} N_\alpha p_\alpha + A,\ H_{\tilde{u},\,u},\ K,\ E_v\right)$.

Обозначим через t матрицу, соответствующую обращению времени, т. е.

$$t = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Добавляя к собственной группе Лоренца G_+ матрицу t, получим группу $\tilde{G}$. Пусть T — антиунитарный оператор, обладающий тем свойством, что соответствие $g \to w_g$, $g \in \tilde{G}$, где

$$\left.\begin{aligned} w_{g_+} &= u_{g_+}, \\ w_g &= T u_{g_+},\ g = t g_+, \end{aligned}\right\} g_+ \in G_+,$$

является представлением* группы $\tilde{G}$. Очевидно, в этом случае

$$T^2 = \pm I, \tag{5.2}$$

$$\tilde{u}_g T = T u_g. \tag{5.3}$$

Учитывая (5.3), можно показать, что

$$T^2 = -I.$$

Пусть теперь $\tilde{T}$ — антиунитарный оператор, обладающий тем свойством, что соответствие $g \to \tilde{w}_g$, $g \in \tilde{G}$, где

$$\left.\begin{aligned} \tilde{w}_{g_+} &= \tilde{u}_{g_+}, \\ \tilde{w}_g &= \tilde{T} u_{g_+},\ g = t g_+, \end{aligned}\right\} g_+ \in G_+,$$

является представлением группы $\tilde{G}$.

Уравнения (5.1) будут, очевидно, инвариантны относительно обращения времени (группы $\tilde{G}$) в том и только в том случае, когда

$$\tilde{T} N_0 = N_0 T,\quad \tilde{T} N_\alpha = -N_\alpha T\ (\alpha = 1, 2, 3), \tag{5.4}$$

$$\tilde{T} A = A T, \tag{5.5}$$

$$\tilde{T} K^+ = K^+ R, \tag{5.6}$$

$$R K = -K T, \tag{5.7}$$

где R — антилинейный оператор, обладающий тем свойством, что соответствие $g \to \tilde{v}_g$, $g \in \tilde{G}$, где

$$\left.\begin{aligned} \tilde{v}_{g_+} &+ v_{g_+}, \\ \tilde{v}_g &= R v_{g_+},\ g = t g_+, \end{aligned}\right\} g_+ \in G_+,$$

является представлением группы $\tilde{G}$ в E.

Так как $N_0 = I$, то из (5.4) получаем

$$\tilde{T} = T. \tag{5.8}$$

В дальнейшем вейлевское семейство узлов, инвариантное относительно группы $\tilde{G}$, будем обозначать так:

$$\left(-N_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} N_\alpha p_\alpha + A,\ H_{\tilde{u},\,u,\,T},\ K,\ E_{v,\,R}\right),$$

где T и R — операторы, входящие в соотношения (5.4)—(5.8).

* Стоит отметить, что это представление уже не является линейным.

Используя свойства оператора T, можно показать, что справедлива

Теорема (5.1). *Пусть* $\tau(p) = \left(-N_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} N_\alpha p_\alpha + A,\ H_{\tilde{u},\,u,\,T},\ K,\ E_{v,\,R}\right)$ — *неразложимое относительно группы* $\tilde{G}$ *вейлевское семейство узлов. Тогда, если* $\operatorname{Ker} A \neq 0$, то $A = 0$ *и возможны два случая:*

$$1)\ \tau(p) = \left(-\sigma_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} \sigma_\alpha p_\alpha,\ H_{\tilde{u},\,u,\,T},\ K,\ E_{v,\,R}\right),\ \tilde{u}_g = c_g^{*-1},\ u_g = c_g;$$

$$2)\ \tau(p) = \left(-\tilde{\sigma}_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} \tilde{\sigma}_\alpha p_\alpha,\ H_{\tilde{u},\,u,\,T},\ K,\ E_{v,\,R}\right),\ \tilde{u}_g = c_g,\ u_g = c_g^{*-1},$$

при этом в обоих случаях

$$T = \sigma_2 L,$$

где оператор L *в каноническом базисе определяется следующим образом:*

$$L\psi = \bar{\psi}$$

и Δ_K+ *либо равно нулю, либо совпадает со всем* H.

Пусть теперь $\tau(p) = \left(-N_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} N_\alpha p_\alpha + A,\ H_{\tilde{u},\,u,\,T},\ K,\ E_{v,\,R}\right)$ — неразложимое относительно группы $\tilde{G}$ вейлевское семейство узлов и $\operatorname{Ker} A = 0$. Предположим, что у оператора A имеется собственное значение $\lambda = p + iq$, причем $p \neq 0$, $q \neq 0$. Обозначим через M_{λ^2} собственное подпространство оператора A^2, соответствующее собственному значению λ^2. Из леммы (3.2) следует, что M_{λ^2} инвариантно относительно представления $g \to u_g$. Выберем в M_{λ^2} инвариантное относительно u_g подпространство $M_{\lambda^2}^{(1)}$, на котором представление $g \to u_g$ неприводимо. Так как $TA^2 = A^2 T$ и T — антиунитарный оператор, то $TM_{\lambda^2} = M_{\bar{\lambda}^2}$, где $M_{\bar{\lambda}^2}$ — собственное подпространство оператора A, соответствующее собственному значению $\bar{\lambda}^2$. Введем в рассмотрение подпространства

$$M_{\lambda^2}^{(2)} = AM_{\lambda^2}^{(1)},\ M_{\bar{\lambda}^2}^{(1)} = TM_{\lambda^2}^{(1)},\ M_{\bar{\lambda}^2}^{(2)} = AM_{\bar{\lambda}^2}^{(1)}.$$

Из (5.5), учитывая, что $\tilde{T} = T$, находим

$$TM_{\lambda^2}^{(2)} = M_{\bar{\lambda}^2}^{(2)}.$$

Таким образом, коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} M_{\lambda^2}^{(1)} & \xrightarrow{T} & M_{\bar{\lambda}^2}^{(1)} \\ A\downarrow & & \downarrow A \\ M_{\lambda^2}^{(2)} & \xrightarrow{T} & M_{\bar{\lambda}^2}^{(2)} \end{array}$$

Можно показать, что подпространства $M_{\lambda^2}^{(1)}$, $M_{\bar{\lambda}^2}^{(1)}$, $M_{\lambda^2}^{(2)}$, $M_{\bar{\lambda}^2}^{(2)}$ ортогональны друг другу, а их ортогональная сумма разлагает вейлевское семейство узлов $\tau(p)$.

Из сказанного следует

Теорема (5.2). *Пусть* $\tau(p) = \left(-N_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} N_\alpha p_\alpha + A,\ H_{\tilde{u},\,u,\,T},\ K,\ E_{v,\,R}\right)$ — *неразложимое относительно группы* $\tilde{G}$ *вейлевское семейство узлов. Тогда, если у оператора* A *имеется собственное значение* $\lambda = p + iq$, *где* $p \neq 0$, $q \neq 0$, *то в каноническом базисе пространства* H *имеем*

$$N_k = \begin{pmatrix} \sigma_{k_-} & & & \\ & \sigma_k & & \\ & & \sigma_{k_{\sim}} & \\ & & & \tilde{\sigma}_k \end{pmatrix} (k = 0, 1, 2, 3), \quad u_g = \begin{pmatrix} c_g & & & \\ & c_g^{*-1} & & \\ & & c_g & \\ & & & c_g^{*-1} \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda}{\mu} I & 0 & 0 \\ \lambda\mu I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu}} I \\ 0 & 0 & \overline{\lambda\mu} I & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} L,$$

где оператор L *определяется в рассматриваемом базисе следующим образом:*

$$L\psi = \bar{\psi},$$

при этом $\Delta_{K^+} = H$.

Отметим без доказательства такое утверждение.

Теорема (5.3). *Пусть* $\tau(p) = \left(-N_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} N_\alpha p_\alpha + A,\ H_{\tilde{u}, u, T},\ K,\ E_{\tilde{\sigma}, R}\right)$ — *неразложимое относительно группы* $\tilde{G}$ *вейлевское семейство узлов. Тогда, если у оператора* A *имеется собственное значение* $\lambda = p + iq$, *где* $p = 0$, $q \neq 0$ *либо* $p \neq 0$, $q = 0$, *то в каноническом базисе пространства* H *имеем*

$$N_k = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}_k \end{pmatrix} (k = 0, 1, 2, 3), \quad u_g = \begin{pmatrix} c_g & 0 \\ 0 & c_g^{*-1} \end{pmatrix},$$

$$A = \lambda \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\mu} I \\ \mu I & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} L,$$

где $\lambda\mu = \overline{\lambda\mu}$ *и оператор* L *в каноническом базисе задается условием*

$$L\psi = \bar{\psi}.$$

при этом $\Delta_{K^+} = H$.

Так как произвольное инвариантное относительно группы $\tilde{G}$ вейлевское семейство узлов можно разложить на неразложимые, то из теорем (5.1)—(5.3) следует

Теорема (5.4). *Пусть* A — *основной оператор инвариантного относительно группы* $\tilde{G}$ *вейлевского семейства узлов. Тогда каждое собственное значение оператора* A *является собственным значением четной кратности, при этом с каждым значением* λ *в спектр оператора* A *входят* — λ, $\bar{\lambda}$, *а значит и* — $\bar{\lambda}$.

Замечание. Пусть $\tau(p)$ — вейлевское семейство узлов, инвариантное относительно отражения пространственных координат и обращения времени. В этом случае

$$TS = \pm ST. \tag{5.9}$$

Используя соотношение (5.9), нетрудно описать неразложимые вейлевские семейства узлов для этого случая.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. К. Дубовой. Инвариантные операторные узлы. «Вестник Харьковск. ун-та», серия мех.-матем. ф-та, т. 36, 1971.

2. И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро. Представления группы вращений и группы Лоренца. Физматгиз, М., 1955.

3. М. С. Лившиц. Операторы, колебания, волны. Изд-во «Наука», 1966.
4. М. А. Наймарк. Линейные представления группы Лоренца. ГИФМЛ, М., 1958.
5. М. С. Бродский. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. Изд-во «Наука», 1969.

Поступила 20 марта 1970 г.