ОЦЕНКИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ, ПРЕДСТАВИМЫХ В ВИДЕ РАЗНОСТИ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ В ШАРЕ

Л. С. Кудина

Будем придерживаться следующих обозначений:
$P, Q, X, Y, \ldots$ — точки (векторы) пространства R^n;
$|P|, |Q|, \ldots$ — их длины; O — начало координат;

σ_r — сфера $\{P : |P| = r\}$;
K_r — открытый шар $\{P : |P| < r\}$;
$\overline{K}_r$ — замкнутый шар $\{P : |P| \leqslant r\}$;
$G_r(P, Q)$ — функция Грина шара K_r;
$d\sigma_r$ — элемент площади сферы σ_r;
$S_r = \dfrac{n\pi^{n/2}r^{n-1}}{\Gamma\left(1+\dfrac{n}{2}\right)}$ — площадь сферы σ_r;

$$u^+ = \max(u, 0), \quad u^- = \max(-u, 0).$$

Пусть $u(P)$ — функция, представимая в виде

$$u(P) = u_1(P) - u_2(P), \tag{1}$$

где $u_1(P)$ и $u_2(P)$ субгармоничны в K_R, μ_1, μ_2 — распределения масс, соответствующие по теореме Рисса функциям u_1 и u_2. Мы будем предполагать, что $u_2(0) \neq \infty$. Напомним, что характеристикой функции $u(P)$ называется функция $T(r, u)$, определенная при $0 < r < R$ равенством

$$T(r, u) = \frac{1}{S_r}\int\limits_{\sigma_r} u^+(P)\,d\sigma_r + \int\limits_{K_r} G_r(Q, O)\,d\mu_2(Q).$$

Эта функция — неубывающая [2, стр. 171], поэтому существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{r\to R} T(r, u)$, который будем обозначать через $T(R, u)$.

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. *Справедливо неравенство*

$$\frac{1}{S_r}\int\limits_{\sigma_r} U(P)\,d\sigma_r(P) \leqslant C(n)\left[1+\varphi\left(\frac{r}{R}\right)\right] T(R, u), \tag{2}$$

где

$$U(P) = \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} u^+(tP), \quad P \in \overline{K}_R,$$

$C(n)$ — *положительная постоянная, зависящая только от размерности пространства,* $C(2) = 1$;

$$\varphi(t) = \ln\frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}} \quad \text{для } n \geqslant 3,$$

$$\varphi(t) = \frac{1-t}{2\pi\sqrt{t}\ln\dfrac{1}{t}}\ln\left(1+\frac{2\pi\sqrt{t}}{1-t}\right) \quad \text{для } n = 2.$$

Теорема 2. *Для любого* $N > 1$ *можно указать систему шаров* $c_k = \{P : |P - P_k| \leqslant \rho_k\}$, *такую что* $\sum\limits_k \rho_k^{n-1} < R^{n-1}/N$ *и при* $P \in K_R \setminus \bigcup\limits_k c_k$ *имеет место оценка*

$$u(P) < C(n)\,N\,T(R, u), \tag{3}$$

где $C(n)$ — *положительная постоянная, зависящая только от размерности пространства.*

Теорема 1 является обобщением следующего результата Хеймана [1].

Пусть функция $v(z)$ *субгармонична в круге* $|z| < R$ *и* $v(0) \neq \infty$. *Положим* $V(re^{i\theta}) = \sup\limits_{0<t<r} v^-(te^{i\theta})$.

Тогда имеет место неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(V(re^{i\theta})\,d\theta \leqslant \left[1+\varphi\left(\frac{r}{R}\right)\right][T(R,\ v)-v(0)],$$

где

$$\varphi(t)=\frac{1-t}{2\pi\sqrt{t}\ln\frac{1}{t}}\ln\left(1+\frac{2\pi\sqrt{t}}{1-t}\right),\quad 0<t<1.$$

Если применить теорему 1 ($n=2$) к функции $u(P)=-v(P)$ и учесть, что в силу известной теоремы [2, стр. 197] выполняется

$$T(r,\ u)=T(r,\ -u)+u(0)=T(r,\ v)-v(0), \tag{4}$$

то получим результат Хеймана.

Теорема 2 является обобщением такого результата Н. В. Говорова [4].

Пусть функция $v(z)$ субгармонична в круге $|z|<R$ и удовлетворяет условиям $v(0)\geqslant 0$, $v(z)\leqslant M$. Тогда для любого $N>1$ можно указать систему кружков $c_k=\{|z-z_k|\leqslant\rho_k\}$, такую, что $\sum\limits_k\rho_k<R/N$ и при $z\in\{|z|<R\}\setminus\bigcup\limits_k c_k$ справедлива оценка

$$v(z)>-ANM, \tag{5}$$

где $A>0$ — *абсолютная постоянная.*

Действительно, применим теорему 2 ($n=2$) к функции $u=-v$. Так как из $v(P)\leqslant M$, очевидно, следует $T(R,\ v)\leqslant M$, то в силу (4) получаем

$$T(R,\ u)=T(R,\ v)-v(0)\leqslant M-v(0)\leqslant M.$$

Поэтому из оценки (3) следует оценка (5).

Кроме того, теорема 2 является обобщением одного результата А. Ф. Гришина [5]. Этот результат мы сформулируем в конце работы; там же обсудим его связь с теоремой 2.

Доказательства теорем 1 и 2 мы проведем только для $n\geqslant 3$; случай $n=2$ рассматривается аналогично.

1. Доказательство теоремы 1

Лемма 1. Пусть X, Y — векторы на сфере σ_1, $\gamma=\gamma(X,\ Y)$ — угол между ними, $0<r<R$,

$$g(r,\ R,\ \gamma)=\sup_{0<t<R}G_R(rX,\ tY),$$

$$p(R,\ r,\ \gamma)=\frac{R^{n-1}}{n-2}\sup_{0<t<r}\frac{\partial}{\partial n}G_R(RX,\ tY)$$

($\partial/\partial n$ обозначает производную по внутренней нормали).

Тогда имеют место следующие неравенства:

$$\frac{1}{S_1}\int\limits_{\sigma_1}p(R,\ r,\ \gamma)\,d\sigma_1(Y)\leqslant C(n)\left(1+\ln\frac{R+r}{R-r}\right), \tag{6}$$

$$\frac{1}{S_1}\int\limits_{\sigma_1}g(r,\ R,\ \gamma)\,d\sigma_1(Y)\leqslant C(n)\left(1+\ln\frac{R+r}{R-r}\right)\left(\frac{1}{r^{n-2}}-\frac{1}{R^{n-2}}\right), \tag{7}$$

где $C(n)$ — положительная постоянная, зависящая только от размерности пространства.

Доказательство. Имеем

$$G_R(rX, tY) = \frac{1}{(r^2 - 2rt\cos\gamma + t^2)^{\frac{n-2}{2}}} - \frac{1}{\left(R^2 - 2rt\cos\gamma + \frac{r^2t^2}{R^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}},$$

$$\frac{1}{n-2} R^{n-1} \frac{\partial}{\partial n} G_R(RX, tY) = \frac{(R^2 - t^2) R^{n-2}}{(R^2 - 2Rt\cos\gamma + t^2)^{n/2}} = H(R, t, \gamma).$$

Докажем неравенство (6).

Функция $H(R, t, \gamma)$ — однородная нулевой степени относительно R и t, поэтому можно считать $R = 1$. Для нахождения $p(1, r, \gamma)$ исследуем производную

$$\frac{dH}{dt} = \frac{(n-2)t^3 + (4-n)t^2\cos\gamma - (n+2)t + n\cos\gamma}{(1 - 2t\cos\gamma + t^2)^{n/2+1}}.$$

Знаменатель этой дроби всегда положителен, рассмотрим числитель

$$v(t, \gamma) = (n-2)t^3 + (4-n)t^2\cos\gamma - (n+2)t + n\cos\gamma.$$

Если $\cos\gamma \leqslant 0$, то $v(t, \gamma) \leqslant 0$ и, следовательно, $p(1, r, \gamma) = H(1, 0, \gamma) = 1$. Если $\cos\gamma > 0$, то $v(t, \gamma)$ имеет на $[0, 1]$ единственный корень, который мы обозначим $t_0(\gamma)$, причем $v(t, \gamma) \geqslant 0$ при $0 \leqslant t \leqslant t_0(\gamma)$ и $v(t, \gamma) < 0$ при $t_0(\gamma) < t \leqslant 1$. Нетрудно проверить, что $(d/d\gamma)\, t_0(\gamma) < 0$ при $0 < \gamma < \pi/2$ и, следовательно, $t_0(\gamma)$ монотонно убывает. Поэтому существует единственное γ_0, $0 < \gamma_0 < \pi/2$, такое, что $t_0(\gamma_0) = r$. Очевидно

$$p(1, r, \gamma) = \begin{cases} H(1, r, \gamma), & 0 \leqslant \gamma \leqslant \gamma_0, \\ H(1, t_0(\gamma), \gamma) & \gamma_0 < \gamma < \frac{\pi}{2}; \\ 1, & \frac{\pi}{2} \leqslant \gamma \leqslant \pi. \end{cases} \tag{8}$$

Вычислим интеграл от $p(1, r, \gamma)$ по сфере σ_1, используя (8) и выбирая сферическую систему координат $(\rho, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ так, чтобы $\gamma = \theta_{n-1}$. Так как в этой системе $d\sigma_1 = \sin\theta_2 \sin^2\theta_3 \ldots \sin^{n-2}\gamma\, d\theta_1\, d\theta_2 \ldots d\gamma$, то

$$\frac{1}{S_1}\int\limits_{\sigma_1} p(1, r, \gamma)\, d\sigma_1 = \frac{1}{S_1} \int\limits_{\left\{\frac{\pi}{2} \leqslant \gamma \leqslant \pi\right\} \cap \sigma_1} d\sigma_1 + \frac{1}{S_1} \int\limits_{\left\{0 \leqslant \gamma \leqslant \frac{\pi}{2}\right\} \cap \sigma_1} H(1, r, \gamma)\, d\sigma_1 =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left\{ \int\limits_0^{\gamma_0} H(1, r, \gamma) \sin^{n-2}\gamma\, d\gamma + \int\limits_{\gamma_0}^{\pi/2} H(1, t_0(\gamma), \gamma) \sin^{n-2}\gamma\, d\gamma \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \{I_1 + I_2\}.$$

Далее имеем

$$I_1 \leqslant \sin^{n-3}\gamma_0 \int\limits_0^{\gamma_0} \frac{(1 - r^2)\sin\gamma\, d\gamma}{(1 - 2r\cos\gamma + r^2)^{n/2}} = \frac{\sin^{n-3}\gamma_0\, (1 - r^2)}{r(n-2)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{(1-r)^{n-2}} - \frac{1}{(1 - 2r\cos\gamma_0 + r^2)^{\frac{n-2}{2}}} \right\}.$$

Учитывая, что γ_0 удовлетворяет уравнению $v(r, \gamma_0) = 0$, получим

$$\cos\gamma_0 = \frac{(n+2)r-(n-2)r^3}{n-(n-4)r^2}, \quad \sin\gamma_0 = (1-r^2)\frac{\sqrt{n^2-(n-2)^2r^2}}{n-(n-4)r^2},$$

$$1-2r\cos\gamma_0+r^2 = \frac{n(1-r^2)^2}{n-(n-4)r^2}. \qquad (9$$

Поэтому имеем

$$I_1 \leqslant \frac{n}{(n-2)\,3r}\left[(1+r)^{n-2}-\left(1+\frac{4-n}{n}r^2\right)^{\frac{n-2}{2}}\right].$$

Далее, с помощью несложных оценок получаем $I_1 < (n/3)^{n-3}\,2^n$.

Переходя к интегралу I_2, запишем его в виде

$$I_2 = \int\limits_{\gamma_0}^{\pi/2}\frac{[1-t_0^2(\gamma)]\sin^{n-2}\gamma\,d\gamma}{[1-2t_0(\gamma)\cos\gamma+t_0^2(\gamma)]^{n/2}} = \int\limits_{\gamma_0}^{\pi/2}M(\gamma)\sin^{n-2}\gamma\,d\gamma.$$

Используя неравенство

$$\frac{\cos\gamma}{1+\sin\gamma} < t_0(\gamma) < \frac{\cos\gamma}{1+(\sin\gamma)/n},$$

которое легко получается из (9), найдем для функции $M(\gamma)$ оценку

$$A(n)\sin^{1-n}\gamma < M(\gamma) < 2\sin^{1-n}\gamma,$$

где $A(n) > 0$ — постоянная, зависящая от размерности пространства.

С помощью этой оценки получаем

$$\int\limits_{\gamma_0}^{\pi/2}M(\gamma)\sin^{n-2}\gamma\,d\gamma \leqslant 2\ln\operatorname{ctg}\frac{\gamma_0}{2} \leqslant 2\ln\frac{1+r}{1-r}.$$

Окончательно имеем

$$\frac{1}{S_1}\int\limits_{\sigma_1}p(1, r, \gamma)\,d\sigma_1(Y) \leqslant \frac{1}{2}+\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\times$$

$$\times\left((n/3)^{n-3}\,2^n+2\ln\frac{1+r}{1-r}\right) \leqslant C(n)\left(1+\ln\frac{1+r}{1-r}\right).$$

Переходим к доказательству неравенства (7). Для этого исследуем производную

$$\frac{\partial}{\partial t}G_R(rX, tY) = -(n-2)\times$$

$$\times\left[\frac{t-r\cos\gamma}{(r^2-2rt\cos\gamma+t^2)^{n/2}}-\frac{\frac{r^2}{R^2}t-r\cos\gamma}{\left(R^2-2rt\cos\gamma+\frac{r^2t^2}{R^2}\right)^{n/2}}\right].$$

При $\cos\gamma \leqslant 0$ имеем $\frac{\partial}{\partial t}G_R(rX, tY) \leqslant 0$, и в этом случае

$$g(r, R, \gamma) = G_R(rX, O) = \frac{1}{r^{n-2}}-\frac{1}{R^{n-2}}. \qquad (10$$

Если $\cos\gamma > 0$, то, как легко видеть, $\frac{\partial}{\partial t}G_R < 0$ при $t \geqslant r\cos\gamma$. Поэтому функция $G_R(rX, tY)$ достигает своего максимума по t при некотором $t = t_1(\gamma)$, удовлетворяющем условию $0 < t_1(\gamma) < r\cos\gamma$. Имеем

$$g(r, R, \gamma) = G_R(rX, t_1(\gamma)Y) = \left(\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{\sqrt{B}}\right)^{n-2} =$$

$$= \frac{1}{(r^2 - 2rt_1(\gamma)\cos\gamma + t_1^2(\gamma))^{\frac{n-2}{2}}} - \frac{1}{\left(R^2 - 2rt_1(\gamma)\cos\gamma + \frac{r^2 t_1^2(\gamma)}{R^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}}.$$

Очевидно, $A < B$ и

$$\left(\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{\sqrt{B}}\right)^{n-2} = \left(\frac{1}{\sqrt{A}} - \frac{1}{\sqrt{B}}\right)\left[\left(\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^{n-3} + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{B}}\right)^{n-3}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{B-A}{\sqrt{AB}(\sqrt{A}+\sqrt{B})} \cdot \frac{n-2}{(\sqrt{A})^{n-3}}.$$

Далее

$$\frac{B-A}{\sqrt{B}} = \frac{(R^2-r^2)(R^2-t^2)}{R^2\sqrt{B}} \leqslant \frac{2(R^2-r^2)}{R};$$

$$\frac{1}{(\sqrt{A})^{n-2}} = \frac{1}{[(t_1(\gamma) - r\cos\gamma)^2 + r^2\sin^2\gamma]^{\frac{n-2}{2}}} \leqslant \frac{1}{(r\sin\gamma)^{n-2}};$$

$$\frac{1}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} \leqslant \frac{1}{r\sin\gamma + \sqrt{R^2 - 2rt_1(\gamma)\cos\gamma + \frac{r^2t_1^2(\gamma)}{R^2}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{r\sin\gamma + \sqrt{R^2 - 2r^2\cos^2\gamma + \frac{r^4\cos^2\gamma}{R^2}}} \leqslant \frac{1}{r\sin\gamma + \sqrt{2(R^2-r^2)\sin\gamma\cos\gamma}}.$$

Таким образом, приходим к оценке

$$g(r, R, \gamma) \leqslant \frac{2(R^2-r^2)(n-2)}{Rr^{n-2}\sin^{n-2}\gamma\,(r\sin\gamma + \sqrt{2(R^2-r^2)\sin\gamma\cos\gamma})}. \tag{11}$$

Пользуясь соотношениями (10) и (11), получаем

$$\frac{1}{S_1}\int_{\sigma_1} g(r, R, \gamma)\,d\sigma_1 \leqslant \frac{1}{S_1}\int_{\left\{\frac{\pi}{2}\leqslant\gamma\leqslant\pi\right\}\cap\sigma_1} \left(\frac{1}{r^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}}\right)d\sigma_1 +$$

$$+ \frac{1}{S_1}\int_{\left\{0\leqslant\gamma\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}\cap\sigma_1} \frac{2(R^2-r^2)(n-2)\,d\sigma_1}{Rr^{n-2}\sin^{n-2}\gamma\,(r\sin\gamma + \sqrt{2(R^2-r^2)\sin\gamma\cos\gamma})} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}}\right) + \frac{L(n)(R^2-r^2)}{r^{n-2}R^2}\left(6 + \ln\frac{R+r}{R-r}\right) \leqslant$$

$$\leqslant C(n)\left(\frac{1}{r^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}}\right)\left(1 + \ln\frac{R+r}{R-r}\right),$$

где $L(n)$, $C(n)$ — положительные постоянные, зависящие от размерности пространства. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если $u(P)$ — положительная гармоническая функция в K_R, а*

$$U(P) = \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} u(tP),$$

то имеем

$$\frac{1}{S_1}\int_{\sigma_1} U(P)\,d\sigma_1 \leqslant C(n)\left(1 + \ln\frac{R+r}{R-r}\right)u(O),$$

где $C(n)$ — постоянная из леммы 1.

Действительно, так как

$$u(tP) = \frac{1}{S_R}\int\limits_{\sigma_R} u(Q)\,H(R, t, \gamma(P, Q))\,d\sigma_R(Q),$$

то, используя неравенство (6), получим

$$\frac{1}{S_1}\int\limits_{\sigma_1} U(P)\,d\sigma_1 \leqslant \frac{1}{S_1}\int\limits_{\sigma_1}\left\{\frac{1}{S_R}\int\limits_{\sigma_R} u(Q)\,p(R, r, \gamma)\,d\sigma_R\right\}d\sigma_1 \leqslant$$

$$\leqslant C(n)\left(1 + \ln\frac{R+r}{R-r}\right)u(O).$$

Лемма 3. *Справедлива оценка*

$$\frac{1}{S_1}\int\limits_{\sigma_1} g(s, r, \gamma)\,d\sigma_1 \leqslant C(n)\left(\frac{1}{s^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}}\right)\left[1 + \varphi\left(\frac{r}{R}\right)\right],$$

где r и s любые числа, удовлетворяющие условию $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant s \leqslant R$, $C(n)$ — постоянная из леммы 1,

$$\varphi(t) = \ln\frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}} \quad (0 < t < 1),$$

$$g(s, r, \gamma) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant r} G_R(sX, tY) \quad (X, Y \in \sigma_1).$$

Доказательство. Пусть сначала $R_1 < s < R$, где $R_1 = \sqrt{Rr}$. Тогда $G_R(P, Q)$ — положительная гармоническая функция по второй переменной в шаре $\overline{K}_{R_1}$, и согласно лемме 2 имеем

$$\frac{1}{S_1}\int\limits_{\sigma_1} g(s, r, \gamma)\,d\sigma_1 \leqslant C(n)\left(1 + \ln\frac{R_1+r}{R_1-r}\right)G_R(sX, O) =$$

$$= C(n)\left(1 + \varphi\left(\frac{r}{R}\right)\right)\left(\frac{1}{s^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}}\right).$$

При $0 \leqslant s \leqslant R_1$ используем неравенство (7). Получим

$$\frac{1}{S_1}\int\limits_{\sigma_1} g(s, r, \gamma)\,d\sigma_1 \leqslant \frac{1}{S_1}\int\limits_{\sigma_1} g(s, R, \gamma)\,d\sigma_1 \leqslant C(n)\left(\frac{1}{s^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}}\right)\left(1 + \ln\frac{R+s}{R-s}\right) \leqslant$$

$$\leqslant C(n)\left(1 + \varphi\left(\frac{r}{R}\right)\right)\left(\frac{1}{s^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}}\right).$$

Докажем теорему 1. Если получим неравенство, отличающееся от (2) лишь тем, что в правой части вместо R стоит $\overline{R} < R$, то, делая предельный переход $\overline{R} \uparrow R$, получим (2). Поэтому можно считать функции $u_1(P)$ и $u_2(P)$ из (1) субгармоническими в $\overline{K}_R$. Имеем представление

$$u(tP) = \frac{1}{S_R}\int\limits_{\sigma_R} u(Q)\,H(R, t, \gamma(P, Q))\,d\sigma_R -$$

$$-\int\limits_{K_R} G_R(tP, Q)\,d\mu_1(Q) + \int\limits_{K_R} G_R(tP, Q)\,d\mu_2(Q)$$

(напомним, что через μ_1 и μ_2 мы обозначаем распределения масс, соответствующие по теореме Рисса функциям $u_1(P)$ и $u_2(P)$). Отсюда следует, что

$$\frac{1}{S_r}\int\limits_{\sigma_r} U(P)\,d\sigma_r \leqslant \frac{1}{S_1}\int\limits_{\sigma_1}\left\{\frac{1}{S_R}\int\limits_{\sigma_R} u^+(Q)\,p(R, r, \gamma)\,d\sigma_R\right\}d\sigma_1 +$$
$$+\frac{1}{S_1}\int\limits_{\sigma}\left\{\int\limits_{K_R} g(|Q|, r, \gamma)\,d\mu_2(Q)\right\}d\sigma_1.$$

Меняя порядок интегрирования, используя неравенство (6) и лемму 3, получим

$$\frac{1}{S_r}\int\limits_{\sigma_r} U(P)\,d\sigma_r \leqslant C(n)\left(1+\ln\frac{R+r}{R-r}\right)\frac{1}{S_R}\int\limits_{\sigma_R} u^+(Q)\,d\sigma_R +$$
$$+C(n)\left(1+\varphi\left(\frac{r}{R}\right)\right)\int\limits_{K_R} G_R(Q, O)\,d\mu_2(Q) \leqslant C(n)\left(1+\varphi\left(\frac{r}{R}\right)\right)T(R, u)$$

(мы воспользовались неравенством $\ln\frac{R+r}{R-r}\leqslant\varphi\left(\frac{r}{R}\right)$).

2. Доказательство теоремы 2

Не уменьшая общности, можно считать $R=1$. Для функции $u(P) = u_1(P) - u_2(P)$ имеет место [3] представление

$$u(P) = \frac{1}{(n-2)S_1}\int\limits_{\sigma_1} H(1, |P|, \gamma(P, Q))\,d\psi(Q) -$$
$$-\int\limits_{K_1} G_1(P, Q)\,d\mu_1(Q) + \int\limits_{K_1} G_1(P, Q)\,d\mu_2(Q),$$

где $\psi(e)$ — заряд на поверхности σ_1, имеющий ограниченную вариацию. При этом для некоторой последовательности чисел $r_n \uparrow 1$ справедливы формулы (где e — любой интервал непрерывности в смысле [7, стр. 325] заряда ψ)

$$\int\limits_e d\psi = \lim_{r_n\to 1-0}\int\limits_{e\cap\sigma_{r_n}} u(P)\,d\sigma_{r_n}(P),$$
$$\int\limits_e d\psi^+ = \lim_{r_n\to 1-0}\int\limits_{e\cap\sigma_{r_n}} u^+(P)\,d\sigma_{r_n}(P).$$

Введем меру на системе борелевских множеств в R^n

$$m(E) = \frac{1}{(n-2)S_1}\int\limits_{E\cap\sigma_1} d\psi^+ + \int\limits_{E\cap K_1} G_1(Q, O)\,d\mu_2(Q).$$

Очевидно, справедливо равенство

$$\int\limits_{R^n} dm = \frac{1}{(n-2)S_1}\int\limits_{\sigma_1} d\psi^+ + \int\limits_{K_1} G_1(Q, O)\,d\mu_2(Q) =$$
$$= \lim_{r\to 1-0}\left\{\frac{1}{S_r}\int\limits_{\sigma_r} u^+(P)\,d\sigma_r + \int\limits_{K_r} G_r(Q, O)\,d\mu_2(Q)\right\} = \lim_{r\to 1-0} T(r, u) = T(1, u).$$

Далее будем применять метод, использованный в работе [4].

Определение. *Точка P называется нормальной, если для любого $\rho > 0$ справедливо неравенство*

$$m\{Q: |Q-P| < \rho\} \leqslant C_1(n)\,N\,T(1, u)\,\rho^{n-1},$$

где $C_1(n)$ — положительная постоянная, зависящая от размерности пространства и определяемая из леммы Н. С. Ландкофа [6, стр. 246].

Точно так же, как и в работе [4], доказывается следующее утверждение.

Множество точек шара K_1, не являющихся нормальными, можно покрыть шарами $\{Q: |Q-P_k| < \rho_k\}$, удовлетворяющими условию

$$\sum_k \rho_k^{n-1} < 1/N.$$

Далее нам нужно получить оценку функции $u(P)$ в нормальных точках.

Обозначим

$$K(P, Q) = \begin{cases} \dfrac{G_1(P, Q)}{G_1(O, Q)}, & P, Q \in K_1, \\ \dfrac{\partial}{\partial n} G_1(P, Q), & P \in K_1, \ Q \in \sigma_1, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Тогда, очевидно, справедливо неравенство

$$u(P) \leqslant \int_{R^n} K(P, Q)\, dm(Q). \tag{12}$$

Оценим интеграл, стоящий в правой части (12), в нормальных точках $P \in K_1$.

Для этого запишем

$$\int_{R^n} K(P, Q)\, dm(Q) = \int_{|Q-P| < \frac{1}{2}(1-|P|)} + \int_{|Q-P| \geqslant \frac{1}{2}(1-|P|)}.$$

Интегрируя по частям каждый интеграл, как в работе [4], и используя оценки для функции Грина $G_1(P, Q) < |P-Q|^{2-n}$ в первом интеграле,

$$G_1(P, Q) < \frac{2(n-2)(1-|P|)(1-|Q|)}{|P-Q|^n}$$

во втором, получим

$$\int_{R^n} K(P, Q)\, dm(Q) \leqslant C(n)\, NT(1, u).$$

Таким образом, $u(P) \leqslant C(n)\, NT(1, u)$ на множестве нормальных точек и теорема 2 доказана.

Замечание. При $n = 2$ оценка (3) верна с $C(n) = 9$, оценка интеграла в правой части (12) проводится, как в работе [4].

А. Ф. Гришин [5] доказал теорему, которую можно сформулировать так:

Пусть $v(z)$ — функция вида

$$v(z) = \int_{|z| \leqslant R} d(z, \zeta)\, dm(\zeta),$$

где $m(e)$ — неотрицательная мера такая, что

$$m\{|z| \leqslant R\} = S < \infty,$$

а ядро $d(z, \zeta)$ определяется формулой

$$d(z, \zeta) = \begin{cases} \left(\ln\left|\dfrac{R(z-\zeta)}{R^2-\bar{\zeta}z}\right|\right) \Big/ \ln\dfrac{R}{|\zeta|}, & |\zeta| < R, \ |z| < R, \\ -\dfrac{R^2-|z|^2}{|\zeta-z|^2}, & |\zeta| = R, \ |z| < R. \end{cases}$$

Для любого $N > 1$ можно указать систему кружков $c_k = \{|z-z_k| < \rho_k\}$ такую, что $\sum_k \rho_k < 1/N$ и при $z \in \{|z| < 1\} \setminus \bigcup_k c_k$ справедлива оценка

$$v(z) > -BNS, \tag{5'}$$

где $B > 0$ — абсолютная постоянная.

Теорема А. Ф. Гришина содержится в теореме 2. Действительно, применим теорему 2 ($n=2$) к функции $u(P) = -v(P)$. Замечая, что $v(P) \leqslant 0$, $v(O) = -S$, из (4) имеем

$$T(R, u) = T(R, v) + S = S.$$

В силу теоремы 2 выполняется $u(P) < C(2)N \cdot T(R, u) = C(2)NS$, что равносильно (5').

Можно показать, что из теоремы А. Ф. Гришина следует теорема 2 ($n=2$) для случая, когда функция $u(P)$ субгармонична.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. K. Hayman. On the characteristic of functions meromorfic in unit disk and of their integrals. Acta math., 112 (1964), 181—214.
2. И. И. Привалов. Субгармонические функции. ОНТИ, М., 1937.
3. И. И. Привалов. Граничные задачи теории гармонических и субгармонических функций в пространстве. «Матем. сб.», 3 (45) : 1 (1938).
4. Н. В. Говоров. Об оценке снизу функции субгармонической в круге. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 6. Изд-во Харьковского университета, 1968.
5. А. Ф. Гришин. О регулярности роста субгармонических функций III. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 7. Изд-во Харьковского университета, 1968.
6. Н. С. Ландкоф. Основы современной теории потенциала. Изд-во «Наука», 1966.
7. С. Бохнер. Лекции об интегралах Фурье. Физматгиз, М., 1962.

Поступила 11 февраля 1970 г.