О КЛАССАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Н. Ю. Иохвидович

1. Постановка задачи

Настоящая работа посвящена установлению необходимых и достаточны условий единственности решения задачи Коши для уравнений вида

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) \equiv \sum_{0 \leqslant k \leqslant m} P_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k} = 0, \qquad (1$$

$-\infty < x < \infty$, $t \geqslant 0$, $P(\lambda, w)$ — произвольный многочлен с постоянным коэффициентами порядка n по w и порядка m по λ, $P_m(w) \not\equiv 0$ при на чальных условиях

$$\frac{\partial^k u(x, 0)}{\partial t^k} = 0, \; k = 0, 1, \ldots, m-1, \qquad (2$$

в классе функций, удовлетворяющих некоторой оценке лишь на одной и полуосей $x \geqslant 0$ или $x \leqslant 0$, в отличие от работ других авторов по аналогич ным вопросам (см. [1], где имеются дальнейшие ссылки).

При этом мы будем рассматривать только решения нормального тип по t, то есть, решения уравнения (1), которые вместе со своими производ ными, входящими в уравнение, растут по t не быстрее $\exp\{\alpha t\}$ с некото рым $\alpha > 0$.

Дальнейшие рассмотрения относятся к случаю, когда оценки на функции, в классе которых изучаются вопросы единственности, задаются на полуоси $x \leqslant 0$; при $x \geqslant 0$ исследование может быть проведено аналогичным способом.

Применив к уравнению (1) с условием (2) преобразование Лапласа, получим уравнение

$$P\left(\lambda, \frac{\partial}{\partial x}\right) y(x, \lambda) = 0, \tag{3}$$

где $y(x, \lambda)$ — преобразование Лапласа функции $u(x, t)$, $\lambda = \sigma + i\tau$, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > \alpha$. Характеристическое уравнение для уравнения (3) имеет вид

$$P(\lambda, \omega) = 0. \tag{4}$$

Корни этого уравнения (не обязательно различные) таковы [2]:

$$\omega_j(\lambda) = \alpha_j^{(0)} \lambda^{q_j^{(0)}} + \alpha_j^{(1)} \lambda^{q_j^{(1)}} + \cdots, \ j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{5}$$

$$\alpha_j^{(0)} \neq 0, \quad q_j^{(0)} > q_j^{(1)} > \cdots; \text{ либо } \omega_j(\lambda) \equiv 0.$$

Обозначим $|\lambda| = r$, $\arg \lambda = \theta$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$;

$$|\alpha_j^{(k)}| = A_j^{(k)}, \ \arg \alpha_j^{(k)} = \varphi_j^{(k)},$$

$$-\pi < \varphi_j^{(k)} \leqslant \pi, \ k = 0, 1, \ldots;$$

$$l_j^{(k)}(\theta) = \cos(q_j^{(k)}\theta + \varphi_j^{(k)}).$$

Замечание 1. Пусть $l_j^{(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ $\left(\text{либо } l_j^{(k)}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0\right)$. Нас будет интересовать поведение $l_j^{(k)}(\theta)$ при $\theta \to \frac{\pi}{2}$ $\left(\text{либо } -\frac{\pi}{2}\right)$, $\lambda = \sigma_0 + i\tau$, $\tau > 0$ $(\tau < 0)$.

Пусть для определенности $q_j^{(k)} > 0$,

$$l_j^{(k)}(\theta) = \cos(q_j^{(k)}\theta + \varphi_j^{(k)}) - \cos\left(q_j^{(k)}\frac{\pi}{2} + \varphi_j^{(k)}\right) =$$

$$= -2\sin\left(q_j^{(k)}\frac{\theta - \frac{\pi}{2}}{2}\right) \cdot \sin\left(q_j^{(k)}\frac{\theta + \frac{\pi}{2}}{2} + \varphi_j^{(k)}\right) \xrightarrow[\theta \to \frac{\pi}{2}]{}$$

$$\to 2\sin\left(q^{(k)}\frac{\pi}{2} + \varphi_j^{(k)}\right) \cdot \frac{q_j^{(k)}}{2}\cos\theta = \sin\left(q_j^{(k)}\frac{\pi}{2} + \varphi_j^{(k)}\right)\frac{q_j^{(k)}\sigma_0}{r}.$$

Отметим, что $\sin\left(q_j^{(k)}\frac{\pi}{2} + \varphi_j^{(k)}\right) \neq 0$, так как $\cos\left(q_j^{(q)}\frac{\pi}{2} + \varphi_j^{(k)}\right) = 0$. Аналогично рассматривается случай, когда $l_j^{(k)}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, а также случай $q_j^{(k)} < 0$.

Если $-1 < q_j^{(k)} < 0$ и $q_j^{(k)}\frac{\pi}{2} + \varphi_j^{(k)} = -\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{либо } q_j^{(k)}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \varphi_j^{(k)} = \frac{\pi}{2}\right)$ или $0 < q_j^{(k)} < 1$ и $q_j^{(k)}\frac{\pi}{2} + \varphi_j^{(k)} = \frac{\pi}{2}$ $\left(\text{либо } q_j^{(k)}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \varphi_j^{(k)} = -\frac{\pi}{2}\right)$, то можно показать, что $l_j^{(k)}(\theta) \to C_j\frac{\sigma_0}{r}$, $C_j > 0$, $\theta \to \frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

Действительно, пусть $0 < q_j^{(k)} < 1$ и $q_j^{(k)} \frac{\pi}{2} + \varphi_j^{(k)} = \frac{\pi}{2}$, т. е. $I_j^{(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Тогда $\varphi_j^{(k)} = \frac{\pi}{2}(1 - q_j^{(k)})$. Следовательно,

$$\cos(q_j^{(k)}\theta + \varphi_j^{(k)}) = \cos\left(q_j^{(k)}\theta - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} q_j^{(k)}\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - q_j^{(k)} \times\right.$$

$$\left.\times \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right] = \sin\left[q_j^k\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right] \xrightarrow[\theta \to \frac{\pi}{2}]{} \frac{q_j^{(k)}\sigma_0}{r}.$$

Аналогично рассматриваются остальные случаи.

2. Исследование корней характеристического уравнения (4).

Рассмотрим представление (5) корней $w_j(\lambda)$. Здесь могут представиться такие случаи:

I. $q_j^{(0)} > 1$.

II. $q_j^{(0)} = 1$.

1. $\varphi_j^{(0)} \neq k\pi$, $k = 0, 1$.
2. $\varphi_j^{(0)} = \pi$.
3. $\varphi_j^{(0)} = 0$, т. е. $w_j(\lambda) = A_j^{(0)}\lambda + \alpha_j^{(1)}\lambda^{q_j^{(1)}} + \cdots$

1) $\forall_k q_j^{(k)} \leqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots$;

2) $\exists m \geqslant 1$ $0 < q_j^{(k)} < 1$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $q_j^{(k)} \leqslant 0$, $k > m$, $I_j^{(1)}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) > 0$;

3) $0 < q_j^{(k)} < 1$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $q_j^{(k)} \leqslant 0$, $k > m$, $I_j^{(1)}(\theta) < 0$ хотя бы при одном из $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$.

Замечание. $I_j^{(1)}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$ невозможно, так как разность аргументов функции $I_j^{(1)}(\theta)$ при $(\theta) = \pm\frac{\pi}{2}$ равна $q_j^{(1)}\pi < \pi$.

Далее может представиться случай

$$0 < q_j^{(k)} < 1,\ k = 1, 2, \ldots, m,\ q_j^{(k)} \leqslant 0,\ \ k > m,\ \ I_j^{(1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0,$$

$I_j^{(1)}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, или наоборот. Обозначим через $\tilde{\theta}$ тот из аргументов $\pm\frac{\pi}{2}$, для которого $I_j^{(1)} = 0$.

Пусть найдется номер $k_0 \leqslant m$ такой, что

$$I_j^{(k)}(\tilde{\theta}) = 0,\ k < k_0,\ I_j^{(k_0)}(\tilde{\theta}) \neq 0.$$

4) $I_j^{(k_0)}(\tilde{\theta}) > 0$;

5) $I_j^{(k_0)}(\tilde{\theta}) < 0$;

6) $I_j^{(k)}(\tilde{\theta}) = 0$ при всех $k \leqslant m$.

III. $0 < q_j^{(0)} < 1$.

1. $I_j^{(0)}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) > 0$.

2. $I_j^{(0)}(\theta)<0$ хотя бы при одном из $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$. $\left(I_j^{(0)}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=0\right.$ невозможно, так как разность аргументов функции $I_j^{(0)}(\theta)$ в точках $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ равна $q_j^{(0)}\pi<\pi$).

3. $I_j^{(0)}\left(\frac{\pi}{2}\right)>0,\ I_j^{(0)}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$, или наоборот.

Если найдется номер k_0 такой, что $I_j^{(k)}(\tilde\theta)=0,\ k<k_0,\ I_j^{(k_0)}(\theta)\neq 0$, то обозначим

$$\gamma_j\overset{\text{def}}{=}\max\left(q_j^{(0)}-1,\ q_j^{(k_0)}\right).$$

Если $I_j^{(k)}(\tilde\theta)=0$ при всех k, то $\gamma_j\overset{\text{def}}{=}q_j^{(0)}-1$.

1) $\gamma_j>0,\ I_j^{(k_0)}(\tilde\theta)>0$;

2) $\gamma_j>0,\ I_j^{(k_0)}(\tilde\theta)<0$.

При $\gamma_j=0$ рассмотрим выражение

$$W_j(\lambda)=w_j(\lambda)-\alpha_j^{(k_0)}=\alpha_j^{(0)}\lambda^{q_j^{(0)}}+\cdots+\alpha_j^{(k_0-1)}\lambda^{q_j^{(k_0-1)}}+\alpha_j^{(k_0+1)}\lambda^{q_j^{(k_0+1)}}+\cdots$$

Если найдется номер k_0' такой, что $I_j^{(k)}(\tilde\theta)=0$ при $k_0<k<k_0'$ и $I_j^{(k_0')}(\tilde\theta)\neq 0$, то положим

$$\gamma_j\overset{1\,\text{def}}{=}\max\left(q_j^{(0)}-1,\ q_j^{(k_0')}\right).$$

Если $I_j^{(k)}(\tilde\theta)=0$ при всех $k>k_0$, то положим

$$\gamma_j\overset{1\,\text{def}}{=}q_j^{(0)}-1.$$

3) $\gamma_j=0$ и либо $\gamma_j'=q_j^{(0)}-1\geqslant q_j^{(k_0')}$, либо

$$\gamma_j'=q_j^{(k_0')}\ \text{и}\ I_j^{(k_0')}(\tilde\theta)>0;$$

4) $\gamma_j=0,\ \gamma_j'=q_j^{(k_0')}>q_j^{(0)}-1,\quad I_j^{(k_0')}(\tilde\theta)<0$;

5) $\gamma_j<0$ и либо $\gamma_j=q_j^{(0)}-1\geqslant q_j^{(k_0)}$, либо $\gamma_j=q_j^{(k_0)}>q_j^{(0)}-1$ и $I_j^{(k_0)}(\tilde\theta)>0$;

6) $\gamma_j<0,\quad \gamma_j=q_j^{(k_0)}>q_j^{(0)}-1$ и $I_j^{(k_0)}(\tilde\theta)<0$.

IV. $q_j^{(0)}=0$,

$$w_j(\lambda)=\alpha_j^{(0)}+\alpha_j^{(1)}\lambda^{q_j^{(1)}}+\cdots=\alpha_j^{(0)}+W_j(\lambda).$$

1. $W_j(\lambda)\equiv 0$.

2. $W_j(\lambda)\not\equiv 0$.

1) $q_j^{(1)}<-1$;

2) $q_j^{(1)}=-1,\quad \varphi_j^{(1)}\neq 0$;

3) $q_j^{(1)}=-1,\quad \varphi_j^{(1)}=0,\ \forall_k\ -2<q_j^{(k)}<-1,\ k=2,\ 3,\ \ldots$;

4) $\exists m\geqslant 2\ -2<q_j^{(k)}<-1,\ k=2,\ 3,\ \ldots,\ m,\quad I_j^{(2)}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)>0$;

5) $-2<q_j^{(k)}<-1,\ k=2,\ 3,\ \ldots,\ m,\ I_j^{(2)}(\theta)<0$ хотя бы при одном из $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$;

$\left(I_j^{(2)}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=0\right.$ невозможно, так как разность аргументов функции $I_j^{(2)}(\theta)$ при $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ равна $\left.-2\pi<q_j^{(2)}\pi<-\pi\right)$.

Далее может представиться случай

$$-2<q_j^{(k)}<-1,\ k=2,\ 3,\ \ldots,\ m,\ I_j^{(2)}\left(\frac{\pi}{2}\right)>0,\ I_j^{(2)}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

или наоборот. Пусть найдется номер $k_0\leqslant m$ такой, что

$$I_j^{(k)}(\tilde{\theta})=0,\ k<k_0,\quad I_j^{(k_0)}(\tilde{\theta})\neq 0.$$

6) $I_j^{(k_0)}(\tilde{\theta})>0$;

7) $I_j^{(k_0)}(\tilde{\theta})<0$;

8) $I_j^{(k)}(\tilde{\theta})=0$ при всех $k\leqslant m$;

9) $-1<q_j^{(1)}<0$; $I_j^{(1)}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)>0$;

10) $-1<q_j^{(1)}<0$, $I_j^{(1)}(\theta)<0$ хотя бы при одном из $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$.

Далее может представиться случай $I_j^{(1)}\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$, $I_j^{(1)}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$, или наоборот.

Если найдется номер k_0 такой, что $I_j^{(k)}(\tilde{\theta})=0$, $k<k_0$, $I_j^{(k_0)}(\tilde{\theta})\neq 0$, то положим $\gamma_j\overset{\text{def}}{=}\max\left(q_j^{(1)}-1,\ q_j^{(k_0)}\right)$. Если $I_j^{(k)}(\tilde{\theta})=0$ при всех k, то положим $\gamma_j\overset{\text{def}}{=}q_j^{(1)}-1$.

11) $-1<q_j^{(k)}<0$ и либо $\gamma_j=q_j^{(1)}-1\geqslant q_j^{(k_0)}$, либо

$$\gamma_j=q_j^{(k_0)}\ \text{и}\ I_j^{(k_0)}(\tilde{\theta})>0;$$

12) $-1<q_j^{(1)}<0$, $\gamma_j=q_j^{(k_0)}>q_j^{(1)}-1$,

$$I_j^{(k_0)}(\tilde{\theta})<0.$$

V. $-1<q_j^{(0)}<0$.

1. $I_j^{(0)}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)>0$.

2. $I_j^{(0)}(\theta)<0$ хотя бы при одном из $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$.

3. $I_j^{(0)}\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$, $I_j^{(0)}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$, или наоборот.

Вводим в рассмотрение $\gamma_j\overset{\text{def}}{=}\max\left(q_j^{(0)}-1,\ q_j^{(k_0)}\right)$ (k_0 определяется так же, как и выше).

1) либо $\gamma_j=q_j^{(0)}-1\geqslant q_j^{(k_0)}$, либо $\gamma_j=q_j^{(k_0)}$ и $I_j^{(k_0)}(\tilde{\theta})>0$;

2) $\gamma_j=q_j^{(k_0)}>q_j^{(0)}-1$, $I_j^{(k_0)}(\tilde{\theta})<0$.

VI. $q_j^{(0)}=-1$.

1. $\varphi_j^{(0)}\neq 0$.

2. $\varphi_j^{(0)}=0$.

1) $\forall\, k-2<q_j^{(k)}<-1,\ k=1,\ 2,\ \ldots$;

2) $\exists m \geqslant 1\ -2 < q_j^{(k)} < -1,\ k = 1, 2, \ldots, m,\ I_j^{(1)}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) > 0$;

3) $-2 < q_j^{(k)} < -1,\ k = 1, 2, \ldots, m,\ I_j^{(1)}(\theta) < 0$ хотя бы при одном в $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$;

$I_j^{(1)}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$ невозможно, так как разность аргументов функции $^{(1)}(\theta)$ при $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ равна $-2\pi < q_j^{(1)}\pi < -\pi$.

Далее может представиться случай $-2 < q_j^{(k)} < -1,\ k = 1, 2, \ldots, m$, $I_j^{(1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0,\ I_j^{(1)}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, или наоборот.

Пусть найдется номер $k_0 \leqslant m$ такой, что $I_j^{(k)}(\tilde{\theta}) = 0,\quad k < k_0$, $^{k_0)}(\tilde{\theta}) \neq 0$

4) $I_j^{(k_0)}(\tilde{\theta}) > 0$;

5) $I_j^{(k_0)}(\tilde{\theta}) < 0$;

6) $I_j^{(k)}(\tilde{\theta}) = 0$ при всех $k \leqslant m$.

VII. $q_j^{(0)} < -1$.

Здесь рассмотрены все возможные случаи поведения корней $w_j(\lambda)$, т. е. каждый корень $w_j(\lambda)$ можно отнести к одному и только одному из пунктов.

3. Типы и свойства корней

К типу T_1 отнесем корни пунктов II.3.1), II.3.2), II.3.4.), II.3.6), III.1, III.3.1).

Лемма 1. *Если корень* $w_j(\lambda) \in T_1$, *то* $\operatorname{Re} w_j(\lambda) > 0$ *при* $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$ $\operatorname{Re} w_j(\sigma + i\tau) \to \infty$ *при* $\sigma \to \infty$.

Доказательство. Рассмотрим корни пункта II.3.1), т. е.

$$w_j(\lambda) = A_j^{(0)}\lambda + \alpha_j^{(1)}\lambda^{q_j^{(1)}} + \cdots, \text{ где } q_j^{(1)} \leqslant 0;$$

$$\operatorname{Re} w_j(\lambda) = A_j^{(0)} r\cos\theta + A_j^{(1)} r^{q_j^{(1)}} \cos(q_j^{(1)}\theta + \varphi_j^{(1)}) + \cdots.$$

Рассмотрим $\lambda = \sigma_0 + \rho\exp\{i\varkappa\}$, где $-\frac{\pi}{2} < \varkappa < \frac{\pi}{2}$. Для таких $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \theta < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ и, следовательно, $\operatorname{Re} w_j(\lambda)$ может быть сделана больше произвольного положительного числа A при достаточно большом σ_0. Если $\lambda = \sigma_0 + i\tau$, то

$$\operatorname{Re} w_j(\lambda) = A_j^{(0)}\sigma_0 + A_j^{(1)} r^{q_j^{(1)}} \cos(q_j^{(1)}\theta + \varphi_j^{(1)}) + \cdots.$$

Отсюда следует, что $\operatorname{Re} w_j(\lambda) > 0$ при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$ и $\operatorname{Re} w_j(\sigma + i\tau) \to \infty$ при $\sigma \to \infty$.

В остальных случаях доказательство проводится аналогично.

Лемма 2. *Корни пунктов* III.3.3)—6), IV—VII *обладают следующим свойством:*

$$\operatorname{Re} w_j(\lambda) = B_j + o(1),\ \lambda = \sigma_0 + i\tau, \tag{6}$$

достаточно велико, τ *либо* > 0, *либо* < 0, $o(1) \to 0$ *при* $\tau \to +\infty\ (-\infty)$.

Доказательство. Для корней пунктов IV—VII лемма, очевидно, справедлива, так как представление $\operatorname{Re} w_j(\lambda) = B_j + o(1)$, $o(1) \to 0$ при

$r \to \infty$ справедливо во всей правой полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \sigma_0$, а следовательно, и при $\lambda = \sigma_0 + i\tau$.

Рассмотрим корни пунктов III.3.3), III.3.4), т. е.

$$\omega_j(\lambda) = \alpha_j^{(0)}\lambda^{q_j^{(0)}} + \cdots + \alpha_j^{(k_0)} + \cdots, \quad 0 < q_j^{(0)} < 1.$$

Пусть для определенности $\tilde{\theta} = \frac{\pi}{2}$. Тогда при $\lambda = \sigma_0 + i\tau$, $\tau > 0$, σ_0 достаточно велико, в силу замечания 1 справедливо представление (6) с $B_j = \mathrm{Re}\,\alpha_j^{(k_0)}$. Аналогично, если $\tilde{\theta} = -\frac{\pi}{2}$, только тогда представление (6) справедливо при $\lambda = \sigma_0 + i\tau$, $\tau < 0$.

Для корней пунктов III.3.5), III.3.6) аналогичные рассуждения приведут к тому, что справедливо (6) с $B_j = 0$. Лемма 2 доказана полностью.

Обозначим $B = \max B_j$, где B_j определено в (6). Дальнейшей классификации подвергнем корни, перечисленные в лемме 2, с $B_j = B$.

К типу T_2 отнесем корни пунктов III.3.3), III.3.5), IV.2.3), IV.2.4), IV.2.6), IV.2.8), IV.2.9), IV.2.11), V.I., V.3.1), VI.2.1), VI.2.2.), VI.2.4), VI.2.6), у которых в (6) $B_j = B$.

К типу T_3 отнесем корни пункта IV.1, у которых в (6) $B_j = B$, т. е. $\omega_j(\lambda) \equiv \mathrm{const}$, $\mathrm{Re}\,\omega_j(\lambda) = B$.

К типу T_4 отнесем корни пунктов III.3.4), III.3.6), IV.2.1), IV.2.2), IV.2.5), IV.2.7), IV.2. 10), IV.2.12) V.2, V.3.2), VI.1, VI.2.3), VI.2.5), VII, у которых в (6) $B_j = B$.

Замечание 2. Очевидно, что если уравнение (4) имеет корень одного из пунктов, перечисленных в лемме 2, с $B_j < B$, то оно имеет также корень одного из этих пунктов с $B_j = B$.

Обозначим $\omega_j(\lambda) - B_j = W_j(\lambda)$.

Лемма 3. *Корни типа T_2 обладают следующими свойствами:*

1) *если $q_j^{(0)} > 0$, то*

$$\mathrm{Re}\,W_j(\lambda) = C_j r^{-\beta_j}(1 + o(1)),\ C_j > 0,\ \beta_j > 0,\ \lambda = \sigma_0 + i\tau, \tag{7}$$

(τ *либо* >0, *либо* <0) $o(1) \to 0$ *при* $\tau \to +\infty\ (-\infty)$, σ_0 *достаточно велико;*

2) *если $q_j^{(0)} \leqslant 0$, то* $\mathrm{Re}\,W_j(\lambda) > 0$ *при* $\mathrm{Re}\ \lambda \geqslant \sigma_0$ *и справедливо* (7).

Замечание. В случае $q_j^{(0)} \leqslant 0$ β_j в (7) при $\tau > 0$ и $\tau < 0$ могут быть различными. В дальнейшем нас будет интересовать представление (7) при тех τ, для которых β_j будет наибольшим.

Доказательство. Рассмотрим корни пункта III.3.3) ($q_j^{(0)} > 0$). Если $\gamma_j' = q_j^{(0)} - 1 \neq q_j^{(k_0')}$, то

$$\omega_j(\lambda) = \alpha_j^{(0)}\lambda^{q_j^{(0)}} + \cdots + \alpha_j^{(k_0)} + \cdots$$

Пусть для определенности $\tilde{\theta} = \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим $\lambda = \sigma_0 + i\tau$, $\tau > 0$,

$$W_j(\lambda) = \omega_j(\lambda) - \alpha_j^{(k_0)} = \alpha_j^{(0)}\lambda^{q_j^{(0)}} + \cdots,$$

$$\mathrm{Re}\,W_j(\lambda) = A_j^{(0)} r^{q_j^{(0)}} I_i^{(0)}(\theta) + \cdots.$$

В силу замечания 1 при $\frac{\pi}{2} - \delta < \theta < \frac{\pi}{2}$ и достаточно малом δ (т. е. τ достаточно велико)

$$\mathrm{Re}\,W_j(\lambda) = A_j^{(0)}\sigma_0 r^{q_j^{(0)}-1}(1 + o(1)),\ o(1) \to 0 \text{ при } \tau \to \infty,$$

$$q_j^{(0)} - 1 < 0,\ A_j^{(0)}\sigma_0 > 0.$$

Если $\gamma_j = q_j^{(0)} - 1 = q_j^{(k_0')}$, то при достаточно большом σ_0 также $\operatorname{Re} W_j(\lambda) =$

$$= C_j r^{q_j^{(0)}-1}(1 + o(1)),\ C_j > 0,\ o(1) \to 0 \text{ при } \tau \to \infty.$$

Если $\tilde{\theta} = -\frac{\pi}{2}$, то тогда все доказывается аналогично при $\lambda = \sigma_0 + i\tau$, $\tau < 0$. Остальные случаи доказываются аналогично.

Лемма 4. *Корни типа T_4 обладают следующим свойством: существует такое $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varkappa_j \leqslant \frac{\pi}{2}$, что* $\operatorname{Re} W_j(\lambda) < 0$ при $\lambda = \sigma_0 + \rho \exp\{i\varkappa_j\}$, $\rho > \rho_0 > 0$.

Доказательство. Рассмотрим корни пункта III.3.4) ($q_j^{(0)} > 0$)

$$w_j(\lambda) = \alpha_j^{(0)} \lambda^{q_j^{(0)}} + \cdots + \alpha_j^{(k_0)} + \cdots + \alpha_j^{(k_0')} \lambda^{q_j^{(k_0')}} + \cdots$$

$$\operatorname{Re} W_j(\lambda) = \operatorname{Re} w_j(\lambda) - \alpha_j^{(k_0)} = A_j^{(0)} r^{q_j^{(0)}} I_j^{(0)}(\theta) + \cdots + A_j^{(k_0')} r^{q_j^{(k_0')}} I_j^{(k_0')}(\theta) + \cdots.$$

Если $\tilde{\theta} = \frac{\pi}{2}$, то при $\lambda = \sigma_0 + i\tau$, $\tau \to \infty$, очевидно, $\operatorname{Re} W_j(\lambda) < 0$ (используя замечание 1). Если $\tilde{\theta} = -\frac{\pi}{2}$, то при $\lambda = \sigma_0 + i\tau$, $\tau \to -\infty$, $\operatorname{Re} W_j(\lambda) < 0$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

К типу T_5 отнесем корни пунктов II.3.3), II.3.5), III.2, III.3.2).

Лемма 5. *Корни типа T_5 обладают следующим свойством: при $\lambda = \sigma_0 + i\tau$ (τ либо > 0, либо < 0)*

$$\operatorname{Re} w_j(\lambda) = -C_j r^{\gamma_j}(1 + o(1)),\ C_j > 0,\ 0 < \gamma_j < 1,\ o(1) \to 0 \text{ при } \tau \to \pm\infty.$$

Доказательство. Рассмотрим корни пункта II.3.3),

$$w_j(\lambda) = A_j^{(0)} \lambda + \alpha_j^{(1)} \lambda^{q_j^{(1)}} + \cdots,\ 0 < q_j^{(1)} < 1.$$

Пусть $I_j^{(1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, тогда (используя замечание 1) при

$$\lambda = \sigma_0 + i\tau,\ \tau > 0, \qquad \operatorname{Re} w_j(\lambda) = -C_j r^{q_j^{(1)}}(1 + o(1)),$$

$$-C_j = A_j^{(1)} I_j^{(1)}\left(\frac{\pi}{2}\right),\ o(1) \to 0 \text{ при } \tau \to \infty.$$

Если $I_j^{(1)}\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 0$, то при $\lambda = \sigma_0 + i\tau$, $\tau < 0$,

$$\operatorname{Re} w_j(\lambda) = -C_j r^{q_j^{(1)}}(1 + o(1)), \quad C_j > 0, \quad o(1) \to 0 \text{ при } \tau \to -\infty.$$

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

К типу T_6 отнесем корни пункта II.2.

Лемма 6. *Корни типа T_6 обладают следующим свойством: для любого $-\frac{\pi}{2} < \varkappa_j < \frac{\pi}{2}$ при $\lambda = \sigma_0 + \rho \exp\{i\varkappa_j\}$*

$$\operatorname{Re} w_j(\lambda) = -C_j r(1 + o(1)),\ C_j > 0,\ o(1) \to 0 \text{ при } \rho \to \infty.$$

Доказательство аналогично доказательству предыдущих лемм.

К типу T_7 отнесем корни пунктов I и II.1.

Лемма 7. *Корни типа T_7 обладают следующим свойством: существует такое $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varkappa_j \leqslant \frac{\pi}{2}$, что при $\lambda = \sigma_0 + \rho \exp\{i\varkappa_j\}$*

$$\operatorname{Re} w_j(\lambda) = -C_j r^{\gamma_j}(1 + o(1)), \quad C_j > 0, \quad \gamma_j \geqslant 1, \quad o(1) \to 0 \text{ при } \rho \to \infty.$$

Доказательство аналогично предыдущим.

К типу T' отнесем корни пунктов, перечисленных в лемме 2 с $B_j < B$. Из такого рассмотрения ясно, что каждый корень $\omega_j(\lambda)$ принадлежит к одному и только одному из типов T_n, $n = 1, \dots, 7, T'$.

4. Необходимые и достаточные условия единственности решения задачи Коши (1)—(2)

Определение. *Уравнение (1) отнесем к типу* Γ_k, $1 \leqslant k \leqslant 7$, *если существует хотя бы один корень* $\omega_j(\lambda)$, *имеющий тип* T_k, *но ни один из корней не имеет типа* T_l, $1 \leqslant l < k$.

Из замечания 2 следует, что уравнения типов $\Gamma_1 - \Gamma_4$ *могут иметь корни типа* T'.

Теорема 1. *Пусть уравнение (1) имеет тип* Γ_1, $h(x) > 0$ — *непрерывная функция* $(x \leqslant 0)$. *Тогда для единственности решения задачи Коши (1)—(2) в классе функций, удовлетворяющих оценкам*

$$|D_x^k u(x, t)| \leqslant C \exp\{\alpha t - |x| h(x)\}, \ x \leqslant 0,$$
$$t \geqslant 0, \quad \alpha > 0, \ 0 \leqslant k \leqslant n-1, \tag{8}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup h(x) = \infty. \tag{9}$$

Доказательство. *Необходимость.* Рассмотрим функцию $y(x, \lambda) = \exp\{\omega_j(\lambda) x\}$, где $\omega_j(\lambda)$ — корень характеристического уравнения (4), имеющий тип T_1. Такой корень существует в силу условий теоремы; $y(x, \lambda)$ — решение уравнения (3), аналитическое при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \alpha$, $-\infty < x < \infty$.

Оценим выражение

$$f(\lambda) \equiv \sup_{\substack{x \leqslant 0 \\ 0 \leqslant k \leqslant n-1}} |y^{(k)}(x, \lambda)| \cdot C \exp\{|x| h(x)\}. \tag{10}$$

Пусть условие (9) не выполняется, т. е. $h(x) \leqslant C_1$. Тогда

$$f(\lambda) \leqslant \sup_{\substack{x \leqslant 0 \\ 0 \leqslant k \leqslant n-1}} C |\omega_j^k(\lambda)| \exp\{-\operatorname{Re}\omega_j(\lambda)|x| + C_1|x|\} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{x \leqslant 0} C_2 r^M \exp\{|x| [C_1 - \operatorname{Re}\omega_j(\lambda)]\},$$

$M > 0$ — некоторая постоянная. Мы можем так подобрать α, что при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \alpha$ будет иметь место неравенство $\operatorname{Re}\omega_j(\lambda) > C_1$, так как $\omega_j(\lambda) \in T_1$. Тогда $f(\lambda) \leqslant C_2 r^M \equiv f_1(r)$. Отсюда мы получаем

$$\int^{\infty} \frac{\ln|f(\lambda)|}{r^2} dr \leqslant \int^{\infty} \frac{\ln f_1(r)}{r^2} dr < \infty.$$

Поэтому в силу известного критерия Карлемана [3] существует аналитическая при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \alpha$ функция $F(\lambda) \not\equiv 0$ такая, что $|F(\lambda) f(\lambda)| < C_3$, т. е. из (10)

$$|F(\lambda) \cdot y^{(k)}(x, \lambda)| \leqslant C_4 \exp\{-|x| h(x)\}, \quad x \leqslant 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \tag{11}$$

Очевидно, что функция $z(x, \lambda) = F(\lambda) y(x, \lambda)$ также является решением уравнения (3), аналитическим при $\operatorname{Re}(\lambda) \geqslant \alpha$. Подберем $\gamma > 0$ достаточно большим и обозначим

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{\infty} (\alpha + i\tau)^{-\gamma} \exp\{(\alpha + i\tau) t\} z(x, \alpha + i\tau) d\tau.$$

Функция $u(x, t)$ дает искомое решение задачи (1)—(2). Действительно, нетривиальность $u(x, t)$ при $t > 0$ следует из нетривиальности $z(x, \lambda)$. Условия

(2), очевидно, выполняются при достаточно большом γ. Оценки (8) вытекают из (11); те же оценки (11) показывают, что $u(x, t)$ является решением уравнения (1), так как $z(x, \lambda)$ — решение уравнения (3).

Достаточность. Пусть $u(x, t)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) и (8), а $y(x, \lambda)$ — его преобразование Лапласа. Функция $y(x, \lambda)$ при каждом фиксированном x, $-\infty < x < \infty$, аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > \alpha$ и удовлетворяет уравнению (3), а также в силу (8) оценкам

$$|y^{(k)}(x, \lambda)| \leqslant C_1 \exp\{-|x| h(x)\}, \quad x \leqslant 0, \tag{12}$$
$$k = 0, 1, \ldots, n-1, \ \operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > \alpha, \ \sup h(x) = \infty.$$

Тем самым доказательство достаточности условий теоремы 1 сводится к доказательству следующего утверждения.

Лемма 8. *Всякое решение уравнения (3), аналитическое в какой-либо полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > \alpha$ и удовлетворяющее в ней оценкам (12), тождественно равно нулю.*

Доказательство. Пусть $y(x, \lambda)$ удовлетворяет условиям леммы. Уравнение (3) имеет фундаментальную систему решений

$$\{y_0(x, \lambda), \ldots, y_{n-1}(x, \lambda)\}.$$

Тогда

$$y(x, \lambda) \equiv \sum_{j=0}^{n-1} c_j(\lambda) y_j(x, \lambda).$$

Дифференцируя это тождество $n-1$ раз по x и решая полученную таким образом систему n уравнений относительно $c_j(\lambda)$, получим, что

$$c_j(\lambda) = V^{-1}(x, \lambda) \cdot \hat{V}_j(x, \lambda). \tag{13}$$

где $V(x, \lambda)$ — вронскиан функций $y_0(x, \lambda), \ldots, y_{n-1}(x, \lambda)$, а $\hat{V}_j(x, \lambda)$ получается из $V(x, \lambda)$ заменой j-го столбца столбцом $\{y(x, \lambda), \ldots, y^{(n-1)}(x, \lambda)\}$. Учитывая то, что левая часть в (13) не зависит от x, возьмем $x \leqslant 0$ и, используя (12), получим

$$|c_j(\lambda)| \leqslant C_2 r^{M_1}(1+|x|)^{M_2} \exp\{|x| \operatorname{Re} \omega_j(\lambda) - |x| h(x)\}, \tag{14}$$
$$0 \leqslant j \leqslant n-1, \ M_1, M_2 > 0, \ \operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0, \ x \leqslant 0.$$

Зафиксируем λ и выберем такую последовательность x_n, $|x_n| \to \infty$, что $h(x_n) \to \infty$. Тогда при $n \to \infty$ правая часть выражения (14) стремится к нулю, т. е. $c_j(\lambda) \equiv 0$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Тогда и $y(x, \lambda) \equiv 0$, а в силу единственности преобразования Лапласа и $u(x, t) \equiv 0$.

Заметим, что лемма (8) (достаточность) справедлива для любых уравнений.

Теорема 2. *Пусть уравнение (1) имеет тип Γ_2, $h(t) > 0$ — убывающая при $t \geqslant 0$ непрерывная функция. Тогда для единственности решения задачи Коши (1)—(2) в классе функций, удовлетворяющих оценкам*

$$|D_x^k u(x, t)| \leqslant C \exp\left\{\alpha t - B|x| - \int_0^{|x|} h(t)\,dt\right\}, \quad x \leqslant 0, \ t \geqslant 0, \tag{15}$$

$\alpha > 0$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int^{\infty} [h(t)]^{1+\frac{1}{\beta}} dt = \infty, \quad \beta = \min_{\{j:\, \omega_j(\lambda) \in T_2\}} \beta_j. \tag{16}$$

Доказательство. *Необходимость*. Рассмотрим функцию $y(x, \lambda) = \exp\{\omega_j(\lambda) x\}$, где $\omega_j(\lambda)$ — корень характеристического уравнения (4), имеющий тип T_2 с $\beta_j = \beta$.

Оценим выражение

$$f(\lambda)\equiv\sup_{\substack{x\leqslant 0\\ 0\leqslant k\leqslant n-1}}|y^{(k)}(x,\ \lambda)|\cdot C_1\exp\{\int\limits_0^{|x|}h(t)\,dt+B|x|\}.$$

Пусть условие (16) не выполняется, т. е.

$$\int\limits^{\infty}[h(t)]^{1+\frac{1}{\beta}}dt<\infty, \tag{17}$$

$$f(\lambda)\leqslant\sup_{\substack{x\leqslant 0\\ 0\leqslant k\leqslant n-1}}C_1|\,w_j^k(\lambda)|\exp\{\int\limits_0^{|x|}[h(t)+B-\operatorname{Re}w_j(\lambda)]\,dt\}\leqslant$$

$$\leqslant\sup_x C_2r^M\exp\{\int\limits_0^{|x|}[h(t)+B-\operatorname{Re}w_j(\lambda)]\,dt\},$$

$M>0$ — некоторая постоянная;

$$\operatorname{Re}\ \omega_j(\lambda)\geqslant B+\operatorname{Re}W_j(\lambda)\geqslant B+\frac{1}{2}C_jr^{-\beta}\ \text{при}\ \lambda=\sigma_0+i\tau$$

и τ либо >0, либо <0, так как $w_j(\lambda)\in T_2$. Тогда

$$f(\lambda)\leqslant\sup_x C_2r^M\exp\left\{\int\limits_0^{|x|}\left[h(t)-\frac{1}{2}C_jr^{-\beta}\right]dt\right\}.$$

Определим функцию $g(r)$ из условия $h(g(r))=\frac{1}{2}C_jr^{-\beta}$. Тогда

$$f(\lambda)\leqslant C_2r^M\exp\left\{\int\limits_0^{g(r)}\left[h(t)-\frac{1}{2}C_jr^{-\beta}\right]dt\right\}\leqslant C_2r^M\exp\left\{\int\limits_0^{g(r)}h(t)\,dt\right\}\overset{\text{def}}{=}f_1(r).$$

Отсюда мы получаем

$$\int\limits_{r0}^{\infty}\frac{\ln|f(\lambda)|}{r^2}dr\leqslant\int\limits_{r0}^{\infty}\frac{\ln f_1(r)}{r^2}\ dr=\int\limits_{r0}^{\infty}\frac{dr}{r^2}\int\limits_0^{g(r)}h(t)\,dt+C_3.$$

Произведя перемену порядка интегрирования, мы легко придем к выводу, что предыдущее выражение равно

$$C_4+\frac{1}{2}C_j\left[\frac{g(r)}{r^{1+\beta}}\bigg|_{r0}^{\infty}+C_5\int\limits_{r0}^{\infty}\frac{g(r)}{r^{2+\beta}}dr\right].$$

Рассмотрим

$$\int\limits_{r0}^{\infty}\frac{g(r)\,dr}{r^{2+\beta}}=-C_6\int\limits_{y0}^{\infty}yh'(y)[h(y)]^{\frac{1}{\beta}}dy=C_7\{y[h(y)]^{1+\frac{1}{\beta}}\bigg|_{y0}^{\infty}-$$

$$-\int\limits_{y0}^{\infty}[h(y)]^{1+\frac{1}{\beta}}dy<\infty$$

в силу (17).

Итак, $\int\limits^{\infty}\frac{\ln|f(\lambda)|}{r^2}dr<\infty$.

Тогда, в силу известного критерия Карлемана [3], существует аналитическая при $\operatorname{Re}\lambda\geqslant\alpha$ функция $F(\lambda)\not\equiv 0$ такая, что $|F(\lambda)\cdot f(\lambda)|<C_8$, и так же,

как в теореме 1, функция $z(x, \lambda) = F(\lambda) \cdot y(x, \lambda)$ приводит к нетривиальному решению $u(x, t)$ задачи (1)—(2), удовлетворяющему условию (15).

Достаточность. Как и в теореме 1, доказательство достаточности условий теоремы 2 сводится к доказательству следующего утверждения.

Лемма 9. Всякое решение уравнения (3), аналитическое в какой-либо полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > \alpha$ *и удовлетворяющее в ней оценкам*

$$|y^{(k)}(x, \lambda)| \leqslant C_1 \exp\left\{-B|x| - \int_0^{|x|} h(t)\,dt\right\}, \quad x \leqslant 0, \tag{18}$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1$, *с условием (16), тождественно равно нулю.*

Доказательство. Пусть $y(x, \lambda)$ удовлетворяет условиям леммы 9. Тогда, проводя те же рассуждения, что и в лемме 8, приходим к неравенству

$$|c_j(\lambda)| \leqslant C_2 r^{M_1} (1 + |x|)^{M_2} \exp\left\{|x| \operatorname{Re}\omega_j(\lambda) - B|x| - \int_0^{|x|} h(t)\,dt\right\}, \quad 0 \leqslant j \leqslant$$
$$\leqslant n-1, \ M_1, \ M_2 > 0, \ \operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0, \tag{19}$$

Заметим, что ограниченность $c_j(\lambda)$ при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, следует из того, что мы рассматриваем решения $u(x, t)$ уравнения (1) нормального типа по t. Аналитичность $c_j(\lambda)$, в достаточно далекой правой полуплоскости вытекает из (13) в силу аналитичности $y(x, \lambda)$ и $y_j(x, \lambda)$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$.

Для корней $\omega_j(\lambda)$, принадлежащих типам $T_3 - T_7$, T', очевидно, найдется такое $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varkappa_j \leqslant \frac{\pi}{2}$, что $c_j(\lambda) = 0$ при $\lambda = \sigma_0 + \rho \exp\{i\varkappa_j\}$, $\rho > \rho_0 > 0$ и, следовательно, (в силу аналитичности $c_j(\lambda)$, во всей правой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$. Осталось рассмотреть $\omega_j(\lambda) \in T_2$. Для них при $\lambda = \sigma_0 + i\tau$, τ либо > 0, либо < 0, справедливо представление

$$\operatorname{Re} W_j(\lambda) = C_j r^{-\beta_j} (1 + 0(1)), \ 0(1) \to 0 \text{ при } \tau \to \infty\,(-\infty).$$

Поскольку левая часть неравенства (19) не зависит от x, в правой части *x можно выбрать произвольно. Возьмем $x = -g(r)$, где функция $g(r)$* определяется из условия $h(g(r)) = \delta r^{-\beta_j}$, $\delta > \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} C_j = \delta_0$, $\varepsilon > 0$. Тогда из (19) получаем

$$|c_j(\lambda)| \leqslant C_2 \exp\{(1-\varepsilon)(\delta_0 - \delta) r^{-\beta_j} g(r)\} = C_2 \exp\{-C_3 r^{-\beta_j} g(r)\}, \text{ где } C_3 > 0. \tag{20}$$

Рассмотрим

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{r^{-\beta_j} g(r)}{r^2}\,dr = -\int_{y_0}^{\infty} y\,[h(y)]^{\frac{1}{\beta_j}} h'(y)\,dy = -y\,[h(y)]^{1+\frac{1}{\beta_j}} \Big|_{y_0}^{\infty} +$$
$$+ \int_{y_0}^{\infty} [h(y)]^{1+\frac{1}{\beta_j}}\,dy = \infty. \tag{21}$$

в силу (16). Здесь можно считать $y\,[h(y)]^{1+\frac{1}{\beta_j}} \underset{y\to\infty}{\longrightarrow} 0$, так как нужно найти как можно более широкий класс единственности.

Итак, мы имеем аналитическую функцию $c_j(\lambda)$, ограниченную в правой полуплоскости и, кроме того, выполняются условия (20) и (21). Тогда в силу теоремы из теории аналитических функций [3] $c_j(\lambda) \equiv 0$, т. е. $y(x, \lambda) \equiv 0$, а в силу единственности преобразования Лапласа и $u(x, t) \equiv 0$.

Теорема 3. *Пусть уравнение (1) имеет тип* Γ_3, $\beta(x)>0$ — *монотонная функция* ($x\leqslant 0$). *Тогда для единственности решения задачи Коши (1)—(2) в классе функций, удовлетворяющих оценкам*

$$|D_x^k u(x,\ t)|\leqslant\beta(x)\exp\{\alpha t-B|x|\},\ x\leqslant 0,\ t\geqslant 0, \tag{22}$$

$\alpha>0$, $k=0,\ \ldots,\ n-1$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{x\to-\infty}\beta(x)=0. \tag{23}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть условие (23) не выполняется. Тогда уравнение (1) имеет нетривиальное решение $u(x,\ t)=Ct^m\times\times\exp\{\omega_j x\}$, $\mathrm{Re}\,\omega_j=B$, удовлетворяющее условию (22) и начальному условию (2).

Достаточность. Как и в теореме 1, достаточно доказать следующее утверждение.

Лемма 10. *Всякое решение уравнения (3), аналитическое в какой-либо правой полуплоскости* $\mathrm{Re}\,\lambda\geqslant\sigma_0>\alpha$ *и удовлетворяющее в ней оценкам*

$$|y^{(k)}(x,\ \lambda)|\leqslant\beta(x)\exp\{-B|x|\},\ x\leqslant 0, \tag{24}$$
$$k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,\ \lim_{x\to-\infty}\beta(x)=0,$$

тождественно равно нулю.

Доказательство. Пусть $y(x,\ \lambda)$ удовлетворяет условиям леммы 10. Тогда, проводя те же рассуждения, что и в лемме 8, придем к неравенству

$$|c_j(\lambda)|\leqslant C_2 r^{M_1}(1+|x|)^{M_2}\exp\{|x|\,\mathrm{Re}\,\omega_j(\lambda)-B|x|\},$$
$$0\leqslant j\leqslant n-1,\quad \mathrm{Re}\,\lambda\geqslant\sigma_0,\quad M_1,\ M_2>0.$$

Для корней $\omega_j(\lambda)$, принадлежащих типам T_4-T_7 и T', очевидно, найдется такое $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varkappa_j\leqslant\frac{\pi}{2}$, что $c_j(\lambda)=0$ при $\lambda=\sigma_0+\rho\exp\{i\varkappa_j\}$, $\rho>\rho_0>0$, и, следовательно, в силу аналитичности $c_j(\lambda)$ и во всей правой полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda\geqslant\sigma_0$. Таким образом, функция $y(x,\ \lambda)$ представляет собой линейную комбинацию функций вида $\exp\{\omega_j(\lambda)x\}$ и произведений таких функций на степени x, причем $\omega_j(\lambda)\equiv\mathrm{const}$, $\mathrm{Re}\ \omega_j(\lambda)=B$. Но тогда из оценки (24) следует, что $c_j(\lambda)\equiv 0$, т. е. $y(x,\ \lambda)\equiv 0$, а в силу единственности преобразования Лапласа и $u(x,\ t)\equiv 0$.

Теорема 4. *Пусть уравнение (1) имеет тип* Γ_4, $h(x)>0$ — *непрерывная функция* ($x\leqslant 0$). *Тогда для единственности решения задачи Коши (1)—(2) в классе функций, удовлетворяющих оценкам*

$$|D_x^k u(x,\ t)|\leqslant C\exp\{\alpha t-B|x|+|x|h(x)\},\ x\leqslant 0. \tag{25}$$

$t\geqslant 0$, $\alpha>0$, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\inf h(x)=0. \tag{26}$$

Доказательство. *Необходимость.* Рассмотрим функцию $y(x,\ \lambda)=\exp\{\omega_j(\lambda)x\}$, где $\omega_j(\lambda)$ — корень характеристического уравнения (4), имеющий тип T_4.

Оценим выражение

$$f(\lambda)\equiv\sup_{\substack{x\leqslant 0\\ 0\leqslant k\leqslant n-1}}|y^{(k)}(x,\ \lambda)|\cdot C_1\exp\{B|x|-|x|h(x)\}.$$

Пусть условие (26) не выполняется, т. е. $\inf h(x) = C_2 > 0$. Тогда

$$f(\lambda) \leqslant \sup_{\substack{x \leqslant 0 \\ 0 \leqslant k \leqslant n-1}} C_1 (\omega_j^k(\lambda) | \exp\{-\operatorname{Re}\omega_j(\lambda)|x| + (B - C_2)|x|\} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_x C_3 r^M \exp\{|\operatorname{Re} W_j(\lambda)||x| - C_2|x|\}.$$

Поскольку $\operatorname{Re} W_j(\lambda) \to 0$ при $r \to \infty$, то можно выбрать достаточно далекую правую полуплоскость по λ, чтобы $|\operatorname{Re} W_j(\lambda)| < C_2$. Тогда $f(\lambda) \leqslant C_3 r^M$ и, в силу критерия Карлемана [3], существует аналитическая при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \alpha$ функция $F(\lambda) \not\equiv 0$ такая, что $|F(\lambda) \cdot f(\lambda)| < C_4$, и так же, как в теореме 1, функция $z(x, \lambda) = F(\lambda) y(x, \lambda)$ приводит к нетривиальному решению $u(x, t)$ задачи (1)—(2), удовлетворяющему условию (25).

Достаточность. Как и в теореме 1, доказательство достаточности условий теоремы 4 сводится к доказательству следующего утверждения.

Лемма 11. *Всякое решение уравнения (3), аналитическое в какой-либо правой полуплоскости* $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > \alpha$ *и удовлетворяющее в ней оценкам*

$$|y^{(k)}(x, \lambda)| \leqslant C_1 \exp\{-B|x| + |x| h(x)\}, \; x \leqslant 0,$$
$$k = 0, 1, \dots, n-1, \; \inf h(x) = 0, \tag{27}$$

тождественно равно нулю.

Доказательство. Пусть $y(x, \lambda)$ удовлетворяет условиям леммы 11. Так же, как в лемме 8, приходим к неравенству

$$|c_j(\lambda)| \leqslant C_2 r^{M_1} (1 + |x|)^{M_2} \exp\{|x| \operatorname{Re}\omega_j(\lambda) - B|x| +$$
$$+ |x| h(x)\}, \; 0 \leqslant j \leqslant n-1, \; \operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0. \tag{28}$$

Для корней $\omega_j(\lambda)$, принадлежащих типам $T_5 - T_7$ и T', очевидно, найдется такое $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varkappa_j \leqslant \frac{\pi}{2}$, что $c_j(\lambda) = 0$ при $\lambda = \sigma_0 + \rho\exp\{i\varkappa_j\}$, $\rho > \rho_0 > 0$ и, следовательно, в силу аналитичности $c_j(\lambda)$ и во всей правой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$.

Осталось рассмотреть случай $\omega_j(\lambda) \in T_4$. Возьмем $\lambda = \sigma_0 + \rho\exp\{i\varkappa_j\}$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varkappa_j \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\rho > \rho_0$, где выполняется условие $\operatorname{Re} W_j(\lambda) < 0$. Тогда из (28) следует

$$|c_j(\lambda)| \leqslant C_2 r^{M_1} (1 + |x|)^{M_2} \exp\{-|\operatorname{Re} W_j(\lambda)| \cdot |x| + |x| h(x)\}. \tag{29}$$

Зафиксируем $\lambda = \sigma_0 + \rho\exp\{i\varkappa_j\}$, $\rho > \rho_0$ и рассмотрим такую последовательность x_n, $|x_n| \to \infty$, что $h(x_n) \to 0$. Тогда при $n \to \infty$ правая часть выражения (29) стремится к нулю и, следовательно, $c_j(\lambda) = 0$ при $\lambda = \sigma_0 + \rho\exp\{i\varkappa_j\}$, $\rho > \rho_0$, а в силу аналитичности $c_j(\lambda) = 0$ и во всей правой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$. Итак, $y(x, \lambda) \equiv 0$, а в силу единственности преобразования Лапласа $u(x, t) \equiv 0$.

Теорема 5. *Пусть уравнение (1) имеет тип* Γ_5, $h(t) > 0$ — *непрерывная, возрастающая при* $t \geqslant 0$ *функция. Тогда для единственности решения задачи Коши* (1) — (2) *в классе функций, удовлетворяющих оценкам*

$$|D_x^k u(x, t)| \leqslant C \exp\{\alpha t + \int_0^{|x|} h(t)\, dt\}, \; x \leqslant 0, \tag{30}$$

$t \geqslant 0$, $\alpha > 0$, $k = 0, \dots, n-1$, *необходимо и достаточно*

$$\int^{\infty} [h(t)]^{1 - \frac{1}{\gamma}} dt = \infty, \; \gamma = \min_{\{j : \omega_j(\lambda) \in T_5\}} \gamma_j. \tag{31}$$

Доказательство. *Необходимость.* Рассмотрим функцию $y(x, \lambda) = \exp\{w_j(\lambda)x\}$, где $w_j(\lambda)$ — корень характеристического уравнения (4), имеющий тип T_5 с $\gamma_j = \gamma$. Заметим, что $\operatorname{Re} w_j(\lambda) = -C_j' r^\gamma$, $C_j' > 0$ — некоторая постоянная.

Оценим выражение

$$f(\lambda) \equiv \sup_{\substack{x<0 \\ 0 \leqslant k \leqslant n-1}} |y^{(k)}(x, \lambda)| \cdot C_1 \cdot \exp\{-\int_0^{|x|} h(t)\,dt\}.$$

Пусть условие (31) не выполняется, т. е.

$$\int^{\infty} [h(t)]^{1-\frac{1}{\gamma}} dt < \infty.$$

Тогда

$$f(\lambda) \leqslant \sup_{\substack{x \leqslant 0 \\ 0 \leqslant k \leqslant n-1}} C_1 |w_j^k(\lambda)| \cdot \exp\left\{-|x| \operatorname{Re} w_j(\lambda) - \int_0^{|x|} h(t)\,dt\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_x C_2 r^M \exp\left\{\int_0^{|x|} [C_j' r^\gamma - h(t)]\,dt\right\}.$$

Определим функцию $g(r)$ из условия

$$h(g(r)) = C_j' r^\gamma.$$

Тогда

$$f(\lambda) \leqslant C_2 r^M \exp\left\{\int_0^{(gr)} [C_j' r^\gamma - h(t)]\,dt\right\} \leqslant$$

$$\leqslant C_2 r^M \exp\left\{\int_0^{g(r)} C_j' r^\gamma\,dt\right\} = C_2 r^M \exp\{C_j' r^\gamma g(r)\} \stackrel{\text{def}}{=} f_1(r).$$

Отсюда получаем

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\ln |f(\lambda)|}{r^2}\,dr \leqslant \int_{r_0}^{\infty} \frac{\ln f_1(r)}{r^2}\,dr = C_3 \int_{r_0}^{\infty} \frac{r^\gamma g(r)}{r^2}\,dr +$$

$$+ C_4 = C_4 + C_5 \left\{y [h(y)]^{1-\frac{1}{\gamma}} \Big|^{\infty} - \int_{y_0}^{\infty} [h(y)]^{1-\frac{1}{\gamma}} dy\right\} < \infty.$$

Тогда, в силу известного критерия Карлемана [3], существует аналитическая при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \alpha$ функция $F(\lambda) \not\equiv 0$ такая, что $|F(\lambda) \cdot f(\lambda)| < C_6$ и так же, как в теореме 1, функция $z(x, \lambda) = F(\lambda)\, y(x, \lambda)$ приводит к нетривиальному решению $u(x, t)$ задачи (1)—(2), удовлетворяющему условию (30).

Достаточность. Как и в теореме 1, доказательство достаточности условий теоремы 5 сводится к доказательству следующего утверждения.

Лемма 12. *Всякое решение уравнения (3), аналитическое в какой-либо полуплоскости* $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > \alpha$ *и удовлетворяющее в ней оценкам*

$$|y^{(k)}(x, \lambda)| \leqslant C_1 \exp\left\{\int_0^{|x|} h(t)\,dt\right\}, \quad x \leqslant 0, \tag{32}$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1$, *с условием (31) тождественно равно нулю.*

Доказательство. Пусть $y(x, \lambda)$ удовлетворяет условиям леммы 12. Тогда, проводя те же рассуждения, что и в лемме 8, приходим к неравенству

$$|c_j(\lambda)| \leqslant C_2 r^{M_1}(1+|x|)^{M_2}\exp\left\{|x|\operatorname{Re}\omega_j(\lambda)+\int_0^{|x|} h(t)\,dt\right\},$$
$$0 \leqslant j \leqslant n-1,\ M_1,\ M_2>0,\ \operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0. \tag{33}$$

1) Рассмотрим случай $\omega_j(\lambda) \in T_5$. Тогда $\operatorname{Re}\omega_j(\lambda)<0$ при $\lambda=\sigma_0+i\tau$ (τ либо >0, либо <0), причем

$$\operatorname{Re}\omega_j(\lambda) = -C_j r^{\gamma_j}(1+o(1)),\quad o(1)\to 0,\ C_j>0,\ \tau\to\infty\,(-\infty)$$

в силу леммы 5. Возьмем $\lambda=\sigma_0+i\tau$. Тогда выражение (33) имеет такой вид при достаточно большом

$$|c_j(\lambda)| \leqslant C_2 r^{M_1}(1+|x|)^{M_2}\exp\left\{-C_j r^{\gamma_j}(1+o(1))|x|+\int_0^{|x|} h(t)\,dt\right\} \leqslant$$
$$\leqslant C_2\exp\left\{(1+\varepsilon)\int_0^{|x|} h(t)\,dt-(1-\varepsilon)\frac{C_j}{2}r^{\gamma_j}|x|\right\}. \tag{34}$$

Обозначим $\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\frac{C_j}{2}=C_0$. Определим функцию $g(r)$ из соотношения

$$h(g(r)) = \delta r^{\gamma_j}\quad (0<\delta<C_0). \tag{35}$$

Поскольку x в правой части (34) можно выбрать произвольно, то при $|x|=g(r)$ получим

$$|c_j(\lambda)| \leqslant C_2\exp\{(1+\varepsilon)(\delta-C_0)g(r)r^{\gamma_j}\} =$$
$$= C_3\exp\{-C_3 r^{\gamma_j}g(r)\},\ C_3>0. \tag{36}$$

Рассмотрим

$$\int_{r_0}^{\infty}\frac{r^{\gamma_j}g(r)}{r^2}\,dr = C_4\int_{y_0}^{\infty} y\,[h(y)]^{-\frac{1}{\gamma_j}}h'(y)\,dy =$$
$$= C_4\frac{1}{1-\frac{1}{\gamma_j}}\left\{y\,[h(y)]^{1-\frac{1}{\gamma_j}}\Bigg|_{y_0}^{\infty}-\int_{y_0}^{\infty}[h(y)]^{1-\frac{1}{\gamma_j}}\,dy\right\}=\infty \tag{37}$$

по условию (31).

Здесь можно считать $y\,[h(y)]^{1-\frac{1}{\gamma_j}} \underset{y\to\infty}{\to} 0$, ибо нас интересует максимальный класс единственности. Из (37) и (36), учитывая ограниченность $c_j(\lambda)$ при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$, следует [3], что аналитическая при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$ функция $c_j(\lambda)\equiv 0$ при j таких, что $\omega_j(\lambda)\in T_5$.

2) $\omega_j(\lambda)\in T_6$, T_7 $(\gamma_j>\gamma)$.

В случае $\gamma_j=q_j^{(0)}=1$, $\varphi_j^{(0)}\neq k\pi$ при $\lambda=\sigma_0+i\tau$ (τ либо >0, либо <0) $\operatorname{Re}\omega_j(\lambda)<0$. Тогда этот случай рассматривается так же, как и 1), и мы приходим к интегралу

$$\int^{\infty}\frac{rg(r)}{r^2}\,dr = \int^{\infty}\frac{g(r)}{r}\,dr=\infty,$$

т. е. в этом случае $c_j(\lambda)\equiv 0$.

Осталось рассмотреть случай $q_j^{(0)} > 1$ и $q_j^{(0)} = 1$, $\varphi_j^{(0)} = \pi$. Из выражения (5) следует

$$\operatorname{Re} w_j(\lambda) = A_j^{(0)} r^{q_j^{(0)}} \cos(q_j^{(0)}\theta + \varphi_j^{(0)}) +$$
$$+ A_j^{(0)} r^{q_j^{(0)}} |\beta_j(\lambda)| \cos\arg(\alpha_j^{(0)}\lambda^{q_j^{(0)}}\beta_j(\lambda)),\ \beta_j(\lambda) = o(1) \underset{r\to\infty}{\to} 0. \tag{38}$$

Разность значений $q_j^{(0)}\theta + \varphi_j^{(0)}$ в точках $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ больше или равна π, и поэтому $\cos(q_j^{(0)}\theta + \varphi_j^{(0)})$ может* одновременно быть положительным. Однако, поскольку $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, найдется такое $\theta' \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, что

$$\cos(q_j^{(0)}\theta' + \varphi_j^{(0)}) = -\eta' < 0.$$

Обозначим $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = \theta'$, если $0 < \theta' < \frac{\pi}{2}$,

$\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = \theta'$, если $-\frac{\pi}{2} < \theta' < 0$,

$\psi = |\theta_2 - \theta_1| = |\theta'| + \frac{\pi}{2}$.

Допустим, что θ' можно выбрать сколь угодно близко к $+\frac{\pi}{2}$, либо к $-\frac{\pi}{2}$. (Сюда относится случай $\gamma_j = q_j^{(0)} = 1$, $\varphi_j^{(0)} = \pi$). Тогда $\gamma_j > \gamma + \frac{\pi}{\psi} - 1$, ибо $\gamma_j > \gamma$.

По числу η' найдем так $R > 0$, чтобы

$$|\beta_j(\lambda)| < \frac{\eta}{2},\ r > R.$$

При $\lambda = \sigma_0 + \rho\exp\{i\theta'\}$ σ_0 достаточно велико, из (38) следует

$$|\operatorname{Re} w_j(\sigma_0 + \rho\exp\{i\theta'\})| \geqslant \frac{1}{2} A_j^{(0)}\eta' r^{\gamma_j} > \frac{\eta' A_j^{(0)}}{2}\rho^{\gamma_j}.$$

Тогда при $\lambda = \sigma_0 + \rho\exp\{i\theta'\}$

$$|c_j(\lambda)| \leqslant C_2 \exp\left\{(1+\varepsilon)\int\limits_0^{|x|} h(t)\,dt) - (1-\varepsilon)\frac{\eta' A_j^{(0)}}{2}\rho^{\gamma_j}|x|\right\}.$$

Положим $x = g(\rho)$, где $g(\rho)$ определяется соотношением (35). Тогда

$$c_j(\lambda)| \leqslant \underset{C_6>0.}{C_2}\exp\{(1+\varepsilon)(\delta - C_0)\,g(\rho)\,\rho^{\gamma_j}\} = C_2\exp\{-C_6 g(\rho)\,\rho^{\gamma_j}\}.$$

Применяем критерий Карлемана для луча [3], $c_j(\lambda)$ — ограниченная функция при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$, кроме того

$$\int^{\infty}\frac{g(\rho^{\psi/\pi})\,\rho^{\gamma_j\psi/\pi}}{\rho^2}\,d\rho = \frac{\pi}{\psi}\int^{\infty}\frac{g(u)\,u^{\gamma_j}}{u^{1+\pi/\psi}}\,du \geqslant \frac{\pi}{\psi}\int^{\infty}\frac{g(u)\,u^{\gamma}}{u^2}\,du = \infty.$$

А отсюда, как и в случае 1), следует, что $c_j(\lambda) \equiv 0$.

Если θ' нельзя взять сколь угодно близким к $\pm\frac{\pi}{2}$, легко показать, что $\gamma_j - \frac{\pi}{\psi} + 1 > \gamma$, и доказательство проводится так же, как и выше.

Итак, при $0 \leqslant j \leqslant n-1$ $c_j(\lambda) \equiv 0$, т. е. $y(x, \lambda) \equiv 0$, и в силу единственности преобразования Лапласа $u(x, t) \equiv 0$.

---

* Одновременно обратится в нуль в точках $\pm\frac{\pi}{2}$.

Теорема 6. *Пусть уравнение (1) имеет тип* Γ_6, $h(t)>0$ — *непрерывная, возрастающая при* $t \geqslant 0$ *функция. Тогда в классе функций, удовлетворяющих оценкам*

$$|D_x^k u(x,\ t)| \leqslant C \exp\left\{\alpha t + \int\limits_0^{|x|} h(t)\,dt\right\},\ x \leqslant 0,\ t \geqslant 0, \tag{39}$$

$$\alpha > 0,\ k = 0,\ 1, \ldots, n-1, \text{ где } \int\limits^{\infty} [h(t)]^{-\varepsilon}\,dt = \infty$$

при каком-либо $\varepsilon > 0$, *решение задачи (1)—(2) есть тождественный нуль.*

Доказательство проводится аналогично доказательству достаточности условий теоремы 5.

Теорема 7. *Пусть уравнение (1) имеет тип* Γ_7. *Тогда задача Коши (1)—(2) может иметь лишь тривиальное решение.*

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 5.

Пример. Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial^m u(x,\ t)}{\partial t^m} = a\,\frac{\partial^n u(x,\ t)}{\partial x^n}, \tag{40}$$

$$\partial^k u(x,\ 0)/\partial t^k = 0,\ k = 0,\ 1, \ldots, m-1. \tag{41}$$

Характеристическое уравнение здесь имеет вид

$$\lambda^m = a\omega^n. \tag{42}$$

Обозначим $\varphi = \arg a,\ -\pi < \varphi \leqslant \pi,$

$$\theta = \arg \lambda,\quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Корни уравнения (42) таковы:

$$\omega_j(\lambda) = a^{-1/n} \lambda^{m/n} \exp\frac{2\pi i j}{n},\ j = 0,\ 1, \ldots, n-1.$$

Тогда

$$\operatorname{Re}\omega_j(\lambda) = |a|^{-1/n} r^{m/n} \cos\left(\frac{m}{n}\theta + \frac{2\pi j - \varphi}{n}\right)$$

1. $m > n$.

В этом случае $\omega_j(\lambda) \in T_7$, $j = 0,\ 1, \ldots, n-1$, т. е. задача Коши (40)—(41) имеет лишь тривиальное решение.

2. $m = n$,

a) $\dfrac{2\pi j - \varphi}{n} \neq k\pi,\ k = 0,\ \pm 1, \ldots;\ j = 0,\ 1, \ldots, n-1.$

В этом случае $\omega_j(\lambda) \in T_7$, $j = 0,\ 1, \ldots, n-1$, т. е. задача Коши (40)—(41) имеет лишь тривиальное решение.

b) $\dfrac{2\pi j - \varphi}{n} \neq 2k\pi,\ k = 0,\ \pm 1, \ldots;\ j = 0,\ 1, \ldots, n-1,$

$\dfrac{2\pi j - \varphi}{n} = (2k+1)\pi$, $k = 0,\ \pm 1, \ldots$, хотя бы при одном $j = j_0$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$.

Здесь $\omega_{j_0}(\lambda) \in T_6$, $\omega_j(\lambda) \in T_7$, $j \neq j_0$.

Тогда для единственности решения задачи Коши (40) — (41) в классе функций (39) достаточно, чтобы

$$\int\limits^{\infty} [h(t)]^{-\varepsilon}\,dt = \infty,\ \varepsilon > 0.$$

c) $\dfrac{2\pi j - \varphi}{n} = 2k\pi$, $k = 0,\ \pm 1, \ldots$, хотя бы при одном $j = j_0$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$. Здесь $\omega_{j_0}(\lambda) \in T_1$, значит, для единственности решения задачи Коши (40) — (41) в классе функций (8) необходимо и достаточно, чтобы $\sup h(x) = \infty$.

3. $m < n$,

a) $m + 3 \leqslant n$.

В этом случае $w_0(\lambda) \in T_1$, значит, для единственности решения задачи Коши (40)—(41) в классе функций (8) необходимо и достаточно, чтобы $\sup h(x) = \infty$.

b_1) $m + 2 = n$, $\varphi \neq \pi$.

В этом случае $w_0(\lambda) \in T_1$, откуда следует, что для единственности решения задачи Коши (40)—(41) в классе функций (8) необходимо и достаточно, чтобы $\sup h(x) = \infty$.

b_2) $m + 2 = n$, $\varphi = \pi$.

В данном случае нет корней $w_j(\lambda)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, принадлежащих типу T_1, но $w_0(\lambda) \in T_2$. Следовательно, для единственности решения задачи Коши (40)—(41) в классе функций (15) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int^{\infty} [h(t)]^{1+\frac{n}{2}} dt = \infty.$$

c_1) $m + 1 = n$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Здесь $w_0(\lambda) \in T_1$, значит для единственности решения задачи Коши (40)—(41) в классе функций (8) необходимо и достаточно, чтобы $\sup h(x) = \infty$.

c_2) $m + 1 = n$, $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$.

В этом случае нет корней $w_j(\lambda)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, принадлежащих типу T_1, но $w_0(\lambda) \in T_2$, следовательно, для единственности решения задачи Коши (40)—(41) в классе функций (15) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int^{\infty} [h(t)]^{1+n} dt = \infty.$$

c_3) $m + 1 = n$, $-\pi < \varphi < -\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \varphi \leqslant \pi$.

В данном случае корни $w_j(\lambda)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, принадлежат типу T_5. Тогда для единственности решения задачи Коши (40)—(41) в классе функций (30) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int^{\infty} [h(t)]^{1-\frac{n}{m}} dt = \infty.$$

Автор приносит благодарность В. М. Борок и Я. И. Житомирскому за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Борок. О задаче Коши для общих линейных уравнений. ДАН СССР, 177, № 4 (1967).

2. Н. Г. Чеботарев. Теория алгебраических функций, М.—Л., 1948.

3. С. Мандельбройт. Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. ИЛ, М., 1955.

Поступила 30 января 1970 г.