УСТОЙЧИВОСТЬ БАЗИСОВ В B-ПРОСТРАНСТВАХ И В ДРУГИХ КЛАССАХ ЛВП

Ю. Б. Тумаркин

Известные результаты по устойчивости базиса $\{x_k\}_1^\infty$ в банаховом пространстве устанавливают эквивалентность возмущенной последовательности $\{x_k + u_k\}_1^\infty$ первоначальному базису, если возмущение достаточно мало. В данной работе указываются точные границы таких теорем без предположения малости и «симметрии» возмущений, как это сделано в [1] — [4]. Рассматривается также возможность перенесения полученных теорем на локально выпуклые пространства.

Имеющиеся в этом направлении результаты [8] — [10] даже для случая метрических пространств (см. [9]) содержат дополнительные ограничения на пространство, которых нет в наших формулировках.

В этом плане наибольший интерес представляет теорема 5, из которой следует, что устойчивость базиса зависит только от того, как сопряженная система расположена в сопряженном пространстве.

1. Пусть B_1 и B_2 — банаховы пространства. Будем говорить, что последовательность $Y = \{y_k\}_1^\infty \subset B_2$ подчинена последовательности $X = \{x_k\}_1^\infty \subset B_1$ ($Y < X$), если для любой последовательности чисел $\{a_k\}_1^\infty$, для которой сходится ряд $\sum\limits_1^\infty a_k x_k \in B_1$, сходится ряд $\sum\limits_1^\infty a_k y_k \in B_2$.

Лемма 1. *Если $X = \{x_k\}_1^\infty$ базис в B_1 с сопряженной системой $\{x\}_k^*\}_1^\infty \subset B_1^* (x_k^*(x_j) = \delta_{kj})$ и $Y = \{y_k\}_1^\infty \subset B_2$ такая последовательность, что при всех $n = 1, 2 \ldots$ и любом $x \in B_1$ $\| \sum\limits_1^n x_k^*(x)\, y_k \|_2 \leqslant M(x)$, то $Y < X$ и при всех $x \in B_1$*

$$\sup_n \| \sum_1^n x_k^*(x)\, y_k \|_2 \leqslant C \| x \|_1. \tag{1}$$

Доказательство. Рассмотрим семейство линейных операторов $\{S_n : B_1 \to B_2\}_1^\infty$, где $S_n x = \sum\limits_1^n x_k^*(x)\, y_k$. Справедливо равенство $S_n = S_n U_n$, где $U_n x = \sum\limits_1^n x_k^*(x)\, x_k \in B_1$. Операторы U_n непрерывны. Отсюда следует непрерывность S_n. Для любого $x \in B_1$ множество $\{S_n x\}_1^\infty$ ограничено в B_2, и по теореме Банаха — Штейнгауза, семейство $\{S_n\}_1^\infty$ равностепенно непрерывно и

$$\sup_n \| \sum_1^n x_k^*(x)\, y_k \|_2 \leqslant C \| x \|_1.$$

Таким образом, линейный оператор $S: B_1 \to B_2$, задаваемый формулой $Sx_k = y_k\}_1^\infty$, непрерывен. Значит, ряд $\sum_1^\infty x_k^*(x)\, y_k$ сходится.

Отметим используемый в дальнейшем пример системы $U = \{u_k\}_1^\infty$, подчиненной любой последовательности $X = \{x_k\}_1^\infty$, для которой $\|x_k\| \geqslant \delta > 0$. Такую систему образуют элементы безусловно сходящегося ряда. Действительно, из сходимости ряда $\sum_1^\infty a_k x_k$ следует $a_k \to 0$, а так как ряд $\sum_1^\infty u_k$ сходится безусловно, то сходится ряд $\sum_1^\infty a_k u_k$.

В дальнейшем понадобится следующее свойство безусловно сходящихся рядов.

Теорема 1. *Если ряд $\sum_1^\infty x_k$ сходится в B безусловно, то существует такая монотонная последовательность чисел $\varepsilon_k \to 0$, что ряд $\sum_1^\infty \varepsilon_k^{-1} x_k$ также сходится безусловно.*

Доказательство. Обозначим Λ множество всех последовательностей $\{\lambda_k\}_1^\infty$, $\lambda_k = 0,\ +1,\ -1$. Рассмотрим множество $U_n = \bigcup\limits_{\Lambda} \sum_n^\infty \lambda_k x_k$ и обозначим d_n диаметр множества U_n (нижняя грань диаметров всех шаров, содержащих U_n). Таким образом, при любых $p \geqslant n$ и $q > p$ $\left\|\sum_p^q \lambda_k x_k\right\| \leqslant d_n$. Покажем (см. [7]), что $d_n \to 0$. Действительно, если это не так, то существует $c > 0$ и векторы $y_k = \sum_{j=p_k+1}^{p_{k+1}} \lambda_j x_j$ (при некоторой $\{\lambda_j\}_{p_k+1}^{p_{k+1}} \in \Lambda$), такие, что $\|y_j\| \geqslant C$. Очевидно, что ряд $\sum_1^\infty y_k = \sum_{p_1+1}^\infty \lambda_j x_j$ расходится, что противоречит безусловной сходимости ряда $\sum_1^\infty x_k$.

Выберем из $\{d_n\}_1^\infty$ подпоследовательность $\{d_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ так, чтобы сходился ряд $\sum_{k=1}^\infty d_{n_k}$. Пусть монотонная последовательность $\delta_k \to 0$ такова, что сходится ряд $\sum_1^\infty \delta_k^{-1} d_{n_k}$; положим $\varepsilon_m = \delta_k$ при $n_k \leqslant m < n_{k+1}$, очевидно, что $\varepsilon_m \to 0$ $(m \to \infty)$.

Если $n_{p-1} \leqslant n < n_p$, $n_q \leqslant m < n_{q+1}$ и $m \geqslant n$, то

$$\left\|\sum_n^m \lambda_k \frac{x_k}{\varepsilon_k}\right\| \leqslant \frac{1}{\delta_{p-1}}\left\|\sum_n^{p-1} \lambda_k x_k\right\| + \sum_{k=p}^{q-1} \frac{1}{\delta_k}\left\|\sum_{n_k}^{n_{k+1}-1} \lambda_s x_s\right\| +$$

$$+ \frac{1}{\delta_q}\left\|\sum_{n_q}^m \lambda_k x_k\right\| \leqslant \sum_{k=p-1}^{o} \delta_k^{-1} d_{n_k} \to 0 \ (p \to \infty).$$

Таким образом, ряд $\sum_1^\infty \varepsilon_k^{-1} x_k$ сходится безусловно.

2. Перейдем к вопросу об устойчивости базиса.

Обозначим $E(M)$ замкнутую линейную оболочку множества $M \subset B$.

Последовательности $\{x_k\}_1^\infty \subset B$ и $\{y_k\}_1^\infty \subset B$ называются эквивалентными, если существует изоморфизм A пространств $E(\{x_k\}_1^\infty)$ и $E(\{y_k\}_1^\infty)$ такой, что $Ax_k = y_k$; кроме того, если $E(\{x_k\}_1^\infty) = B$, то требуется, чтобы $E(\{y_k\}_1^\infty) = B$.

Теорема 2. *Пусть* $X = \{x_k\}_1^\infty$, *базис в пространстве Банаха* B и $U = \{u_k\}_1^\infty \subset B$. *Для существования* $\varepsilon_0 > 0$ *такого, что последовательность* $\{x_k + \varepsilon u_k\}_1^\infty$ *эквивалентна* X *при всех* $\varepsilon < \varepsilon_0$, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* U *была подчинена* X $(U < X)$.

Доказательство. Пусть $\{x_k^*\}_1^\infty \subset B^*$ — сопряженная система к X. Определим линейный оператор A формулой $Ax_k = x_k + \varepsilon u_k$. Оператор A определен на всюду плотном в B множестве всех конечных линейных комбинаций X. Предположим, что $U < X$. Тогда в силу леммы 1 существует $c > 0$ такое, что $\|\sum_1^n a_k u_k\| \leqslant C \|\sum_1^n a_k x_k\|$ при всех $n = 1, 2 \ldots$ и $\{a_k\}_1^\infty$. Таким образом, оператор A непрерывен и

$$\|(I - A)x\| = \varepsilon \|\sum_1^\infty x_k^*(x) u_k\| \leqslant \varepsilon C \|x\|.$$

Мы видим, что $\|I - A\| \leqslant \varepsilon C$. Значит, при $\varepsilon < C^{-1}$, $\|I - A\| < 1$ и существует непрерывный обратный оператор к A, определенный на всем B.

В обратную сторону утверждение очевидно, поскольку из непрерывности оператора A следует подчиненность $U < X$.

Замечание. Из доказательства теоремы видно, что в качестве ε_0 можно взять число $\varepsilon_0 = (\sup_{\|x\|=1} \|\sum_1^\infty x_k^*(x) u_k\|)^{-1}$.

Покажем, что из теоремы 2 следуют известные теоремы устойчивости.

Следствие 1. (М. Г. Крейн, Д. П. Мильман, М. А. Рутман [1]). *Если* $\{x_k\}_1^\infty$ — *базис в* B, *то при любой последовательности* $\{y_k\}_1^\infty$, $\|y_k\| \leqslant 1$ *и последовательности чисел* $\{\varepsilon_k \geqslant 0\}_1^\infty$ *такой, что* $\sum_1^\infty \varepsilon_k \|x_k^*\| < 1$, *последовательность* $\{x_k + \varepsilon_k y_k\}_1^\infty$ *эквивалентна* $\{x_k\}_1^\infty$.

Доказательство. Непосредственно проверяется, что $\{\varepsilon_k y_k\}_1^\infty$ — подчиненная $\{x_k\}_1^\infty$ последовательность. Легко видеть, что

$$\varepsilon_0 \geqslant (\sum_1^\infty \varepsilon_k \|x_k^*\|)^{-1} > 1.$$

Положим $\varepsilon = 1$. Тогда $\varepsilon < \varepsilon_0$ и по теореме 2 система $\{x_k + \varepsilon_k y_k\}_1^\infty$ эквивалентна $\{x_k\}_1^\infty$.

Следствие 2. (В. Д. Мильман [3]). *Пусть* $X = \{x_k\}_1^\infty$ *базис в* B *с сопряженной* $\{x_k^*\}_1^\infty$. *Если последовательность* $\{\varepsilon_k > 0\}_1^\infty$ *удовлетворяет условию* $q = \sup_{n;\, |\lambda_k|=1} \|\sum_1^n \lambda_k \varepsilon_k x_k^*\| < 1$, *то любая система* $Y = \{y_k\}_1^\infty$ *такая, что* $\|y_k - x_k\| \leqslant \varepsilon_k$ *эквивалентна* $\{x_k\}_1^\infty$.

Доказательство. Покажем, что $\{x_k - y_k\}_1^\infty = U < X$ с константой

Для любых $x = \sum_1^n x_k^*(x) x_k$ и любого $f \in B^*$, $\|f\| = 1$,

$$\left|f\left(\sum_1^n x_k^*(x)(y_k - x_k)\right)\right| = \left|\sum_1^n x_k^*(x) f(y_k - x_k)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left\|\sum_1^n x_k^* f(y_k - x_k)\right\| \|x\| \leqslant q\|x\|.$$

В силу произвольности f, $\|f\| = 1$ получаем, что $\left\|\sum\limits_1^n x_k^*(x)(y_k - x_k)\right\| \leqslant$ $\leqslant q\|x\|$; отсюда видно, что $\varepsilon_0 = q^{-1} > 1$, и можно применить теорему 2 с $\varepsilon = 1$.

В следующих теоремах данного раздела исследуется дефектная устойчивость (см. [2]). Это означает, что возмущенная система Y эквивалентна первоначальному базису X после удаления некоторого конечного числа элементов. Если в этом случае дополнительно предположить, что возмущенная система $Y = \{y_k\}_1^\infty$ ω—линейно независима, т. е. из соотношения $\sum\limits_1^\infty a_k y_k = 0$ следует $\{a_k = 0\}_1^\infty$, то Y эквивалентна X.

Лемма 2. *Пусть последовательность $\{x_k\}_1^\infty \subset B$. Ряд $\sum\limits_1^\infty \varepsilon_k x_k$ сходится в B при любой монотонной последовательности чисел $\varepsilon_k \to 0$ тогда и только тогда, когда частичные суммы $s_n = \sum\limits_1^n x_k$ ограничены.*

Доказательство. Преобразование Абеля дает

$$\sum_n^m \varepsilon_k x_k = \sum_{k=n}^m (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) \sum_{p=n}^k x_p.$$

Тогда

$$\left\|\sum_n^m \varepsilon_k x_k\right\| \leqslant \varepsilon_n \sup_{\substack{l \leqslant m \\ l \geqslant n}} \left\|\sum_n^l x_k\right\| \leqslant 2\varepsilon_n \sup_{l \leqslant m} \left\|\sum_1^l x_k\right\|. \tag{2}$$

Если $\varepsilon_n \to 0$, то неравенство (2) показывает, что ряд $\sum\limits_1^\infty \varepsilon_k x_k$ сходится, когда частичные суммы $s_n = \sum\limits_1^n x_k$ ограничены.

Покажем теперь, что если множество $\{s_n\}_1^\infty$ не ограниченно, то найдется монотонная последовательность чисел $\varepsilon_k \to 0$, такая, что ряд $\sum\limits_1^\infty \varepsilon_k x_k$ не сходится. Из последовательности $\{s_n\}_1^\infty$ выберем такую подпоследовательность $\{s_{n_k}\}_1^\infty$, что ряд $\sum\limits_{k=1}^\infty \|s_{n_k}\|^{-1}$ сходится. Положим $\varepsilon_{n_m} = \sum\limits_{k=m}^\infty \|s_{n_k}\|^{-1}$ и $\varepsilon_k = \varepsilon_{n_m}$ при $n_m \leqslant k < n_{m+1}$.

Ясно, что $\{\varepsilon_k\}_1^\infty$ —монотонная последовательность и $\varepsilon_k \to 0$. Так как $\sum\limits_1^{n_p} \varepsilon_k x_k = \sum\limits_{k=1}^p (\varepsilon_{n_k} - \varepsilon_{n_{k+1}}) \sum\limits_{m=1}^{n_k} x_m = \sum\limits_{k=1}^p s_{n_k} \|s_{n_k}\|^{-1}$, то ряд $\sum\limits_1^\infty \varepsilon_k x_k$ не сходится.

Теорема 3. *Пусть $X = \{x_k\}_1^\infty$—базис в B и $U = \{u_k\}_1^\infty \subset B$. Для эквивалентности последовательности $\{x_k + \varepsilon_k u_k\}_1^\infty$, базису X при любой монотонной последовательности чисел $\varepsilon_k \to 0$, для которой $\{x_k + \varepsilon_k u_k\}_1^\infty$ ω-линейно независимая система, необходимо и достаточно, чтобы $U < X$.*

Доказательство. Допустим, что $\{u_k\}_1^\infty$ подчинена $\{x_k\}_1^\infty$ и $\{x_k + \varepsilon_k u_k\}_1^\infty$ — ω-линейно независимая система. Из неравенства (2) получаем для всех n и $m \geqslant n$:

$$\left\| \sum_n^m x_k^*(x)\, \varepsilon_k u_k \right\| \leqslant \varepsilon_n \sup_{k \geqslant n} \left\| \sum_n^k x_k^*(x)\, u_k \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_n C \sup_{k \geqslant n} \left\| \sum_n^k x_k^*(x)\, x_k \right\| \leqslant \varepsilon_n CM \, \| x \|,$$

где $M = 2 \sup\limits_n \| U_n \| \quad (U_n x = \sum\limits_1^n x_k^*(x)\, x_k)$.

Так как $\varepsilon_n \to 0$, то можно выбрать n_0 такое, что $\varepsilon_{n_0} CM \leqslant \delta < 1$. Определим линейный оператор $S: B \to B$:

$$Sx = \sum_1^{n_0 - 1} x_k^*(x)\, x_k + \sum_{k = n_0}^\infty x_k^*(x)\, (x_k + \varepsilon_k u_k),$$

тогда

$$\| (I - S)\, x \| = \left\| \sum_{n_0}^\infty x_k^*(x)\, \varepsilon_k u_k \right\| \leqslant \delta \, \| x \|.$$

Это означает, что на всем B определен и непрерывен оператор S^{-1} и $\{Sx_k\}_1^\infty$ — базис, эквивалентный $\{x_k\}_1^\infty$. Подпространство $E(\{Sx_k\}_{n_0}^\infty)$ имеет, очевидно, дефект $n_0 - 1$, а в силу ω-линейной независимости $\{x_k + \varepsilon_k u_k\}_1^\infty$

$$B = E(\{x_k + \varepsilon_k u_k\}_1^{n_0 - 1}) + E(\{Sx_k\}_{n_0}^\infty).$$

Отсюда очевидно, что $\{x_k + \varepsilon_k u_k\}_1^\infty$ есть базис, эквивалентный $\{x_k\}_1^\infty$.

Покажем теперь, что если при любой монотонной последовательности $\varepsilon_k \to 0$, для которой система $\{x_k + \varepsilon_k u_k\}_1^\infty$ ω-линейно независима, $\{x_k + \varepsilon_k u_k\}_1^\infty$ есть базис, эквивалентный $\{x_k\}_1^\infty$, то $U < X$. Выше показано, что при $\varepsilon_1 < (CM)^{-1}$ система $\{x_k + \varepsilon_k u_k\}_1^\infty$, где $\varepsilon_k \to 0$, ω-линейно независима. Поскольку в этом случае базис $\{x_k + \varepsilon_k u_k\}_1^\infty$ эквивалентен $\{x_k\}_1^\infty$, то ряд $\sum\limits_1^\infty \varepsilon_k x_k^*(x)\, u_k$ сходится при любой монотонной последовательности $\varepsilon_k \to 0$.

Из леммы 2 следует, что частичные суммы $S_n = \sum\limits_1^n x_k^*(x)\, u_k$ ограничены, и по лемме 1, получаем $U < X$.

Следствие 1. (Б. Е. Вейц [4]). *Если* $X = \{x_k\}_1^\infty$ — *базис в* B $(\| x_k \| = 1)$, $U = \{u_k\}_1^\infty \subset B$, *ряд* $\sum\limits_1^\infty u_k$ *сходится безусловно и система* $\{x_k + u_k\}_1^\infty$ — ω-*линейнонезависима, то* $\{x_k + u_k\}_1^\infty$ *есть базис, эквивалентный* $\{x_k\}_1^\infty$.

Действительно, по теореме 1 существует монотонная последовательность чисел $\varepsilon_k \to 0$ такая, что ряд $\sum\limits_1^\infty \varepsilon_k^{-1} u_k$ безусловно сходится.

Безусловная сходимость этого ряда, как отмечено выше, влечет подчиненность последовательности $\{v_k = \varepsilon_k^{-1} u_k\}_1^\infty$ базису X.

Таким образом, по теореме 3 $\{x_k + \varepsilon_k v_k\}_1^\infty = \{x_k + u_k\}_1^\infty$ есть базис, эквивалентный $\{x_k\}_1^\infty$.

Следствие 2. (В. Д. Мильман [3]). *Пусть* $\{x_k\}_1^\infty$ — *базис в* B *и* $\{x_k\}_1^\infty$ — *сопряженная к* $\{x_k\}_1^\infty$ *система. Если ряд* $\sum_1^\infty \varepsilon_k x_k^* \in B^*$ *сходится безусловно,* $\{u_k\}_1^\infty \subset B$, $\|u_k\| \leqslant \varepsilon_k$ *и система* $Y = \{x_k + u_k\}_1^\infty$ ω— *линейно независимая, то* Y *есть базис, эквивалентный* $\{x_k\}_1^\infty$.

Доказательство. По теореме 1 существует монотонная последовательность чисел $\delta_k \to 0$ такая, что безусловно сходится ряд $\sum_1^\infty \delta_k^{-1} \varepsilon_k x_k^*$. Покажем, что система $v = \{v_k = \delta_k^{-1} u_k\}_1^\infty$ подчинена $\{x_k\}_1^\infty$.

Действительно, для любого $f \in B^*$ и $x \in B$ ряд $\sum_1^\infty x_k^*(x) f(v_k)$ сходится, так как $|f(v_k)| \leqslant \delta_k^{-1} \varepsilon_k \|f\|$. Следовательно, частичные суммы $S_n = \sum_1^n x_k^*(x) v_k$ ограничены при любом $x \in B$, а значит, в силу леммы 1, $U < X$. Далее применяется теорема 3 к последовательности $\{v_k = \delta_k^{-1} u_k\}_1^\infty$ и числовой последовательности $\delta_k \to 0$.

3. Некоторые из предыдущих результатов имеют место и в широком классе ЛВП.

Рассмотрим отделимое локально выпуклое пространство E с базисом $\{x_k\}_1^\infty$ и сопряженной системой $\{x_k^*\}_1^\infty$. Базис $\{x_k\}_1^\infty$ называется непрерывным (базисом Шаудера), если $\{x_k^*\}_1^\infty \subset E^*$.

Лемма 1а. *Пусть* $X = \{x_k\}_1^\infty$ — *непрерывный базис в бочечном* (см. [6] стр. 99) *локально выпуклом пространстве* E *с сопряженной системой* $\{x_k^*\}_1^\infty$ *и последовательность* $Y = \{y_k\}_1^\infty$ *содержится в секвенциально полном пространстве* E_2. *Если частичные суммы* $z_n = \sum_1^n x_k^*(x) y_k$ *ограничены в* E_2 *при любом* $x \in E_1$, *то* $Y < X$ *и для любой непрерывной в* E_2 *полунормы* p_2 *найдется непрерывная на* E_1 *полунорма* p_1 *такая, что при любых* $x \in E_1$

$$\sup_n p_2\left(\sum_1^n x_k^*(x) y_k\right) \leqslant p_1(x).$$

Мы опустим доказательство леммы, так как оно проводится тем же способом, что и доказательство леммы 1.

В дальнейшем мы везде будем предполагать, что E секвенциально полное бочечное пространство. Через $L(E)$ обозначим пространство непрерывных линейных отображений из E в E.

Теорема 4. *Пусть* $X = \{x_k\}_1^\infty$ — *непрерывный базис в* E.

1) *Если* $U = \{u_k\}_1^\infty \subset E$, $U < X$, *и в* $L(E)$ *существует такое поглощающее множество* V, *что любой оператор из* $I + V$ *имеет непрерывный обратный, то существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что последовательность* $\{x_k + \varepsilon U_k\}_1^\infty$ *есть базис, эквивалентный* X *при всех* $\varepsilon < \varepsilon_0$.

2) *Если для некоторой последовательности* $U \subset E$ *последовательность* $\{x_k + \varepsilon u_k\}_1^\infty$ *есть базис, эквивалентный* X *при некотором* $\varepsilon > 0$, *то* $U < X$.

3) *Если для любой последовательности* $U < X$ *существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что при всех* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *последовательность* $\{x_k + \varepsilon u_k\}_1^\infty$ *эквивалентна* X, *и полна в* E, *то в* $L(E)$ *существует такое поглощающее множество* V, *что любой оператор из* $I + V$ *имеет непрерывный обратный.*

Доказательство утверждений 1) и 2) опустим, так как оно проводится так же, как и в теореме 2. Докажем 3).

Пусть $A \in L(E)$. Положим $U = \{Ax_k = u_k\}_1^\infty$. Ясно, что $U < X$. Эквивалентность последовательности X и $\{x_k + \varepsilon u_k\}_1^\infty$ равносильна существованию $(I + \varepsilon A)^{-1} \in L(E)$. Итак, для любого $A \in L(E)$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что оператор $I + \varepsilon A$ обратим. Отсюда ясно, как строится множество $V \subset L(E)$.

Далее мы показываем, что теорема В. Д. Мильмана об устойчивости [3] (см. следствие 2 теоремы 2) при соответствующей модификации переносится на рассматриваемый класс ЛВП.

Теорема 5. *Пусть $\{x_k\}_1^\infty \subset E$ непрерывный базис с сопряженной системой $\{x_k^*\}_1^\infty$. Если ряд $\sum_1^\infty \varepsilon_k x_k^*$ сходится безусловно в слабой* топологии E^*, то для любого ограниченного множества $M \subset E$ существует такое $\delta_0 > 0$, что при всех $\delta < \delta_0$ и $\{y_k\}_1^\infty \subset M$ последовательность $\{x_k + \delta\varepsilon_k y_k\}_1^\infty$ есть базис, эквивалентный $\{x_k\}_1^\infty$. Обратно, если для любого ограниченного множества существует такое $\delta_0 > 0$ с указанными выше свойствами, то ряд $\sum_1^\infty \varepsilon_k x_k^*$ сходится безусловно в слабой* топологии E^*.*

Доказательство. Предположим, что ряд $\sum_1^\infty \varepsilon_k x_k^*$ слабо * безусловно сходится в E^*. Заметим прежде всего, что в силу бочечности E, E^* слабо* секвенциально полно (см. [5], стр. 214).

Обозначим Γ множество всех последовательностей чисел $\{\gamma_k\}_1^\infty$, $|\gamma_k| \leqslant 1$. В силу слабой* секвенциальной полноты E^*, слабо* безусловно сходится ряд $\sum_1^\infty \varepsilon_k \gamma_k x_k^*$. Положим $K = \{f : f = \sum_1^\infty \varepsilon_k \gamma_k x_k^*, \{\gamma_k\}_1^\infty \in \Gamma\}$ и обозначим $K^0 = \{x \in E : |f(x)| \leqslant 1$ при всех $f \in K\}$.

Аналогично поляру $M \subset E$ обозначим M^0, т. е. $M^0 = \{f \in E^* : |f(x)| \leqslant 1$ при всех $x \in M\}$ и $M^{00} = \{x \in E \mid f(x)| \leqslant 1$ при всех $f \in M^0\}$. Известно (см. [6], стр. 58), что M^{00} есть выпуклая симметричная замкнутая оболочка множества M. Таким образом, из ограниченности M следует ограниченность M^{00}. Как легко видеть, для всех $f \in K$

$$|f(x)| \leqslant \sup_n |\gamma_n| \sup_{|\lambda_k|=1} \left|\sum_1^\infty \varepsilon_k \lambda_k x_k^*(x)\right|, \tag{3}$$

откуда в силу бочечности E получаем, что $K \subset E^*$ равностепенно непрерывно, т. е. K^0 — окрестность в E.

Пусть M — ограниченное множество в E и $\{y_k\}_1^\infty \subset M$. Покажем, что последовательность $\{\varepsilon_k y_k\}_1^\infty$ подчинена $\{x_k\}_1^\infty$. Действительно, для любого $f \in E^*$ найдется такое $C > 0$ (C зависит также от M), что $|f(y_k)| < C$. Поэтому при всех $x \in E$ числовой ряд $\sum_1^\infty \varepsilon_k f(y_k) x_k^*(x)$ сходится. Это означает ограниченность частичных сумм $\sum_1^n \varepsilon_k x_k(x) y_k$ (при всех $x \in E$). В силу леммы 1а последовательность $\{\varepsilon_k y_k\}_1^\infty$ подчинена $\{x_k\}_1^\infty$.

Определим линейный оператор H по формуле $Hx = \sum_1^\infty \varepsilon_k x_k^*(x) y_k$. В силу леммы 1а H непрерывен. Из определения множества K и (3) следует, что $f(Hx)| \leqslant 1$ для всех $x \in K$ и $f \in M^0$. Значит

$$HK^0 \subset M^{00} \tag{4}$$

Так как K^0 — окрестность в E, то существует такое $\delta_0 > 0$, что $\delta_0 M^{00} \subset K^0$.

Обозначим через L линейную (не замкнутую) оболочку M^{00} и рассмотрим в L функционал Минковского $P_{M^{00}}$ множества $M^{00}: P_{M^{00}}(x) = \inf\{r : r^{-1}x \in M^{00}\}$. Функционал $P_{M^{00}}(x)$ задает норму $\|x\| = P_{M^{00}}(x)$ в L, которой L превращается в банахово пространство (в силу секвенциальной полноты E и замкнутости M^{00} [6], стр. 124), с единичным шаром M^{00}. Выше показано (4), что $HE \subset L$ и $\delta_0 H M^{00} \subset M^{00}$. Отсюда ясно, что непрерывно действует в L и $\|H\| \leqslant \frac{1}{\delta_0}$. Тогда при любом $\delta < \delta_0$ ряд $\sum (-\delta)^n H^n$ сходится в равномерной операторной топологии пространства $L(L)$. Более того, из (4) следует, что линейный оператор $B = \sum\limits_1^\infty (-\delta)^n H^n$ определен и непрерывен из E в L, поскольку $BK^0 \subset \frac{\delta}{\delta_0 - \delta} M^{00}$. Значит, тем более оператор B непрерывен из E в E. Легко видеть, что

$$I + B = (I + \delta H)^{-1},$$

т. е. последовательность $\{x_k + \delta\varepsilon_k y_k\}_1^\infty$ эквивалентна $\{x_k\}_1^\infty$.

Докажем обратное утверждение. Пусть существует такая последовательность чисел $\{\varepsilon_k\}_1^\infty$, что для любого ограниченного множества $M \subset E$ существует число $\delta_0 = \delta_0(M) > 0$ такое, что для всех $\delta < \delta_0$ и $\{y_k\}_1^\infty \subset M$ последовательность $\{x_k + \delta\varepsilon_k y_k\}_1^\infty$ эквивалентна $\{x_k\}_1^\infty$. Предположим, что ряд $\sum\limits_1^\infty \varepsilon_k x_k^*$ не сходится безусловно в слабой* топологии F^*. Это означает существование такой последовательности $\{\lambda_k^0\}_1^\infty$, $|\lambda_k^0| = 1$ и $x_0 \in E$, для которых $\lambda_k^0 \varepsilon_k x_k^*(x_0) \geqslant 0$ и $s_n(x_0) = \sum\limits_1^n \lambda_k^0 \varepsilon_k x_k^*(x_0) \to \infty$ $(n \to \infty)$.

Возьмем ограниченное замкнутое симметричное множество M, содержащее последовательность $\{z_n\}_1^\infty$, $z_n = \sum\limits_1^n x_k^*(x_0) x_k$ (напомним, что $z_n \to x_0$) и выберем m таким, чтобы $s_m(x_0) \geqslant 2/\delta_0(M)$.

Так как линейный функционал $s_m = \sum\limits_1^m \lambda_k^0 \varepsilon_k x_k^*$ непрерывен, то существует такое N, что при $p \geqslant N$ для $z_p = \sum\limits_1^p x_k^*(x_0) x_k$

$$s_m(z_p) > \frac{1}{\delta_0(M)}.$$

Положим $q = \max(m, N)$, $\delta = \frac{1}{s_m(z_q)}$ и $y_k = -\lambda_k^0 z_q \in M$. По условию последовательность $\{v_k\}_1^\infty = \{x_k + \delta\varepsilon_k y_k\}_1^\infty = \{x_k - \delta\lambda_k^0 \varepsilon_k z_q\}_{k=1}^\infty$ есть базис, эквивалентный $\{x_k\}_1^\infty$. Но

$$\sum_1^q x_k^*(x_0) v_k = z_q - \frac{z_q}{s_m(z_q)} \sum_1^m \varepsilon_k x_k^*(x_0) \lambda_k^0 = 0.$$

Последовательность $\{v_k\}_1^\infty$ линейно зависима и не может быть эквивалентна $\{x_k\}_1^\infty$. Мы пришли к противоречию. Значит, ряд $\sum\limits_1^\infty \varepsilon_k x_k^*$ слабо* безусловно сходится.

Будем называть базис $X=\{x_k\}_1^\infty$ локально выпуклого пространства E устойчивым [8], если для любого ограниченного множества $M\subset E$ существует последовательность чисел $\{\varepsilon_k>0\}_1^\infty$ такая, что при любой последовательности $\{y_k\}_1^\infty\subset M$ последовательность $\{x_k+\varepsilon_k y_k\}_1^\infty$ эквивалентна X. Из теоремы 5 получаем.

Следствие. *Непрерывный базис $\{x_k\}_1^\infty$ в секвенциально полном бочечном ЛВП E устойчив тогда и только тогда, когда в E^* существует ограниченное множество, поглощающее любой функционал сопряженной системы.*

Поскольку замкнутое подпространство бочечного пространства не обязательно бочечно и, более того, как хорошо известно, любое ЛВП является подпространством некоторого бочечного пространства, вопрос об устойчивости минимальных (не обязательно полных) систем, к которому мы переходим, более тонкий (все предыдущие рассуждения существенно использовали бочечность). Одновременно будет рассмотрена устойчивость базисных последовательностей, т. е. базисов в замыкании своей линейной оболочки.

Теорема 6. *Пусть $\{x_k\}_1^\infty$ — минимальная последовательность в полном бочечном пространстве E, $\{x_k^*\}_1^\infty\subset E^*$ $(x_k^*(x_j)=\delta_{kj})$ и ряд $\sum\limits_1^\infty \varepsilon_k x_k^*$ сходится безусловно в слабой* топологии E^*.*

Тогда для любого ограниченного множества $M\subset E$, существует такое $\delta_0>0$, что при $\delta<\delta_0$ и любой $\{y_k\}_1^\infty\subset M$ последовательность $\{x_k+\delta\varepsilon_k y_k\}_1^\infty$ эквивалентна $\{x_k\}_1^\infty$. Таким образом, если $\{x_k\}_1^\infty$ — непрерывная базисная последовательность, то $\{x_k+\delta\varepsilon_k y_k\}_1^\infty$ также базисная последовательность.

Доказательство. Обозначим F — множество всех конечных линейных комбинаций $\{x_k\}_1^\infty$ и $E_1=E(\{x_k\}_1^\infty)$, $F\subset E_1$.

В теореме 5 доказывалось, что поляра множества $K=\left\{f:f=\sum\limits_1^\infty \varepsilon_k\gamma_k x_k^*,\ |\gamma_k|\leqslant 1\right\}$ является окрестностью в E, и следовательно, $K_1^0=K^0\cap E_1$ есть окрестность в E_1.

Определим линейный оператор H на $F\subset E_1\subset E$ по формуле $Hx_k=\varepsilon_k y_k$. Как и при доказательстве теоремы 5, рассмотрим линейное многообразие $L\subset E$, являющееся линейной (не замкнутой) оболочкой множества M^{oo}, и введем на ней норму $\|x\|=p_{M^{oo}}(x)$ (функционал Минковского множества M^{oo}). Формула (4) принимает в этом случае вид

$$H(K^o\cap F)\subset M^{oo},$$

и следовательно, $HF\subset L$. Отсюда видно, что оператор H непрерывно действует из F в L (L в нормированной топологии), а так как L — полное пространство, то H можно распространить по непрерывности на все E_1. Пусть $\delta_0>0$ таково, что $\delta_0 M^{oo}\subset K^o$ и $p(x)$ — функционал Минковского множества K^o; $p(x)$ — непрерывная полунорма в E.

Нетрудно убедиться в справедливости неравенств:

$$\|x\|\geqslant \delta_0 p(x) \quad \text{для всех} \quad x\in L,$$
$$\|Hx\|\leqslant p(x) \quad \text{для всех} \quad x\in E_1.$$

Тогда имеем при любом $\delta>0$ и $x\in E_1$

$$p(\delta Hx)\leqslant \frac{\delta}{\delta_0}\|Hx\|\leqslant \frac{\delta}{\delta_0}p(x).$$

Пусть $U = \{U_\alpha\}$ — фундаментальная система окрестностей нуля в E. Заменим систему U эквивалентной ей фундаментальной системой окрестностей нуля $V = \{V_\alpha\}$, $\{V_\alpha = K^\circ \cap C_\alpha U_\alpha\}$, где $C_\alpha > 0$ таковы, что $C_\alpha U_\alpha \supset \delta_0 M^{\circ\circ}$. Ясно, что $H(V_\alpha \cap E_1) \subset M^{\circ\circ}$ и $\delta_0 M^{\circ\circ} \subset V_\alpha$ при любом $V_\alpha \in V$. Тогда для фундаментальной системы полунорм $Q = \{q_\alpha\}$, соответствующей системе окрестностей $V = \{V_\alpha\}$, т. е. $V_\alpha = \{x : q_\alpha(x) < 1\}$), имеем

$$q_\alpha(\delta Hx) \leqslant \frac{\delta}{\delta_0} \| Ax \| \leqslant \frac{\delta}{\delta_0} q_\alpha(x).$$

Если $\delta < \delta_0$, то

$$q_\alpha(x + \delta Hx) \geqslant \left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right) q_\alpha(x) \tag{5}$$

при любой $q_\alpha \in Q$.

Определим линейный оператор $A : E_1 \to E$, $Ax = x + \delta Hx$, $x \in E_1$. Оператор A непрерывен, используя неравенство (5) и полноту E, легко показать, что подпространство $E_2 = AE_1 \subset E$ замкнуто. Кроме того, неравенство (5) показывает, что существует отображение $A^{-1} : E_2 \to E_1$ и для всех $x \in E_2$

$$q_\alpha(A^{-1}x) \leqslant \frac{\delta_0}{\delta_0 - \delta} q_\alpha(x),$$

т. е. A^{-1} непрерывен. Для завершения доказательства осталось заметить, что $E_2 = E(\{x_k + \delta\varepsilon_k y_k\}_1^\infty)$, а неравенство (5) показывает, что если $E(\{x_k\}_1^\infty) = E$, то и $E_2 = E$.

Замечания. 1. Как видно из доказательства теоремы 5, слабая* безусловная сходимость ряда $\sum\limits_1^\infty \varepsilon_k x_k^*$ необходима для устойчивости базиса не только в бочечных пространствах, а и в произвольных ЛВП.

2. Теорема 6 показывает, что минимальные системы, удовлетворяющие условиям теоремы 5, устойчивы. Так как пополнение бочечного пространства есть снова бочечное пространство ([6], стр. 159), условия теоремы 6 можно ослабить, не требуя полноты E. Естественно, определяя эквивалентность последовательностей $\{x_k\}_1^\infty$ и $\{x_k + \delta\varepsilon_k y_k\}_1^\infty$, мы теперь можем только требовать, чтобы изоморфизм A был определен лишь на конечных линейных комбинациях $\{x_k\}_1^\infty$.

Автор приносит глубокую благодарность В. Д. Мильману за руководство работой и ценные указания.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн, Д. П. Мильман, М. А. Рутман. Об одном свойстве базиса в пространстве Банаха. Зап. матем. о-ва (5), 16, Харьков, 1940.
2. И. Ц. Гохберг, А. С. Маркус. Об устойчивости базисов банаховых и гильбертовых пространств. Изв. АН Молд. ССР, № 6 (1962).
3. В. Д. Мильман. О возмущении последовательностей элементов пространства Банаха. «Сибирск. матем. ж.,» 6, № 2, (1965).
4 Б. Е. Вейц. О некоторых свойствах устойчивости базисов ДАН СССР, 158, № 1 (1964).
5. Н. Бурбаки. Топологические векторные пространства. ИЛ, М., 1959.
6. А. Робертсон, В. Робертсон. Топологические векторные пространства Изд-во «Мир», 1967.
7. Gelfand I. M. Abstrakte Funktionen und linear Operatoren. «Математ сб.», 4 (46), № 3, 1938.
8. В. Д. Мильман, Ю. Б. Тумаркин. Свойства последовательностей в локально-выпуклых пространствах. ДАН СССР, 184, № 2, 1969.
9. G. Bessaga and Pelczinski. An Extentions of the Krein — Milman — Rutman theorem Concerning Bases to the Case of Bo — Spases. Bull. de L'Akademie Polonaise des Sciens. Cl. III — Vol. V, No 4, 1957.
10. Л. Е. Лерер. ДАН СССР, 184; № 1 (1969).

Поступила 25 декабря 1969 г.