АНАЛИТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ НА КОМПЛЕКСНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В. Д. Головин

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема: *при каждом $k = 0, 1, 2, \ldots$ группа когомологий $H^k(X; O_X)$ комплексного аналитического пространства X, счетного в бесконечности и локально гладко стягиваемого, с коэффициентами в структурном пучке O_X канонически изоморфна группе когомологий $H^k(\Gamma(X; A_X^{0,*}))$ коцепного комплекса аналитических дифференциальных форм $\Gamma(X; A_X^{0,*}) = (\Gamma(X; A_X^{0,q}))_{q \geqslant 0}$ с внешним дифференциалом d'' в качестве кограничного оператора.*

1. Пусть M — аналитическое множество в области G комплексного n-мерного числового пространства C^n. Для любых целых p, $q \geqslant 0$ обозначим через $A_G^{p,q}$ пучок ростков внешних дифференциальных форм двойной степени (p, q) в области G с аналитическими коэффициентами (относительно вещественных координат в G); кроме того, пусть $A_G^{p,q} = 0$, если $p < 0$ или $q < 0$. Положим

$$R_M^{p,q} = (I + \bar{I})\, A_G^{p,q} + dI \wedge A_G^{p-1,q} + d\bar{I} \wedge A_G^{p,q-1},$$

где I — пучок идеалов аналитического множества M, а d — внешний дифференциал. Пучок

$$A_M^{p,q} = A_G^{p,q} / R_M^{p,q} \mid M,$$

являющийся сужением на M факторпучка $A_G^{p,q}/R_M^{p,q}$, назовем пучком ростков аналитических внешних дифференциальных форм двойной степени (p, q) на аналитическом множестве M.

Пусть X — комплексное аналитическое пространство (в смысле А. Картана и Ж.-П. Серра [1]) со структурным пучком O_X и (U_i) — достаточно мелкое покрытие пространства X связными открытыми множествами. Тогда по определению для каждого i существует гомеоморфизм $\tau_i : U_i \to M_i$ множества U_i на некоторое аналитическое множество M_i в области G_i пространства C^{n_i}, и канонический гомоморфизм

$$\tau_i^* (O_{G_i}/I_i \mid M_i) \to O_X \mid U_i$$

является изоморфизмом. Композиция $\tau_i \cdot \tau_j^{-1}$ индуцирует гомеоморфизм аналитического множества $M_{ji} = \tau_j (U_i \cap U_j)$ на аналитическое множество $M_{ij} = \tau_i (U_i \cap U_j)$. Этот гомеоморфизм является сужением некоторого голоморфного отображения $\varphi_{ji} : G_{ji} \to G_{ij}$ некоторой открытой окрестности G_{ji} множества M_{ji} в окрестность G_{ij} множества M_{ij}.

Пусть V — открытое множество в G_{ij} и ω — дифференциальная форма в V, имеющая вид

$$\omega = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha, \beta}\, dw_\alpha \wedge d\bar{w}_\beta,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots \alpha_p)$, $\beta = (\beta_1, \ldots \beta_q)$, $dw_\alpha = dw_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dw_{\alpha_p}$, $d\bar{w}_\beta = d\bar{w}_{\beta_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{w}_{\beta_q}$ и $a_{\alpha, \beta} = a_{\alpha, \beta} (w, \bar{w})$ — аналитические функции в V. Форме ω сопоставим форму

$$\omega \cdot \varphi_{ji} = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha, \beta} \cdot \varphi_{ji} d\varphi_\alpha \wedge d\bar{\varphi}_\beta$$

в $\varphi_{ji}^{-1}(V)$, где $a_{\alpha, \beta} \cdot \varphi_{ji} = a_{\alpha, \beta} (\varphi_{ji}, \bar{\varphi}_{ji})$ и $\varphi_{ji} = (\varphi_1, \ldots \varphi_n)$. При этом, если $\omega \in R^{p, q}_{M_{ij}}(V)$, то $\omega \cdot \varphi_{ji} \in R^{p, q}_{M_{ji}} (\varphi_{ji}^{-1}(V))$, ибо

$$I_i (V) \cdot \varphi_{ji} \subset I_j (\varphi_{ji}^{-1}(V)).$$

Тем самым для каждой пары индексов (i, j) над пересечением $U_i \cap U_j$ определен гомоморфизм пучков

$$\rho_{ij} : \tau_i^* (A^{p, q}_{M_i}) \to \tau_j^* (A^{p, q}_{M_j}),$$

так как $\tau_i^* (A^{p, q}_{M_i})_X = A^{p, q}_{M_i, \tau_i(x)}$ и $\tau_j^*(A^{p, q}_{M_j})_x = A^{p, q}_{M_j, \tau_j (x)}$ для каждого x из пересечения $U_i \cap U_j$.

Пусть ψ_{ji} — еще одно голоморфное отображение $G_{ji} \to G_{ij}$, обладающее теми же свойствами, что и φ_{ji}. Покажем, что ψ_{ji} индуцирует тот же гомоморфизм пучков ρ_{ij}. Действительно, если $\omega \in A^{p, q}_{G_{ij}}(V)$, $V \subset G_{ij}$, то разность $\omega \cdot \psi_{ji} - \omega \cdot \varphi_{ji}$ представима в виде суммы выражений трех типов:

$$(a_{\alpha, \beta} \cdot \psi_{ji} - a_{\alpha, \beta} \cdot \varphi_{ji})\, d\psi_\alpha \wedge d\bar{\psi}_\beta;$$

$$a_{\alpha, \beta} \cdot \varphi_{ji} d\varphi_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge d (\psi_{\alpha_s} - \varphi_{\alpha_s}) \wedge \cdots \wedge d\psi_{\alpha_p} \wedge d\bar{\psi}_\beta;$$

$$a_{\alpha, \beta} \cdot \varphi_{ji} d\varphi_\alpha \wedge d\bar{\varphi}_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge d (\bar{\psi}_{\beta_t} - (\bar{\varphi}_{\beta_t}) \wedge \cdots \wedge d\bar{\psi}_{\beta_q}.$$

Так как отображения φ_{ji} и ψ_{ji} совпадают на M_{ji}, то разность $a_{\alpha, \beta} \cdot \psi_{ji} - a_{\alpha, \beta} \cdot \varphi_{ji}$ определяет сечение пучка $(I_j + \bar{I}_j) A^{0, 0}_{G_{ji}}$ над пересечением $\varphi_{ji}^{-1}(V) \cap \psi_{ji}^{-1}(V)$. Следовательно, формы перечисленных выше трех типов принадлежат группе сечений пучка $R^{p, q}_{M_{ji}}$ над $\varphi_{ji}^{-1}(V) \cap \psi_{ji}^{-1}(V)$.

Итак, гомоморфизм ρ_{ij} не зависит от выбора отображения φ_{ji}, которым он индуцируется; аналогичное утверждение справедливо для гомоморфизма ρ_{ji}. Отсюда следует, что ρ_{ij} является изоморфизмом; кроме того, ρ_{ii} при каждом i — тождественный изоморфизм и над пересечением $U_i \cap U_j \cap U_k$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\tau_i^*(A^{p,q}_{M_i}) \arrow[rr, "\rho_{ij}"] \arrow[dr, "\rho_{ik}"'] & & \tau_j^*(A^{p,q}_{M_j}) \arrow[dl, "\rho_{jk}"] \\
& \tau_k^*(A^{p,q}_{M_k}) &
\end{tikzcd}$$

для каждой тройки индексов (i, j, k). Таким образом [2, п. 4], на X существует и притом единственный с точностью до изоморфизма пучок $A_X^{p,q}$, для которого над каждым U_i имеет место изоморфизм

$$\zeta_i : \tau_i^* (A^{p,q}_{M_i}) \to A_X^{p,q}$$

так, что над пересечением $U_i \bigcap U_j$ для каждой пары индексов (i, j) диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\tau_i^*(A^{p,q}_{M_i}) \arrow[rr, "\rho_{ij}"] \arrow[dr, "\zeta_i"'] & & \tau_j^*(A^{p,q}_{M_j}) \arrow[dl, "\zeta_j"] \\
& A^{p,q}_X &
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Пучок $A_X^{p,q}$ назовем *пучком ростков аналитических дифференциальных форм двойной степени* (p, q) *на комплексном пространстве* $\boldsymbol{X}$; сечения пучка $A_X^{p,q}$ будем называть *аналитическими дифференциальными формами.*

Пусть M — аналитическое множество в области G пространства $\boldsymbol{C}^n$. Внешний дифференциал $d'' : A_G^{p,q} \to A_G^{p,q+1}$ индуцирует гомоморфизм пучков

$$d'' : A_M^{p,q} \to A_M^{p,q+1}.$$

Если X — комплексное пространство и пучок $A_X^{p,q}$ определен, как выше, с помощью пучков $A^{p,q}_{M_i}$, то для каждой пары индексов (i, j) над пересечением $U_i \bigcap U_j$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\tau_i^* (A^{p,q}_{M_i}) \arrow[r, "d''"] \arrow[d, "\rho_{ij}"'] & \tau_i^* (A^{p,q+1}_{M_i}) \arrow[d, "\rho_{ij}"] \\
\tau_j^* (A^{p,q}_{M_j}) \arrow[r, "d''"] & \tau_j^* (A^{p,q+1}_{M_j})
\end{tikzcd}$$

Следовательно, существует гомоморфизм пучков

$$d'' : A_X^{p,q} \to A_X^{p,q+1},$$

являющийся внешним дифференциалом двойной степени (0, 1), для которого над каждым U_i диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\tau_i^* (A^{p,q}_{M_i}) \arrow[r, "d''"] \arrow[d, "\zeta_i"'] & \tau_i^* (A^{p,q+1}_{M_i}) \arrow[d, "\zeta_i"] \\
A_X^{p,q} \arrow[r, "d''"] & A_X^{p,q+1}
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Аналогично может быть определен гомоморфизм пучков

$$d' : A_X^{p,q} \to A_X^{p+1,q},$$

являющийся внешним дифференциалом двойной степени (1, 0).

Наконец, заметим, что обычным образом может быть определено внешнее умножение

$$\wedge : A_X^{p,q} \times A_X^{p',q'} \to A_X^{p+p',q+q'};$$

в частности,

$$A_X^{p,q} \approx (\wedge^p A_X^{1,0}) \otimes (\wedge^q A_X^{0,1}).$$

2. Пусть M — аналитическое множество в области G пространства C^n. Обозначим через $N_M^{p,q}$ пучок ростков аналитических дифференциальных форм на G двойной степени (p, q) с коэффициентами, равными нулю на M. Положим

$$S_M^{p,q} = N_M^{p,q} + d' N_M^{p-1,q} + d'' N_M^{p,q-1}$$

и назовем пучок

$$K_M^{p,q} = A_G^{p,q} / S_M^{p,q} \mid M$$

каноническим пучком аналитических дифференциальных форм двойной степени (p, q) на M.

Если аналитическое множество M локально неприводимо, т. е. если росток множества M в каждой точке неприводим, то

$$N_M^{p,q} = (I + \bar{I}) A_G^{p,q},$$

где I — пучок идеалов множества M (см. [3]). Следовательно, в этом случае пучки $A_M^{p,q}$ и $K_M^{p,q}$ совпадают.

Пусть X — комплексное аналитическое пространство и (U_i) — его достаточно мелкое покрытие связными открытыми множествами. Тогда при каждом i существует гомеоморфизм $\tau_i : U_i \to M_i$ множества U_i на аналитическое множество M_i в области G_i пространства C^{n_i}. Так же, как в пункте 1, можно показать, что над каждым пересечением $U_i \cap U_j$ имеет место изоморфизм

$$\sigma_{ij} : \tau_i^* (K_{M_i}^{p,q}) \to \tau_j^* (K_{M_j}^{p,q}),$$

причем для каждого i σ_{ii} — тождественный изоморфизм и над пересечением $U_i \cap U_j \cap U_k$ для каждой тройки индексов (i, j, k) диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\tau_i^*(K^{p,q}_{M_i}) \arrow[rr, "\sigma_{ij}"] \arrow[dr, "\sigma_{ik}"'] & & \tau_j^*(K^{p,q}_{M_j}) \arrow[dl, "\sigma_{jk}"] \\
& \tau_k^*(K^{p,q}_{M_k}) &
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Следовательно, на X существуют единственный с точностью до изоморфизма пучок $K_X^{p,q}$ и такие изоморфизмы

$$\xi_i : \tau_i^* (K_{M_i}^{p,q}) \to K_X^{p,q}$$

над U_i при каждом i, что над пересечением $U_i \cap U_j$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \tau_i^*(K^{p,q}_{M_i}) \arrow[rr, "\sigma_{ij}"] \arrow[dr, "\xi_i"'] & & \tau_j^*(K^{p,q}_{M_j}) \arrow[dl, "\xi_j"] \\ & K^{p,q}_X & \end{tikzcd}$$

для каждой пары индексов (i, j). Пучок $K_X^{p,q}$ будем называть каноническим пучком аналитических дифференциальных форм двойной степени (p, q) на X.

Для произвольного комплексного пространства X имеет место эпиморфизм пучков

$$A_X^{p,q} \to K_X^{p,q},$$

вообще говоря, не инъективный. Если пространство X локально неприводимо, то пучки $A_X^{p,q}$ и $K_X^{p,q}$ канонически изоморфны. В частности, если S — множество сингулярных точек пространства X, то $X' = X \setminus S$ является многообразием, поэтому

$$A_X^{p,q} \approx K_X^{p,q} \text{ на } X'.$$

Так как на X' пучок $K_X^{p,q}$ индуцирует пучок $A_{X'}^{p,q}$ ростков обычных аналитических дифференциальных форм многообразия X', то имеет место канонический изоморфизм

$$A_X^{p,q} \,|\, X' \approx A_{X'}^{p,q},$$

т. е. $A_X^{p,q}$ также индуцирует на X' пучок $A_{X'}^{p,q}$.

3. Пусть M — аналитическое множество в области G пространства $\mathbf{C}^n$. Будем говорить, что множество M *гладко стягиваемо к точке* $z_0 \in M$, если существуют область $G_0 \subset G$, содержащая M, и отображение

$$\varphi : [0, 1] \times G_0 \to G_0,$$

удовлетворяющие следующим условиям:

1) $\varphi([0, 1] \times M) \subset M$;

2) для каждой голоморфной функции f на G_0 отображение $t \to f(\varphi(t, z))$ есть непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[0, 1]$ со значениями из пространства $O(G_0)$ голоморфных функций в G_0 (наделенного обычной топологией);

3) $\varphi(0, z) = z_0$ и $\varphi(1, z) = z$ при каждом $z \in G_0$.

Аналитическое множество M будем называть *локально гладко стягиваемым*, если каждая его точка обладает фундаментальной системой гладко стягиваемых связных открытых окрестностей.

Аналитическое множество M будем называть *покомпонентно гладко стягиваемым к точке* $z_0 \in M$, если M гладко стягиваемо к этой точке (т. е. существует отображение φ, удовлетворяющее условиям 1), 2), 3)) и является объединением конечного числа аналитических множеств $M_1, \ldots M_k$, неприводимых в точке z_0, так, что

$$\varphi([0, 1] \times M_i) \subset M_i \quad (i = 1, \ldots k),$$

т. е. каждое M_i $(i = 1, \ldots k)$ стягиваемо по себе к точке z_0. Аналогично будем говорить, что аналитическое множество M *локально покомпонентно гладко стягиваемо*, если каждая точка в M обладает фундаментальной системой покомпонентно гладко стягиваемых связных открытых окрестностей.

Комплексное аналитическое пространство X будем называть *локально гладко стягиваемым* (соответственно *локально покомпонентно гладко стягиваемым*), если для каждой точки $x \in X$ существует гомеоморфизм $\tau : U \to M$

некоторой связной открытой окрестности U точки x на локально гладко стягиваемое (соответственно локально покомпонентно гладко стягиваемое) аналитическое множество M в области G пространства $\boldsymbol{C}^n$, такой, что канонический гомоморфизм пучков

$$\tau^*(O_G/I \mid M) \to O_X \mid U$$

является изоморфизмом.

4. Пусть X — локально гладко стягиваемое комплексное аналитическое пространство. Покажем, что последовательность пучков и гомоморфизмов

$$0 \to O_X \to A_X^{0,0} \xrightarrow{d''} A_X^{0,1} \xrightarrow{d''} \ldots$$

точна.

Так как утверждение имеет по существу локальный характер, достаточно рассмотреть вместо X произвольное локально гладко стягиваемое аналитическое множество M в области G пространства $\boldsymbol{C}^n$.

Пусть z_0 — произвольная точка множества M. Выберем область $G_0 \subset G$, содержащую z_0, так, чтобы существовало отображение $\varphi: [0, 1] \times G_0 \to G_0$, удовлетворяющее условиям 1), 2), 3) пункта 3 (в условии 1) следует заменить M на $M \cap G_0$).

Рассмотрим аналитическую дифференциальную форму ω в G_0 двойной степени $(0, k)$, имеющую вид

$$\omega(z, \bar z) = \sum_j a_j(z, \bar z)\, d\bar z_j,$$

где $j = (j_1, \ldots j_k)$, $z = (z_1, \ldots z_n)$, $d\bar z_j = d\bar z_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar z_{j_k}$, $a_j(z, \bar z)$ — аналитические функции. Обозначим через ω_t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ форму

$$\omega(z, \overline{\varphi(t, z)}) = \sum_j a_j(z, \overline{\varphi(t, z)})\, d\overline{\varphi_j(t, z)}$$

в G_0, где $\varphi = (\varphi_1, \ldots \varphi_n)$. Тогда

$$\omega_t = \alpha_t + dt \wedge \beta_t,$$

причем α_t и β_t не содержат dt и являются формами в G_0 соответственно двойной степени $(0, k)$ и $(0, k-1)$.

Предположим, что $d''\omega = 0$. Тогда

$$d''\beta_t = \frac{\partial \alpha_t}{\partial t},$$

где $\beta \to d''\beta$ — внешнее дифференцирование по $\bar z$ и $\alpha \to \frac{\partial \alpha}{\partial t}$ — дифференцирование коэффициентов формы α по t. Положим

$$\gamma = \int_0^1 \beta_t\, dt;$$

тогда γ — аналитическая дифференциальная форма двойной степени $(0, k-1)$ в G_0 и

$$d''\gamma = \int_0^1 \frac{\partial \alpha_t}{\partial t}\, dt = \alpha_1 - \alpha_0 = \omega.$$

Тем самым доказана (ср. [5], [6]) точность последовательности

$$0 \to O_G \to A_G^{0,0} \xrightarrow{d''} A_G^{0,1} \xrightarrow{d''} \ldots \longrightarrow A_G^{0,n} \longrightarrow 0.$$

Область G_0 выберем теперь так, чтобы для любой голоморфной функции f в G_0, равной нулю на $M \cap G_0$, имело место разложение

$$f \cdot \varphi = a_1 f_1 + \cdots + a_s f_s,$$

е $f_1, \ldots f_s$ — голоморфные функции в G_0, равные нулю на $M \cap G_0$ (и не висящие от t), а $a_1, \ldots a_s$ — непрерывно дифференцируемые функции [0, 1] со значениями из $O(G_0)$ (ср. п. 3). Тогда для каждой формы ω из $\Gamma(G_0;\ R_M^{0,k})$ форма γ принадлежит $\Gamma(G_0;\ R_M^{0,k-1})$; следовательно, последовательность

$$0 \to I \to R_M^{0,0} \xrightarrow{d''} R_M^{0,1} \xrightarrow{d''} \cdots$$

точна и наше утверждение доказано.

Аналогично можно доказать, что для локально покомпонентно гладко стягиваемого комплексного пространства X последовательность пучков и гомоморфизмов

$$0 \to O_X \to K_X^{0,0} \xrightarrow{d''} K_X^{0,1} \xrightarrow{d''} \cdots$$

точна.

5. Существует несколько различных определений голоморфных дифференциальных форм на комплексных пространствах (см. [7]). Нам понадобится определение Грауэрта и Кернера ([8], а также [6]).

Пусть M — аналитическое множество в области G пространства $\boldsymbol{C}^n$ и Ω_G^p — пучок ростков голоморфных дифференциальных форм степени p на G. Пучок

$$\Omega_M^p = \Omega_G^p / (I\Omega_G^p + dI \wedge \Omega_G^{p-1}) \mid M,$$

где I — пучок идеалов множества M, называется пучком ростков голоморфных дифференциальных форм степени p на M.

Пусть X — комплексное аналитическое пространство и (U_i) — достаточно мелкое его покрытие связными открытыми множествами. Тогда существуют гомеоморфизмы $\tau_i : U_i \to M_i$ и изоморфизмы пучков $\tau_i^*(O_{G_i}/I_i \mid M_i) \to O_X \mid U_i$ (ср. п. 1). Так же, как в пункте 1, можно доказать существование над каждым пересечением $U_i \cap U_j$ изоморфизма

$$\tau_i^*(\Omega_{M_i}^p) \to \tau_j^*(\Omega_{M_j}^p),$$

являющегося тождественным при $i = j$ и над каждым пересечением $U_i \cap U_j \cap U_k$ входящего в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \tau_i^*(\Omega_{M_i}^p) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \tau_j^*(\Omega_{M_j}^p) \arrow[dl] \\ & \tau_k^*(\Omega_{M_k}^p) & \end{tikzcd}$$

Следовательно, на X можно определить единственный с точностью до изоморфизма пучок Ω_X^p, для которого над каждым U_i существует изоморфизм

$$\tau_i^*(\Omega_{M_i}^p) \to \Omega_X^p,$$

ходящий в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \tau_i^*(\Omega^p_{M_i}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \tau_j^*(\Omega^p_{M_j}) \arrow[dl] \\ & \Omega^p_X & \end{tikzcd}$$

над каждым пересечением $U_i \cap U_j$. Пучок Ω^p_X называется пучком ростков голоморфных дифференциальных форм степени p на X.

Так же, как в пункте 4, можно доказать, что для локально гладко стягиваемого пространства X последовательность пучков и гомоморфизмов

$$0 \to C \to O_X \xrightarrow{d} \Omega^1_X \xrightarrow{d} \Omega^2_X \xrightarrow{d} \cdots$$

точна. Рейфен [6] доказал это утверждение в предположении, что пространство X локально голоморфно стягиваемо.

Пучок Ω^p_X когерентен как (комплексный) аналитический пучок; следовательно, если пространство X голоморфно полно, то по теореме В. А. Картана [9]

$$H^k(X;\ \Omega^p_X) = 0 \quad (k \geqslant 1;\ p \geqslant 0).$$

В таком случае имеют место изоморфизмы

$$H^k(X;\ C) \approx H^k(\Gamma(X;\ \Omega^*_X)) \quad (k \geqslant 0)$$

для голоморфно полного, локально гладко стягиваемого пространства X, где $\Gamma(X;\ \Omega^*_X)$ — коцепной комплекс групп $\Gamma(X;\ \Omega^p_X)$ $(p \geqslant 0)$ с внешним дифференциалом d в качестве кограничного оператора.

6. Пусть G — область в комплексном n-мерном числовом пространстве C^n и O_G — пучок ростков голоморфных функций в G. Отображение $z \to \bar{z}$ является гомеоморфизмом области G на комплексно сопряженную область $\bar{G}$, а отображение

$$s(z) \to \overline{s(\bar{z})}$$

— антиизоморфизмом пучка комплексных алгебр O_G на пучок комплексных алгебр $O_{\bar{G}}$. При этом диаграмма

$$\begin{tikzcd} O_G \arrow[r] \arrow[d] & O_{\bar{G}} \arrow[d] \\ G \arrow[r] & \bar{G} \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Пусть X — комплексное аналитическое пространство со структурным пучком O_X. Тогда для каждого достаточно мелкого связного открытого множества $U \subset X$ существует гомеоморфизм τ: $U \to M$ на аналитическое множество M в области G пространства C^n; при этом канонический гомоморфизм

$$\tau^*(O_G/I \mid M) \to O_X \mid U,$$

где I — пучок идеалов множества M, является изоморфизмом. Положим $O_{\bar{X}} = \bar{O}_X$ и покажем, что пространство X, наделенное пучком $O_{\bar{X}}$, является комплексным аналитическим пространством.

Пусть $\bar{\tau}: U \to \bar{M}$ — гомеоморфизм множества U на аналитическое множество $\bar{M}$ в области $\bar{G}$, получающийся как композиция гомеоморфизма τ и отображения $z \to \bar{z}$. Тогда канонический гомоморфизм

$$\bar{\tau}^*(O_{\bar{G}}/J \mid \bar{M}) \to O_{\bar{X}} \mid U,$$

где J — пучок идеалов множества $\overline{M}$ в $O_{\overline{G}}$, является изоморфизмом; это следует из замечания, сделанного в начале настоящего пункта. Утверждение доказано.

Пусть топологическое пространство X наделено пучком $O_{\overline{X}}$. Условимся в таком случае обозначать произвольную точку $x \in X$ через $\bar{x}$. Полученное комплексное пространство со структурным пучком $O_{\overline{X}}$ обозначим через $\overline{X}$ и назовем комплексно сопряженным к X.

На произведении $X \times \overline{X}$ определим естественным образом структурный пучок $O_{X \times \overline{X}}$, превратив это произведение в комплексное аналитическое пространство (см. [1]). Обозначим через $\Omega^{p,q}$ подпучок пучка $\Omega^{p+q}_{X \times \overline{X}}$, состоящий из ростков голоморфных дифференциальных форм на $X \times \overline{X}$ степени p относительно X и степени q относительно $\overline{X}$. Если

$$\Delta : X \to X \times \overline{X}$$

— диагональное отображение, т. е. $\Delta(x) = (x, \bar{x})$ при каждом $x \in X$, то

$$\Delta^* (\Omega^{p,q}) = A_X^{p,q}.$$

Пространство X рассмотрим как вещественное аналитическое пространство. Тогда произведение $X \times \overline{X}$ является его комплексификацией (см. [10]). Если пространство X счетно в бесконечности, то аналогично Грауэрту [11] можно показать, что диагональ $\Delta(X)$ произведения $X \times \overline{X}$ обладает фундаментальной системой окрестностей, являющихся голоморфно полными комплексными пространствами. Следовательно (ср. [10]),

$$H^k (X;\ A_X^{p,q}) \approx H^k (\Delta(X);\ \Omega^{p,q}) = 0$$

при $k \geqslant 1$. Отсюда получаем, в силу обычных соображений, что для любого локально гладко стягиваемого комплексного пространства X, счетного в бесконечности, имеют место изоморфизмы

$$H^k (X;\ O_X) \approx H^k (\Gamma (X;\ A_X^{0,*})) \quad (k \geqslant 0).$$

Аналогично можно получить изоморфизмы

$$H^k (X;\ O_X) \approx H^k (\Gamma (X;\ K_X^{0,*})) \quad (k \geqslant 0)$$

при условии, что счетное в бесконечности комплексное пространство X локально покомпонентно гладко стягиваемо.

ЛИТЕРАТУРА

1. J.-P. Serre. Geométrie algebrique et geometrie analytique. Ann. Inst. Fourier, **6** (1955—1956), 1—42.

2. Ж.-П. Серр Когерентные алгебраические пучки. Сб. «Расслоение пространства и их приложения», ИЛ., М., 1958.

3 В. Д. Головин. Об идеалах аналитических множеств. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», 11 (1970), 81—85.

4. М. Эрве. Функции многих комплексных переменных (Локальная теория). Изд-во «Мир», М., 1965.

5 P. Dolbeault. Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe, Ann. of Math. **64**, № 1 (1956), 83—130.

6. H.-J. Reiffen. Das Lemma von Poincaré für holomorphe Differentialformen auf komplexen Räumen, Math., Zeitschr., **101**, №4 (1967), 269—284.

7. H.-J. Reiffen, U. Vetter. Pfaffsche Formen auf komplexen Räumen, Math. Ann., **167**, № 4 (1966), 338—350.

8. H. Grauert, H. Kerner. Deformationen von Singularitäten komplexer Räume, Math. Ann., **153**, № 3 (1964), 236—260.

9. А. Картан. Комплексные аналитические многообразия и когомологии. Сб. «Расслоенные пространства и их приложения», ИЛ., М., 1958.

10. H. Cartan. Variétés analytiques reeles et variétés analytiques complexes, Bull. Soc. Math. France, **85**, № 1 (1957), 77—99.

11. Г. Грауэрт. О проблеме Леви и вложении вещественно-аналитических многообразий. Сб. «Математика», **4**: 3, (1960), 29—40.

Поступила 25 декабря 1970 г.