МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В БИЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

В. А. Какичев

В данной статье используются обозначения и результаты работы [1].

Напомним, что задача линейного сопряжения для функций, голоморфных в бицилиндрических областях $D^+ \times \Delta^+$, $D^\pm \times \Delta^\mp$ и $D^- \times \Delta^-$, состоит в отыскании четырех функций $\Phi^{++}(z, w) \in H^{++}$, $\Phi^{\pm\mp}(z, w) \in H_0^{\pm\mp}$ и $\Phi^{--}(z, w) \in H_0^{--}$ по предельному соотношению

$$A(t, \omega)\Phi^{++}(t, \omega) - B(t, \omega)\Phi^{-+}(t, \omega) - C(t, \omega)\Phi^{+-}(t, \omega) + \\ +D(t, \omega)\Phi^{--}(t, \omega) = f(t, \omega), (t, \omega) \in C \times \Gamma, \qquad (0.1)$$

где $C \times \Gamma = \partial D^\pm \times \partial\Delta^\pm$ — общий остов границ рассматриваемых бицилиндрических областей, A, B, C, D и f — заданные функции класса H — функции, удовлетворяющие на $C \times \Gamma$ условию Гельдера.

Пусть N — множество линейно-независимых решений однородной ($f \equiv 0$) задачи (0.1), а M — множество линейно-независимых условий разрешимости (функционалов) соответствующей неоднородной задачи. Возможны следующие ситуации:

а) $\dim N < +\infty$, $\dim M < +\infty$; б) $\dim N = +\infty$, $\dim M < +\infty$;
в) $\dim N < +\infty$, $\dim M = +\infty$; г) $\dim N = \dim M = +\infty$. (0.2).

Величину $\varkappa = \dim N - \dim M$ будем называть индексом задачи (0.1) и соответственно в случаях а), б), в) и г) говорить, что индекс конечен, положительно полубесконечен, отрицательно полубесконечен и просто бесконечен. Задача (0.1) называется нетеровой, если ее индекс $\varkappa$ конечен. Необходимые и достаточные условия нетеровости задачи (0.1) даны в [2].

При

$$A = 1,\ B = t^r\omega^\rho,\ C = t^n\omega^\nu,\ D = t^m\omega^\mu, \qquad (0.3)$$

где r, ρ, n, ν и m, μ — целые числа, задача линейного сопряжения в [1] была названа элементарной. Она является удобной моделью для иллюстрации всех качественно различных случаев (0.2). Кроме того (см. § 2 и § 3 этой статьи) многие другие задачи линейного сопряжения могут быть сведены к решению конечного числа элементарных задач и задач, разрешимых методом факторизации [1]. В работе [1] в начале пункта 2.3° автором была допущена ошибка, которая привела к тому, что формулы (3.4) этой работы, использованные им позднее и в [3], не точны.

В § 1 данной статьи приведено правильное и, как кажется автору, геометрически наглядное решение элементарной задачи.

В § 2 (§ 3) исследуется класс задач линейного сопряжения, разрешимых методом последовательного исключения предельных значений (разделения предельных значений).

§ 1. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ

1.1°. Для описания множеств N и M элементарной задачи линейного сопряжения, а следовательно, для нахождения общего решения однородной задачи (0.1), (0,3), условий разрешимости и частного решения соответствующей неоднородной задачи, удобен некоторый геометрический язык, к описанию которого мы и переходим.

Каждой функции $f \in H$ сопоставим с помощью интеграла типа Коши $F(z, w) = K(f)$ четыре функции

$$F^{\pm\pm}(z, w) = K(f) \text{ при } (z, w) \in D^{\pm} \times \Delta^{\pm}$$

соответственно классов $H_0^{\pm\pm}$ $(H_0^{++} \equiv H^{++})$, а каждой такой функции сопоставим в окрестности соответствующей точки вида $(0, 0)$, $(0, \infty)$, $(\infty, 0)$ и (∞, ∞) ряд Лорана

$$F^{++}(z, w) = \sum_{k, l=0}^{\infty} F_{kl} z^k w^l, \quad F^{+-}(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} F_{k, -l} z^k w^{-l},$$

$$F^{-+}(z, w) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} F_{-k, l} z^{-k} w^l, \quad F^{--}(z, w) = \sum_{k, l=1}^{\infty} F_{-k, -l} z^{-k} w^{-l}. \tag{1.1}$$

Далее, каждому ряду Лорана $F^{++}(z, w)$, $F^{+-}(z, w)$, $F^{-+}(z, w)$ и $F^{--}(z, w)$ соответственно сопоставим множество $Z^{++} = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ \infty, & \infty \end{pmatrix}$, $Z^{+-} = \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ \infty, & -\infty \end{pmatrix}$, $Z^{-+} = \begin{pmatrix} -1, & 1 \\ -\infty, & \infty \end{pmatrix}$ и $Z^{--} = \begin{pmatrix} -1, & -1 \\ -\infty, & -\infty \end{pmatrix}$ индексов его коэффициентов F_{kl}. Каждое из множеств $Z^{\pm\pm}$ и $Z^{\pm\mp}$ есть квадрант-решетка в $Z \times Z$, где Z — множество целых чисел, а их объединение дает всю решетку $Z \times Z$. Операции умножения, например, функции $F^{-+}(z, w)$ на моном $z^r w^\rho$ соответствует сдвиг решетки Z^{-+} в решетку $Z_{r\rho}^{-+} = \begin{pmatrix} r-1, & \rho \\ -\infty, & \infty \end{pmatrix}$, и наоборот. Следовательно, функциям $\Phi^{++}(z, w)$, $z^n w^\nu \Phi^{+-}(z, w)$, $z^r w^\rho \Phi^{-+}(z, w)$ и $z^m w^\mu \Phi^{--}(z, w)$ отвечают такие решетки: $Z^{++} = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ \infty, & \infty \end{pmatrix}$, $Z_{n\nu}^{+-} = \begin{pmatrix} n, & \nu - 1 \\ \infty, & -\infty \end{pmatrix}$, $Z_{r\rho}^{-+} = \begin{pmatrix} r-1, & \rho \\ -\infty, & \infty \end{pmatrix}$ и $Z_{m\mu}^{--} = \begin{pmatrix} m-1, & \mu - 1 \\ -\infty, & -\infty \end{pmatrix}$.

Положим

$$Z^0 = Z^{++} \cap Z_{n\nu}^{+-} \cap Z_{r\rho}^{-+} \cap Z_{m\mu}^{--},$$

$$Z^1 = (Z_{n\nu}^{+-} \cap Z_{r\rho}^{-+} \cap Z_{m\mu}^{--}) \setminus Z^0, \quad Z^2 = (Z^{++} \cap Z_{r\rho}^{-+} \cap Z_{m\mu}^{--}) \setminus Z^0,$$

$$Z^3 = (Z^{++} \cap Z_{n\nu}^{+-} \cap Z_{m\mu}^{--}) \setminus Z^0, \quad Z^4 = (Z^{++} \cap Z_{n\nu}^{+-} \cap Z_{r\rho}^{-+}) \setminus Z^0,$$

$$Z' = Z^0 \cup Z^1 \cup Z^2 \cup Z^3 \cup Z^4,$$

$$Z^{12} = (Z_{r\rho}^{-+} \cap Z_{m\mu}^{--}) \setminus Z', \quad Z^{13} = (Z_{n\nu}^{+-} \cap Z_{m\mu}^{--}) \setminus Z',$$

$$Z^{14} = (Z_{n\nu}^{+-} \cap Z_{r\rho}^{-+}) \setminus Z', \quad Z^{23} = (Z^{++} \cap Z_{m\mu}^{--}) \setminus Z',$$

$$Z^{24} = (Z^{++} \cap Z_{r\rho}^{-+}) \setminus Z', \quad Z^{34} = (Z^{++} \cap Z_{n\nu}^{+-}) \setminus Z',$$

$$Z_N = Z' \cup \Big(\bigcup_{1 \le i < j \le 4} Z^{ij} \Big),$$

$$Z_M = (Z \times Z) \setminus (Z^{++} \cup Z_{n\nu}^{+-} \cup Z_{r\rho}^{-+} \cup Z_{m\mu}^{--}).$$

Каждое из непустых множеств Z^j, $0 \le j \le 4$, Z^{14}, Z^{23} $(Z^{12}, Z^{13}, Z^{24}, Z^{34})$ содержит конечное (счетное) множество точек.

1.2°. Нетрудно видеть, что однородная элементарная задача имеет решение лишь в том случае, когда множество Z_N не пусто. Если D^+ и Δ^+ — круги, то множество всех ее линейно независимых решений может быть построено по множеству мономов (см. рисунок, на котором $n < r - 1 < 0 < m$, $0 < \mu < \rho + 1 < \nu$)

$$N = \{z^k w^l : (k, l) \in Z_N\}.$$

Для получения общего решения однородной задачи (0.1), (0.3) введем следующие функции:

$$\varphi_j(z, w) = \sum_{(k, l) \in Z^j} c_{kl} z^k w^l, \quad 0 \le j \le 4,$$

$$\varphi_{ij}(z,\ w)=\sum_{(k,\ l)\in Z^{ij}} c_{kl}z^k w^l,\ 1\leqslant i<j\leqslant 4,$$

с произвольными коэффициентами c_{kl}, такими, что $\varphi_{ij}(t,\ \omega)\in H$.

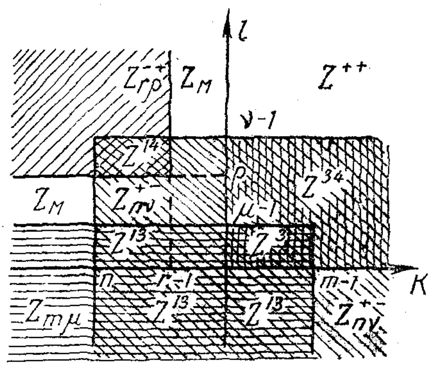
Общее решение однородной элементарной задачи в классах H^{++}, $H_0^{\pm\mp}$ и H_0^{--} дают формулы

$$\begin{gathered}\Phi^{++}(z,\ w)=\varphi_{++}(z,\ w),\ z^n w^\nu\Phi^{+-}(z,\ w)=\varphi_{+-}(z,\ w),\\ z^r w^\rho\Phi^{-+}(z,\ w)=\varphi_{-+}(z,\ w),\ z^m w^\mu\Phi^{--}(z,\ w)=\varphi_{--}(z,\ w),\end{gathered}\tag{1.2}$$

в которых все четыре функции $\varphi_{\pm\pm}(z,\ w)$ определяются равенствами вида

$$\varphi_{\pm\pm}(z,\ w)=\sum_{0\leqslant j\leqslant 4}\alpha_j^{\pm\pm}\varphi_j(z,\ w)+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\alpha_{ij}^{\pm\pm}\varphi_{ij}(z,\ w),$$

где произвольно фиксированные постоянные $\alpha_j^{\pm\pm}$ и $\alpha_{ij}^{\pm\pm}$ подчинены условиям:



$$\alpha_j^{++}-\alpha_j^{+-}-\alpha_j^{-+}+\alpha_j^{--}=$$
$$=0,\ 0\leqslant j\leqslant 4,\ \alpha_1^{++}=\alpha_2^{+-}=$$
$$=\alpha_3^{-+}=\alpha_4^{--}=0,$$
$$\alpha_{ij}^{++}-\alpha_{ij}^{+-}-\alpha_{ij}^{-+}+\alpha_{ij}^{--}=$$
$$=0,\ 1\leqslant i<j\leqslant 4,$$
$$\alpha_{12}^{\pm\pm}=\alpha_{13}^{\pm+}=\alpha_{14}^{\pm\pm}=\alpha_{23}^{\pm\mp}=$$
$$=\alpha_{24}^{\pm-}=\alpha_{34}^{-\pm}=0,$$

вытекающим из соотношения (0.1) и структуры множеств Z^j и Z^{ij}.

Заметим, что ряды Лорана (1.1) всякого решения однородной элементарной задачи и в том случае, когда D^+ и Δ^+ не являются кругами, совпадают с рядами, определяемыми формулами (1.2). Кроме того, переписав формулы (1.2) в виде рядов (по существу многочленов) Хартогса, найдем, что они позволяют написать решение соответствующей краевой задачи (см. [1], а также ниже 1.6° и 1.7°), что позволяет, не совсем точно, и в этом случае формулы (1.2) называть общим решением однородной задачи (0.1), (0.3).

1.3°. Покажем теперь, как найти в классах H^{++}, H_0^{--}, и $H_0^{\pm\mp}$ частное решение $\Phi_0^{\pm\pm}(z,\ w)$ и $\Phi_0^{\pm\mp}(z,\ w)$ неоднородной задачи (0.1), (0.3), если, конечно, она разрешима, и заодно выясним необходимые и достаточные условия ее разрешимости. Не ограничивая общности, положим

$$\Phi_0^{++}(z,\ w)=F^{++}(z,\ w),\tag{1.3}$$

где $F^{++}(z,\ w)$ — *компонента интеграла* $F(z,\ w)=K(f)$. *Учитывая равенство* (1.3), будем искать функции $\Phi_0^{\pm\mp}(z,\ w)$, $\Phi_0^{--}(z,w)$ и $\Psi_j^{\pm\mp}(z,\ w)$, $\Psi_j^{--}(z,\ w)$, $j=1,2,\ 3$, такими, чтобы одновременно выполнялись равенства:

$$\begin{gathered}t^n\omega^\nu\Phi_0^{+-}(t,\ \omega)=\Psi_1^{+-}(t,\ \omega)+\Psi_1^{+-}(t,\ \omega)-\Psi_1^{--}(t,\ \omega),\\ t^r\omega^\rho\Phi_0^{-+}(t,\ \omega)=\Psi_2^{+-}(t,\ \omega)+\Psi_2^{+-}(t,\ \omega)-\Psi_2^{--}(t,\omega),\\ t^m\omega^\mu\Phi_0^{--}(t,\omega)=-\Psi_3^{-+}(t,\omega)-\Psi_3^{+-}(t,\omega)+\Psi_3^{--}(t,\omega)\end{gathered}\tag{1.4}$$

и равенства (см. (0.1))

$$\begin{gathered}F^{\pm\mp}(z,w)=\Psi_1^{\pm\mp}(z,w)+\Psi_2^{\pm\mp}(z,w)+\Psi_3^{\pm\mp}(z,w)\equiv\Psi^{\pm\mp}(z,w),\\ F^{--}(z,w)=\Psi_1^{--}(z,w)+\Psi_2^{--}(z,w)+\Psi_3^{--}(z,w)\equiv\Psi^{--}(z,w).\end{gathered}\tag{1.5}$$

Из условия (0.1), (0.3) следует, что коэффициенты Ψ_{kl} ряда Лорана правой части последнего равенства (1.5) при всех $(k, l) \in Z_M^{--} \equiv Z^{--} \cap Z_M$ равны нулю. Отсюда и из теоремы единственности для аналитических функций вытекает, что для разрешимости неоднородной задачи (0.1), (0.3) необходимо и достаточно, чтобы функция $F^{--}(z, w)$ удовлетворяла условиям

$$F_{kl} = 0 \ \ \forall (k, l) \in Z_M^{--}. \tag{1.6}$$

Рассуждая как и только что, из верхних равенств в (1.5) получим следующие условия разрешимости (см. рисунок):

$$F_{kl} = 0 \ \ \forall (k, l) \in Z_M^{\pm\mp} \equiv Z^{\pm\mp} \cap Z_M.$$

Таким образом, для разрешимости неоднородной элементарной задачи необходимо и достаточно, чтобы

$$F_{kl} = 0 \quad \forall (k, l) \in Z_M$$

и, значит,

$$M = \{F_{kl} = 0; \ (k, l) \in Z_M\}.$$

Покажем, как определяются, например, ряды Лорана $\Psi_j^{--}(z, w)$. Зададим произвольным образом попарно непересекающиеся множества $\Pi_j^{--} \subset Z^{--}$, а коэффициенты $\Psi_{j,\,kl}$ функций $\Psi_j^{--}(z, w)$ определим равенствами

$$\Psi_{j,\,kl} = \begin{cases} F_{kl}, & (k, l) \in \Pi_j^{--}, \\ 0, & (k, l) \,\overline{\in}\, \Pi_j^{--}; \end{cases} \tag{1.7}$$

тогда в силу (1.6) должно выполняться равенство

$$\Pi_1^{--} \cup \Pi_2^{--} \cup \Pi_3^{--} = Z_M^{--}. \tag{1.8}$$

Напомним, что попарно непересекающиеся множества Π_j^{--}, удовлетворяющие условию (1.8), взяты произвольным образом и, следовательно, частное решение неоднородной задачи (0.1), (0.3) может быть найдено, вообще говоря, многими способами.

1.4°. Общее решение разрешимой неоднородной элементарной задачи дают формулы

$$\begin{aligned} \Phi^{++}(z, w) &= \Phi_0^{++}(z, w) + \varphi_{++}(z, w), \\ \Phi^{+-}(z, w) &= \Phi_0^{+-}(z, w) + z^{-n}w^{-\nu}\varphi_{+-}(z, w), \\ \Phi^{-+}(z, w) &= \Phi_0^{-+}(z, w) + z^{-r}w^{-\rho}\varphi_{-+}(z, w), \\ \Phi^{--}(z, w) &= \Phi_0^{--}(z, w) + z^{-m}w^{-\mu}\varphi_{--}(z, w), \end{aligned} \tag{1.9}$$

где $\Phi_0(z, w)$ — частное решение неоднородной задачи (0.1), (0.3), а $\varphi_{\pm\pm}(z, w)$ и $\varphi_{\pm\mp}(z, w)$ те же, что и в формуле (1.2).

1.5°. Приведем примеры, иллюстрирующие все случаи, содержащиеся в (0.2).

Как следует из работы [2], задача (0.1), (0.3) будет нетеровой только в том случае, когда в (0.3) m и μ — произвольные целые числа, а $n = m$, $\rho = \mu$, $r = \nu = 0$.

Если при этом $m\mu > 0$ ($m\mu \leqslant 0$), то однородная задача имеет $m\mu$ линейно независимых решений (неразрешима), а неоднородная безусловно разрешима (имеет решение при выполнении $|m\mu|$ условий разрешимости) и, значит, во всех этих случаях индекс $\varkappa = m\mu$.

Пусть $m>0$, $\mu>0$ ($m<0$, $\mu<0$), тогда линейно независимые решения элементарной однородной нетеровой задачи определяются с помощью мономов:

$$z^k w^l,\ 0\leqslant k\leqslant m-1,\ 0\leqslant l\leqslant \mu-1\ (m\leqslant k\leqslant -1,\ \mu\leqslant l\leqslant -1),$$

причем

$$\underset{1\leqslant i<j\leqslant 4}{\alpha_0^{++}}=-\alpha_0^{--},\ \alpha_0^{\pm\mp}=0\,(\alpha_0^{+-}=-\alpha_0^{-+},\ \alpha_0^{\pm\pm}=0),\quad \varphi_j=\varphi_{ij}=0.$$

Если же $m>0$, $\mu\leqslant 0$ ($m\leqslant 0$, $\mu>0$), то условия разрешимости элементарной неоднородной нетеровой задачи выглядят так:

$$F_{kl}=0,\ 0\leqslant k\leqslant m-1,\ \mu\leqslant l\leqslant -1\ \ (m\leqslant k\leqslant -1,\ 0\leqslant l\leqslant \mu-1).$$

Пусть снова в (0.3) m и μ произвольны, а $r=m$, $\nu=\mu$, $n=\rho\doteq 0$, тогда при $m>0$, $\mu>0$ ($m\leqslant 0$, $\mu\leqslant 0$) однородная задача имеет счетное множество линейно независимых решений (неразрешима), а неоднородная задача безусловно разрешима (имеет решение при выполнении счетного множества условий разрешимости), причем

$$N=\left\{z^k w^l,\ (k,\ l)\in\begin{pmatrix}-\infty, & 0\\ +\infty, & \mu-1\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}0, & -\infty\\ m-1, & +\infty\end{pmatrix}\right\},\ M=\varnothing$$

$$\left(N=\varnothing\,,\ M=\left\{F_{kl}=0;\ (k,\ l)\in\begin{pmatrix}-\infty, & -1\\ +\infty, & \mu\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}-1, & +\infty\\ m, & -\infty\end{pmatrix}\right\}\right)$$

и, значит, индекс задачи положительно (отрицательно) полубесконечен. Заметим, что условия разрешимости при $m\leqslant 0$ и $\mu\leqslant 0$ можно записать и так [1]:

$$z^{-m}w^{-\mu}F^{--}(z,\ w)\in H_0^{--},\ z^{-m}F^{-+}(z,\ w)\in H_0^{-+},\ w^{-\mu}F^{+-}(z,\ w)\in H_0^{+-}.$$

Наконец, если $r=m>0\ (\leqslant 0)$, $\nu=\mu\leqslant 0\ (>0)$, $n=\rho=0$, то однородная задача имеет счетное множество линейно независимых решений, причем

$$N=\left\{z^k w^l:\ (k,\ l)\in\begin{pmatrix}0, & -\infty\\ m-1, & +\infty\end{pmatrix}\diagdown\begin{pmatrix}0, & -1\\ m-1, & \mu\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left(N=\left\{z^k w^l:\ (k,\ l)\in\begin{pmatrix}-\infty, & 0\\ +\infty, & \mu-1\end{pmatrix}\diagdown\begin{pmatrix}-1, & 0\\ m, & \mu-1\end{pmatrix}\right\}\right),$$

а неоднородная разрешима лишь при выполнении счетного множества условий разрешимости, которые можно записать так:

$$w^{-\mu}F^{\mp =}(z,\ w)\in H_0^{\mp =}\ \ (z^{-m}F^{=\mp}(z,\ w)\in H_0^{=\mp}).$$

1.6°. Рассмотрим еще задачу (0.1), (0.3), в которой [1]

$$m\geqslant r>0,\ \mu\geqslant\nu>0\ \text{и}\ \rho\leqslant 0,\ n\leqslant 0, \tag{1.10}$$

и, значит, $Z_M=\varnothing$, а общее решение неоднородной зидачи дают, например, формулы:

$$\begin{aligned}\Phi^{++}(z,\ w)&=F^{++}(z,\ w)+\varphi(z,\ w)+\psi(z,\ w)+\gamma(z,\ w),\\ z^m w^\mu\Phi^{--}(z,\ w)&=F^{--}(z,\ w)+a(z,\ w)+b(z,\ w)-\gamma(z,\ w),\\ z^r w^\rho\Phi^{-+}(z,\ w)&=F^{-+}(z,\ w)+\varphi(z,\ w)+a(z,\ w)+\delta(z,\ w),\\ z^n w^\nu\Phi^{+-}(z,\ w)&=F^{+-}(z,\ w)+\psi(z,\ w)+b(z,\ w)-\delta(z,\ w),\end{aligned} \tag{1.11}$$

в которых

$$\begin{gathered}\varphi(z,\ w)=\sum_{k=0}^{r-1}z^k\varphi_k^+(w),\ \ \psi(z,\ w)=\sum_{k=0}^{\nu-1}w^k\psi_k^+(z),\\ a(z,\ w)=\sum_{k=\rho}^{\mu-1}w^k a_k^-(z),\ \ b(z,\ w)=\sum_{k=n}^{m-1}z^k b_k^-(w),\\ \gamma(z,\ w)=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{\mu-1}c_{ij}z^i w^j,\ \ \delta(z,\ w)=\sum_{i=n}^{-1}\sum_{j=\rho}^{-1}c_{ij}z^i w^j,\end{gathered} \tag{1.12}$$

c_{ij} — произвольные постоянные, $\varphi_k^+(w)$, $\psi_k^+(z)$, $a_k^-(z)$ и $b_k^-(w)$ — произвольные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{gathered} w^{-\rho}\varphi_k^+(w) \in H^+(\Gamma),\ \ 0 \leqslant k \leqslant \nu - 1,\ \ z^{-m}\psi_k^+(z) \in H^+(C),\ \ 0 \leqslant k \leqslant r-1, \\ z^{-n}a_k^-(z) \in H_0^-(C),\ \ n \leqslant k \leqslant -1,\ \ a_k^-(z) \in H_0^-(C),\ \ 0 \leqslant k \leqslant \mu - 1. \qquad (1.13) \\ w^{-\rho}b_k^-(w) \in H_0^-(\Gamma),\ \ \rho \leqslant k \leqslant -1,\ \ b_k^-(w) \in H_0^-(\Gamma),\ \ 0 \leqslant k \leqslant m-1. \end{gathered}$$

Сопоставляя формулы (1.11) — (1.13) с формулами (3.4) в [1], найдем, что в последних опущено слагаемое $\delta(z, w)$, а в функциях $a(z, w)$ и $b(z, w)$ индекс суммирования пробегает соответственно только значения $0, 1, \ldots, \mu-1$ и $0, 1, \ldots, m-1$ вместо $\rho, \rho+1, \ldots, \mu-1$ и $n, n+1, \ldots, m-1$ в (1.12).

Если теперь заменить формулы (3.4) в [1] правильными формулами (1.11) — (1.13), то все сказанное в § 2 и § 3 работы [1] остается в основном без изменения. А именно, заданием $r+\nu+\mu-\rho+m-n$ краевых условий типа условий Коши, через которые однозначно определяются функции $\varphi_k^+(w)$, $\psi_k^+(z)$, $a_k^-(z)$, $b_k^-(w)$, входящие в формулы (1.12) и удовлетворяющие условиям (1.13), можно определить функции $\varphi(z, w)$, $\psi(z, w)$, $a(z, w)$ и $b(z, w)$.

Однородная краевая задача (0.1), (0.3), (1.10) с такими дополнительными условиями имеет конечное число, равное $m\mu + n\rho$ линейно независимых решений, а решение неоднородной зависит от такого же количества произвольных постоянных. Далее из формул (1.11)—(1.13) могут быть найдены: общее решение однородной и условия разрешимости неоднородной элементарной задачи (а значит, и ее общее решение) методом, описанным в § 3 работы [1], и в тех случаях, когда не выполняются неравенства (1.10). Однако делать этого нет никакой необходимости, так как непосредственное решение каждой конкретной задачи методом, описанным в этом параграфе, существенно проще, чем получение его из формул (1.11)—(1.13).

1.7°. Сформулируем окончательный результат.

Однородная элементарная задача (0.1), (0.3) разрешима тогда и только тогда, когда множество Z_N не пусто. Она имеет конечное (счетное) множество линейно независимых решений, выражающихся через мономы $z^k w^l$; $(k, l) \in Z_N$, если множество Z_N конечно (счетно), а ее общее решение определяется по формулам (1.2).

Неоднородная элементарная задача (0.1), (0.3) разрешима лишь при выполнении конечного (счетного) множества необходимых и достаточных условий разрешимости $F_{kl} = 0$, $(k, l) \in Z_M$, если множество Z_M конечно (счетно). Общее решение определяется по формулам (1.9) и (1.2).

Если однородная (неоднородная) элементарная задача разрешима и Z_N счетно, то задача (0.1), (0.3) вместе с конечным числом дополнительных условий типа условий Коши, задаваемых на дисках [1] $\Delta_\infty^\pm$ и $D_\infty^\pm$, однозначно определяющих функции $\varphi_{ij}(z, w)$, $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, входящих в функции $\varphi_{\pm\pm}(z, w)$ и $\varphi_{\pm\mp}(z, w)$ имеет общее решение, зависящее от конечного числа постоянных, входящих в функции $\varphi_j(z, w)$, $0 \leqslant j \leqslant 4$.

1.8°. По той же схеме, что и элементарная задача (0.1), (0.3), могут быть решены десять вырожденных задач типа

$$\Phi^{++} - t^r w^\rho \Phi^{-+} + t^n w^\nu \Phi^{+-} = f(t, w) \text{ и } \Phi^{++} + t^m w^\mu \Phi^{--} = f(t, w).$$

2. МЕТОД ИСКЛЮЧЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ (МЕТОД ПРОЕКТИРОВАНИЯ)

2.1°. Класс функций H представим [1] в виде прямой суммы

$$H = H^{++} \oplus H_0^{+-} \oplus H_0^{-+} \oplus H_0^{--},$$

так как каждой функции $f \in H$ можно единственным образом поставить в соответствие функции

$$F^{++}(z, w) \in H^{++},\ \ F^{\pm\mp}(z, w) \in H_0^{\pm\mp} \text{ и } F^{--}(z\ w) \in H_0^{--}, \qquad (2.1)$$

такие, что

$$f(t, \omega) = F^{++}(t, \omega) - F^{+-}(t, \omega) - F^{-+}(t, \omega) + F^{--}(t, \omega),$$

где $F(z, \omega) = K(f)$, $aF^{\pm\pm}(t, \omega)$ и $F^{\pm\mp}(t, \omega)$ — предельные значения функций (3.1) при $(z, w) \to (t, \omega) \in C \times \Gamma$ из соответствующей области.

Введем операторы проектирования, положив

$$P^{\pm\pm}f = F^{\pm\pm}(t, \omega), \; P_{\pm\pm}f = (I - P^{\pm\pm})f = f(t, \omega) - F^{\pm\pm}(t, \omega),$$
$$P^{\pm\mp}f = -F^{\pm\mp}(t, \omega), \; P_{\pm\mp}f = (I - P^{\pm\mp})f = f(t, \omega) + F^{\pm\mp}(t, \omega),$$

для всякой функции $f \in H$.

Таким образом,

$$P^{++} \oplus P^{+-} \oplus P^{-+} \oplus P^{--} = P^{\pm\pm} \oplus P_{\pm\pm} = P^{\pm\mp} \oplus P_{\pm\mp} = I.$$

2.2°. Применение метода проектирования продемонстрируем на решении задачи (0.1), в которой

$$A(t, \omega) = A^{++}(t, \omega) A^{\pm\mp}(t, \omega)/A^{--}(t, \omega) \neq 0. \tag{2.2}$$

Так как существуют [1] однозначно определяемые функции $\Psi^{++}(z, w) \in H^{++}$ и $\Psi^{\pm\mp}(z, w) \in H_0^{\pm\mp}$, такие, что

$$\Phi^{++}A^{++}A^{\pm\mp} = \Psi^{++}(t, \omega) - \Psi^{\pm\mp}(t, \omega), \tag{2.3}$$

то, допуская справедливость равенства

$$P^{++}(B\Phi^{-+} + C\Phi^{+-} - D\Phi^{--}) = 0 \tag{2.4}$$

и полагая $P^{++}(fA^{--}) = U^{++}(t, \omega)$, после умножения обеих частей условия (0.1) на $A^{--}(t, \omega)$ и применения к полученному равенству проектора P^{++}, получим соотношение $\Psi^{++}(t, \omega) = U^{++}(t, \omega)$. Отсюда и из условия (2.2) вытекает равенство

$$\Phi^{++}A^{++} + \frac{\Psi^{\pm\mp}}{A^{\pm\mp}} = \frac{U^{++}(t,\omega)}{A^{\pm\mp}(t, \omega)},$$

и, следовательно,

$$\Phi^{++}(t, \omega) = \frac{1}{A^{++}} P^{++}\left(\frac{U^{++}}{A^{\pm\mp}}\right), \; \Psi^{\pm\mp}(t, \omega) = -A^{\pm\mp}P^{\pm\mp}\left(\frac{U^{++}}{A^{\pm\mp}}\right).$$

После того как определены функции $\Phi^{++}(t, \omega)$ и $\Psi^{\pm\mp}(t, \omega)$, умножим снова условие (0.1) на $A^{--}(t, \omega)$ и применим к обеим частям полученного равенства проектор P_{++}. В результате будем иметь

$$-B\Phi^{-+} - C\Phi^{+-} + D\Phi^{--} = v(t, \omega), \tag{2.5}$$

где

$$v(t, \omega) = [P_{++}(fA^{--}) + \Psi^{\pm\mp}]/A^{--} = P_{++}v.$$

Итак, при выполнении условия (2.4) задача (0.1), (2.2) сведена к решению задачи (2.5). Условие (2.4) допускает следующие две интерпретации.

Во-первых, можно искать необходимые и достаточные ограничения на функции B, C и D, при выполнении которых имеет место равенство (2.4).

Пусть, например,

$$B = t^r\omega^\rho; \; C = t^n\omega^\nu \text{ и } D = t^m\omega^\mu, \tag{2.6}$$

тогда условие (2.4) выполняется только при $r \leqslant 0$, $\nu \leqslant 0$, $m > 0$, $\mu \leqslant 0$, и при $r \leqslant 0$, $\nu \leqslant 0$, $m \leqslant 0$, $\mu > 0$. Элементарная задача (2.5), (2.6) в этих случаях (см. 1.8°) может быть решена полностью.

Условие (2.4) заведомо выполняется, если

$$B = B^{-+}B^{--}, \; C = C^{+-}C^{--} \text{ и } D = D_1^{+-} + D_2^{-+} + D_3^{--}, \tag{2.7}$$

Во-вторых, можно искать решение задачи (0.1), (2.2), удовлетворяющее дополнительному условию (2.4), в котором B, C и D — произвольные функции класса H, и тогда условие (2.4) является ограничением на искомые функции $\Phi^{\pm\mp}(z, w)$ и $\Phi^{--}(z, w)$.

2.3°. Будем придерживаться первой точки зрения и дополнительно к (2.2) предположим, что

$$B(t, \omega) = B^{-+}(t, \omega) B^{--}(t, \omega) \neq 0. \tag{2.8}$$

Рассуждая как и ранее, положим

$$\Phi^{-+}B^{-+}B^{--} = -X^{-+} + X^{--}, \quad P^{-+}v = -V^{-+} \tag{2.9}$$

и допустим, что кроме очевидного условия

$$P^{++}(C\Phi^{+-} - D\Phi^{--}) = 0, \tag{2.10}$$

вытекающего из (2.4) и (2.8), дополнительно выполняется условие

$$P^{-+}(C\Phi^{+-} - D\Phi^{--}) = 0, \tag{2.11}$$

тогда

$$X^{-+}(t, \omega) = V^{-+}(t, \omega)$$

и

$$\Phi^{-+}B^{-+} - \frac{X^{--}}{B^{--}} = -\frac{V^{-+}(t, \omega)}{B^{--}(t, \omega)}.$$

Из последнего равенства следует

$$\Phi^{-+}(t, \omega) = \frac{-1}{B^{-+}} P^{-+}\left(\frac{V^{-+}}{B^{--}}\right), \quad X^{--}(t, \omega) = -B^{--}P^{--}\left(\frac{V^{-+}}{B^{--}}\right).$$

Теперь, когда нам известны функции $\Phi^{-+}(t, \omega)$ и $X^{--}(t, \omega)$, применяя оператор P_{-+} к обеим частям равенства (2.5), получим новое условие

$$-C\Phi^{+-} + D\Phi^{--} = P_{-+}v. \tag{2.12}$$

Задача (2.12) при выполнении известных [1] необходимых и достаточных условий разрешимости может быть решена методом факторизации.

Нетрудно видеть, что всякое решение задачи (2.12) удовлетворяет условиям (2.10) и (2.11).

3.4°. Итак, задача (0.1), (2.2), (2.6) после применения метода проектирования приводится к решению вырожденной элементарной задачи. Таких задач 8 типов.

Задача (0.1), (2.2), (2.8) может быть решена применением (дважды) метода проектирования и метода факторизации. Всего таких задач 12 типов.

3.5°. Метод проектирования впервые* был применен в работе [4] при решении задачи (0.1), (2.2), в которой $B = C = -D = 1$, для функций, аналитических в квадрантообразных областях

$$\{(z, w)\colon \operatorname{Im} z \gtrless 0, \ \operatorname{Im} w \gtrless 0\},$$

с условием (0.1) на плоскости

$$\{(z, w)\colon \operatorname{Im} z = 0 \ \operatorname{Im} w = 0\}.$$

3. МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

3.1°. Пусть $l(A) = l$ и $\lambda(A) = \lambda$ — частные индексы функции $A(t, \omega) \neq 0$ и удовлетворяющей условию Гельдера на $C \times \Gamma$, тогда, полагая $A_0(t, \omega) = t^{-l}\omega^{-\lambda}A(t, \omega)$, найдем, что $l(A_0) = \lambda(A_0) = 0$.

Пользуясь этим, ниже будем каждую функцию $A(t, \omega)$ заменять функцией $t^l\omega^\lambda A_0(t, \omega)$, где $A_0(t, \omega)$ имеет частные индексы, равные нулю.

* Еще ранее этот метод использовал Ю. Н. Черский в неопубликованной им работе.

3.2°. Идею метода разделения предельных значений проиллюстрируем на задаче (0.1), в которой

$$A(t,\ \omega) = 1,\ C(t,\ \omega) = t^r \omega^\rho C_0(t,\ \omega) \neq 0,$$
$$D(t,\ \omega) = t^s \omega^\sigma D_0(t,\ \omega) B(t,\ \omega) \neq 0, \tag{3.1}$$
$$B(t,\ \omega) \neq 0,\ l(C_0) = \lambda(C_0) = l(D_0) = \lambda(D_0) = 0.$$

В этом случае краевое условие (0.1) запишем так:

$$\Phi^{++} - t^r \omega^\rho C_0(t,\ \omega)\Phi^{+-} \equiv h(t,\ \omega) \equiv$$
$$\equiv B(t,\ \omega)[\Phi^{-+} - t^s \omega^\sigma D_0(t,\ \omega)\Phi^{--}] + f(t,\ \omega). \tag{3.2}$$

Отсюда следует, что

$$\Phi^{++} = t^r \omega^\rho C_0(t,\ \omega)\Phi^{+-} + h(t,\ \omega),$$
$$\Phi^{-+} = t^s \omega^\sigma D_0(t,\ \omega)\Phi^{--} + [h(t,\ \omega) - f(t,\ \omega)]/B(t,\ \omega), \tag{3.3}$$

где $h(t,\ \omega)$ — пока неизвестная функция.

Задачи (3.3) могут быть решены методом факторизации, если функции C_0 и D_0 удовлетворяют следующим необходимым и достаточным условиям [1]:

$$\ln C_0 = S_t(\ln C_0),\ \ \ln D_0 = -S_t(\ln D_0), \tag{3.4}$$

которые будем предполагать выполненными.

Следовательно, существуют единственным образом определяемые функции $X^{++}(z,\ w) \in H^{++}$, $X^{\pm\mp}(z,\ w) \in H_1^{\pm\mp}$ и $X^{--}(z,\ w) \in H_1^{--}$, обращающиеся в единицу в бесконечно удаленных точках соответствующих областей и нигде не равные нулю, такие, что

$$C_0(t,\ \omega) = X^{++}(t,\ \omega)/X^{+-}(t,\ \omega),\ \ D_0(t,\ \omega) = X^{-+}(t,\ \omega)/X^{--}(t,\ \omega).$$

Отсюда и из условий (3.3) следуют равенства

$$t^p E^{++} = t^{r+p} \omega^\rho E^{+-} + t^p h(t,\ \omega)/X^{++}(t,\ \omega),$$
$$t^q E^{-+} = t^{s+q} \omega^\sigma E^{--} + t^q [h(t,\ \omega) - f(t,\ \omega)]/B(t,\ \omega) X^{-+}(t,\ \omega), \tag{3.5}$$

в которых

$$p = \max(0,\ -r),\ \ q = \min(0,\ -s),$$
$$E^{+\pm} = \Phi^{\substack{++\\+-}}/X^{\substack{++\\+-}},\ \ E^{-\pm} = \Phi^{\substack{-+\\--}}/X^{\substack{-+\\--}}. \tag{3.6}$$

Для разрешимости задач (3.5), как это следует из результатов § 1, необходимо и достаточно существования функций $\Psi^{\substack{++\\+-}}(z,\ w)$ и $\Psi^{\substack{-+\\--}}(z,\ w)$, таких, что

$$t^p h(t,\ \omega)/X^{++}(t,\ \omega) = \Psi^{++} - \Psi^{+-},$$
$$t^q [h(t,\ \omega) - f(t,\ \omega)]/B(t,\ \omega) X^{-+}(t,\ \omega) = \Psi^{-+} - \Psi^{--} \tag{3.7}$$

и

$$w^{-\rho} z^{-r} \Psi^{+-}(z,\ w) \in H_0^{+-} \text{ при } r > 0,$$
$$z^r \Psi^{++}(z,\ w) \in H^{++},\ w^{-\rho}\Psi^{+-}(z,\ w) \in H_0^{+-} \text{ при } r \leqslant 0,\ \rho \leqslant 0, \tag{3.8}$$
$$\Psi_{kl} = 0\ \ \forall (k,\ l) \in \begin{pmatrix} 0, & \rho \\ -r-1, & +\infty \end{pmatrix} \text{ при } r \leqslant 0,\ \rho > 0,$$
$$\Psi_{kl} = 0\ \ \forall (k,\ l) \in \begin{pmatrix} -1, & \sigma \\ -s, & +\infty \end{pmatrix} \text{ при } s > 0,\ \sigma > 0,$$
$$z^s \Psi^{-+}(z,\ w) \in H_0^{-+},\ w^\sigma \Psi^{--}(z,\ w) \in H_0^{--} \text{ при } s > 0,\ \sigma \leqslant 0,$$
$$w^{-\sigma} z^{-s} \Psi^{--}(z,\ w) \in H_0^{--} \text{ при } s \leqslant 0.$$

Исключая теперь неизвестную функцию $h(t, \omega)$ из равенств (3.7), получим задачу линейного сопряжения

$$\Psi^{++} - \Psi^{+-} = t^m \omega^\mu G_0(t, \omega)[\Psi^{-+} - \Psi^{--}] + g(t, \omega), \tag{3.9}$$

где

$$t^m w^\mu G_0(t, \omega) = t^{p-q} B(t, \omega) X^{-+}(t, \omega)/X^{++}(t, \omega) \neq 0,$$
$$l(G_0) = \lambda(G_0) = 0, \; g(t, \omega) = t^p f(t, \omega)/X^{++}(t, \omega).$$

Снова, используя факторизацию, найдем [5] однозначно определяемые функции $U^{++}(z, w) \in H^{++}$, $U^{\pm\mp}(z, w) \in H_1^{\pm\mp}$ и $U^{--}(z, w) \in H_1^{--}$, нигде не равные нулю и такие, что

$$G_0(t, \omega) = U^{++}U^{+-}/U^{-+}U^{--}.$$

Используя это равенство, условие (3.9) запишем в виде

$$\frac{\Psi^{++} - \Psi^{+-}}{U^{++}U^{+-}} = t^m \omega^\mu \frac{\Psi^{-+} - \Psi^{--}}{U^{-+}U^{--}} + \theta(t, \omega), \tag{3.10}$$

где

$$\theta(t, \omega) = g(t, \omega)/U^{++}(t, \omega)U^{+-}(t, \omega).$$

Так как функции

$$(\Psi^{++} - \Psi^{+-})/U^{++}U^{+-} = \delta_1(t, \omega),$$
$$(\Psi^{-+} - \Psi^{--})/U^{-+}U^{--} = \delta_2(t, \omega), \tag{3.11}$$

удовлетворяют условиям

$$S_t\delta_1 = \delta_1, \; S_t\delta_2 = -\delta_2,$$

то существуют [1] однозначно определяемые функции

$U^{\substack{++\\+-}}(z, w) \in H_0^{\substack{++\\+-}}$ и $V^{\substack{-+\\--}}(z, w) \in H_0^{\substack{-+\\--}}$, удовлетворяющие равенствам

$$V^{++} - V^{+-} = \delta_1(t, \omega), \; V^{-+} - V^{--} = \delta_2(t, \omega).$$

Следовательно, задача (3.10) приводится к элементарной задаче

$$V^{++} - t^m \omega^\mu V^{-+} - V^{+-} + t^m \omega^\mu V^{--} = \theta(t, \omega), \tag{3.12}$$

из общего решения которой (см. § 1) при $m > 0$ найдем, что

$$\delta_1(t, \omega) = \Theta_1(t, \omega) + a(t, \omega),$$
$$t^m \omega^\mu \delta_2(t, \omega) = \Theta_2(t, \omega) + a(t, \omega), \tag{3.13}$$

где

$\Theta_1(t, \omega) = \Theta^{++}(t, \omega) - \Theta^{+-}(t, \omega)$, $\Theta_2(t, \omega) = \Theta^{-+}(t, \omega) - \Theta^{--}(t, \omega)$ — известные функции, составленные из компонент интеграла типа Коши $\Theta(z, w) = K(\theta)$, а произвольная функция $a(t, \omega) \in H$ такова, что

$$a(t, \omega) = a^{++}(t, \omega) - a^{+-}(t, \omega), \; a^{\substack{++\\+-}}(z, w) = \sum_{k=0}^{m-1} z^k \alpha_k^{\pm}(w), \tag{3.14}$$

$$\alpha_k^{+}(w) \in H^{+}(\Gamma), \; \alpha_k^{-}(w) \in H_0^{-}(\Gamma), \; k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Если же $m \leqslant 0$, то в формулах (3.13) надо положить $a \equiv 0$ и потребовать, кроме того, чтобы

$$z^{-m} \overline{\Theta^{-+}}(z, w) \in \overline{H_0^{-+}}. \tag{3.15}$$

Подведем итог. Пусть сначала $m \leqslant 0$. Если не выполняются условия (3.15), то задача (3.12), а с нею и исходная задача (3.2), (3.4), неразрешимы.

Если же выполняются условия (3.15), то задача (3.12) имеет единственное решение, из которого следует, что

$$\delta_1(t,\ \omega)=\Theta_1(t,\ \omega),\ \delta_2(t,\ \omega)=\Theta_2(t,\ \omega)t^{-m}\omega^{-\mu}, \tag{3.16}$$

а функции $\overset{++}{\Psi}{}^{+-}(z,\ w)\in \overset{++}{H}{}^{+-}_0$ и $\overset{-+}{\Psi}{}^{--}(z,\ w)\in \overset{-+}{H}{}^{--}_0$ определяются по δ_1 и δ_2 единственным образом из краевых условий (3.11).

Далее, если функции $\overset{++}{\Psi}{}^{+-}(z,\ w)$ и $\overset{-+}{\Psi}{}^{--}(z,\ w)$ удовлетворяют (не удовлетворяют) условиям (3.8), то задачи (3.5) и исходная задача (3.2), (3.4) одновременно разрешимы (не разрешимы).

Если задачи (3.5) разрешимы, то решение исходной задачи определяется по формулам (3.6), причем количество произвольных постоянных (произвол) в решении задачи (3.2), (3.4) совпадает с количеством произвольных постоянных (произволом) в решении задач (3.5).

Пусть теперь $m>0$, тогда задача (3.12) безусловно разрешима, а функции $\delta_1(t,\ \omega)$ и $\delta_2(t,\ \omega)$ определяются по формулам (3.13).

Если за счет произвольных функций $\overset{++}{a}{}^{+-}(z,\ w)$, входящих в δ_1 и δ_2, а значит, соответствующим образом и в функции $\overset{++}{\Psi}{}^{+-}(z,\ w)$ и $\overset{-+}{\Psi}{}^{--}(z, w)$ можно (нельзя) удовлетворить условиям (3.8), то задачи (3.5) и задача (3.2), (3.4) одновременно разрешимы (не разрешимы).

Если задачи (3.5) разрешимы, то решение исходной задачи определяется по формулам (3.6), причем произвол в решении задачи (3.2) и (3.4) зависит от произвола в решении задач (3.5) и части произвола в решении задачи (3.12), оставшейся после удовлетворения условиям (3.8).

3.3°. Если в (3.10) положим

$$u^+(t,\ \omega)=U^{++}(t,\ \omega)U^{+-}(t,\ \omega),\ u^-(t,\ \omega)=\omega^{-\mu}U^{-+}(t,\ \omega)U^{--}(t,\ \omega),$$

$$\varphi^\pm(t,\ \omega)=\overset{++}{\Psi}{}^{-+}-\overset{+-}{\Psi}{}^{--},\ \theta^\pm(t,\ \omega)=\overset{++}{\Theta}{}^{-+}-\overset{+-}{\Theta}{}^{--},$$

то получим краевое условие задачи Римана

$$\frac{\varphi^+(t,\ \omega)}{u^+(t,\ \omega)}=t^m\frac{\varphi^-(t,\ \omega)}{u^-(t,\ \omega)}+\theta^+(t,\ \omega)-\theta^-(t,\ \omega)$$

по переменному z с параметром $\omega\in\Gamma$. Решая эту задачу Римана, найдем, что

$$\varphi^+(t,\ \omega)/u^+(t,\ \omega)=\delta_1(t,\ \omega),\ \varphi^-(t,\ \omega)/u^-(t,\ \omega)=\delta_2(t,\ \omega),$$

где δ_1 и δ_2 определяются при $m>0$ по формулам (3.13), а при $m\leqslant 0$ — по формулам (3.16) при выполнении условий (3.15).

3.4°. Точно так же, как и задача (3.2), (3.4), может быть решена двойственная к ней задача, в которой

$$\begin{gathered}A(t,\ \omega)=1,\ B(t,\ \omega)=t^h\omega^\nu B_0(t,\ \omega)\neq 0,\ \ln B_0=S_\omega(\ln B_0),\\ D(t,\ \omega)=C(t,\ \omega)D_0(t,\ \omega)t^s\omega^\sigma\neq 0,\ \ln D_0=-S_\omega(\ln D_0),\\ C(t,\ \omega)\neq 0,\ l(B_0)=\lambda(B_0)=l(D_0)=\lambda(D_0)=0.\end{gathered} \tag{3.17}$$

3.5°. Попытаемся решить методом разделения предельных значений задачу (0.1), в которой

$$\begin{gathered}A(t,\ \omega)=1,\ B(t,\ \omega)=t^r\omega^\rho a_0(t)\alpha_0(t)=t^r\omega^\rho a^+(t)\alpha^+(\omega)/a^-(t)\alpha^-(\omega),\\ C(t,\omega)=t^n\omega^\nu b_0(t)\beta_0(\omega)=t^n\omega^\nu b^+(t)\beta^+(\omega)/b^-(t)\beta^-(\omega),\\ D(t,\ \omega)=t^m\omega^\mu c_0(t)\gamma_0(\omega)=t^m\omega^\mu c^+(t)\gamma^+(t)/c^-(t)\gamma^-(\omega),\\ l(a_0)=l(b_0)=l(C_0)=\lambda(\alpha_0)=\lambda(\beta_0)=\lambda(\gamma_0)=0,\\ \mu\leqslant 0,\ m\leqslant 0,\ n\geqslant r,\ \nu\geqslant\rho,\end{gathered} \tag{3.18}$$

Полагая

$$E^{\pm\pm}(t, \omega) = \frac{\Phi^{++}(t, \omega)}{c^{\pm}(t)\gamma^{\pm}(\omega)}, \quad E^{\mp\pm}(t, \omega) = \Phi^{\mp\pm}(t, \omega)\frac{b^{\mp}(t)\alpha^{\pm}(\omega)}{a^{\mp}(t)\beta^{\pm}(\omega)}$$

и рассуждая как и выше, однородную задачу (0.1), (3.18) сведем к решению трех таких задач:

$$\alpha^{-}(\omega)b^{-}(t)c^{+}(t)\gamma^{+}(\omega)[\Psi^{++} + \Psi^{--}] = t^{r}\omega^{\rho}a^{+}(t)\beta^{+}(\omega)[\Psi^{+-} + \Psi^{-+}] \tag{3.19}$$

и

$$E^{++} + t^{m}\omega^{\mu}E^{--} = \Psi^{++} + \Psi^{--}, \quad E^{-+} + t^{n-r}\omega^{\nu-\rho} = \Psi^{-+} + \Psi^{+-},$$

для решения которых достаточно определить суммы

$$\Psi^{++}(t, \omega) + \Psi^{--}(t, \omega) \text{ и } \Psi^{+-}(t, \omega) + \Psi^{-+}(t, \omega).$$

Таким образом, мы приходим к следующей задаче: при выполнении каких условий функция $G(t, \omega) \in H$ представима в виде отношения сумм

$$G(t, \omega) = (\Psi^{++} + \Psi^{--})/(\Psi^{+-} + \Psi^{-+}).$$

Если $a^{+}(t) = c^{+}(t)$, $\gamma^{+}(\omega) = \beta^{+}(\omega)$ и $\alpha^{-}(\omega)$, $b^{-}(t)$ — некоторые постоянные, то задача (3.19) элементарна и, следовательно, может быть решена исходная задача (0.1), (3.18).

3.6°. Как следует из 2.5°, задача (0.1) с

$$\begin{gathered} A(t, \omega) = 1, \; D(t, \omega) = t^{m}\omega^{\mu}D_0(t, \omega) \neq 0, \\ C(t, \omega) = B(t, \omega)C_0(t, \omega)t^{n}\omega^{\nu} \neq 0, \; B(t, \omega) \neq 0, \\ l(D_0) = \lambda(D_0) = l(C_0) = \lambda(C_0) = 0, \end{gathered} \tag{3.20}$$

вообще говоря, не может быть решена методом разделения предельных значений, даже если выполняются условия

$$\ln D_0 = S \ln D_0, \; \ln C_0 = -S \ln C_0. \tag{3.21}$$

Выясним, когда она приводится непосредственно к решению элементарной задачи. Пусть выполняются условия (3.21) и

$$\begin{gathered} \Phi^{++} + t^{m}\omega^{\mu}D_0(t, \omega)\Phi^{--} = h(t, \omega), \\ \Phi^{+-} + t^{n}\omega^{\nu}C_0(t, \omega)\Phi^{-+} = [h(t, \omega) - f(t, \omega)]/B(t, \omega), \end{gathered} \tag{3.22}$$

тогда в силу условий (3.21) существуют функции

$$X^{++}(z, w) \in H^{++}, \; X^{\pm\mp}(z, w) \in H_1^{\pm\mp} \text{ и } X^{--}(z, w) \in H_1^{--},$$

такие, что

$$D_0(t, \omega) = X^{++}(t, \omega)/X^{--}(t, \omega), \; C_0(t, \omega) = X^{+-}(t, \omega)/X^{-+}(t, \omega),$$

и поэтому равенства (3.22) можно переписать так:

$$\begin{gathered} \frac{\Phi^{++}}{X^{++}} + t^{m}\omega^{\mu}\frac{\Phi^{--}}{X^{--}} = \frac{h(t, \omega)}{X^{--}(t, \omega)}, \\ \frac{\Phi^{+-}}{X^{+-}} + t^{n}\omega^{\nu}\frac{\Phi^{-+}}{X^{-+}} = \frac{h(t, \omega) - f(t, \omega)}{X^{+-}(t, \omega)B(t, \omega)}. \end{gathered} \tag{3.23}$$

Исключая h из равенства (3.23), получим задачу линейного сопряжения

$$\frac{\Phi^{++}}{X^{++}} + t^{m}\omega^{\mu}\frac{\Phi^{--}}{X^{--}} = B(t, \omega)\frac{X^{+-}(t, \omega)}{X^{++}(t, \omega)}\left[\frac{\Phi^{+-}}{X^{+-}} + t^{n}\omega^{\nu}\frac{\Phi^{-+}}{X^{-+}}\right] + \frac{f(t, \omega)}{X^{++}(t, \omega)}, \tag{3.24}$$

которая будет элементарной, если

$$B(t, \omega) = t^{s}\omega^{\sigma}X^{++}(t, \omega)/X^{+-}(t, \omega). \tag{3.25}$$

Итак, задача (0.1), (3.20) приводится к элементарной задаче (3.24), если выполняются условия (3.21) и (3.25).

3.7°. Так же просто можно выяснить те случаи задач (3.2), (3.4) и (0.1), (3.17), которые приводятся непосредственно к решению элементарной задачи.

3.8°. Метод разделения предельных значений впервые был использован автором при решении основной элементарной задачи в § 2 работы [1], а затем в заметках [3] и [6].

В [6] рассмотрен частный случай задачи (3,2), (3.4), в котором, с точностью до обозначений, $A(t, \omega) = 1$,

$$C(t, \omega) = t^r \omega^\rho \alpha_0(\omega), \; D(t, \omega) = t^s \omega^\sigma B(t, \omega) \beta_0(\omega),$$
$$\lambda(\alpha_0) = \lambda(\beta_0) = 0,$$

а в предшествующей ей заметке [3] — еще более частный случай задач (3.2), (3.4) и (0.1), (3.17) в котором, с точностью до не существенных деталей, $A(t, \omega) = 1$, $B(t, \omega) = t^n \omega^\nu v(\omega)$, $C(t, \omega) = t^r \omega^\rho u(t)$, $D(t, \omega) = t^{p+r} \omega^{q+\nu} v(\omega) u(t)$, $l(u) = \lambda(v) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Какичев. Краевые задачи линейного сопряжения для функций голоморфных в бицилиндрических областях. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 5. Изд-во Харьковск. ун-та, 1967.
2. И. Б. Симоненко. О многомерных дискретных свертках. Математические исследования 3:1 (7), Кишинев, 1968.
3. В. А. Какичев. Вырожденные двумерные сингулярные интегральные уравнения с ядрами Коши для бицилиндрических областей, II. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 8. Изд-во Харьковск. ун-та, 1969.
4. В. С. Рабинович. Многомерное уравнение Винера—Хопфа для конусов. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 5. Изд-во Харьковск. ун-та, 1967.
5. В. А. Какичев. Мультипликативные краевые задачи для функций, голоморфных в бицилиндрических областях. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 12. Изд-во Харьковск. ун-та, 1970.
6. В. А. Какичев. Об одной задаче линейного сопряжения для бицилиндрических областей и ее приложениях. Материалы Всесоюзной конференции по краевым задачам. Казань, 1970; стр. 127—130.

Поступила 10 ноября 1969 г.