ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ХИЛЛА С ОПЕРАТОРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Ф. С. Рофе-Бекетов, В. И. Храбустовский

В своих лекциях в Летней математической школе АН УССР в Кацивели (1964) М. Г. Крейн [1, стр. 88—89] поставил задачу обобщения на случай уравнения в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве H следующего результата, установленного в скалярном случае А. М. Ляпуновым [2], а для векторного уравнения в конечномерном пространстве: $(\dim H = n < \infty)$ — М. Г. Крейном [3].

Пусть в уравнении для n-мерной вектор функции y

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda P(t)\, y = 0, \quad (-\infty < t < \infty), \tag{1}$$

периодический самосопряженный операторный коэффициент $P(t)$

$$P(t+T) = P(t), \quad P^*(t) = P(t) \tag{2}$$

удовлетворяет условиям

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\, dt = 0, \tag{3}$$

и для любого $f \in H$

$$\int_0^T \| P(t) f \| \, dt > 0, \quad (f \neq 0). \tag{4}$$

Тогда все решения уравнения (1) устойчиво ограничены, коль скоро

$$\lambda \in \Delta_0 \overset{\text{def}}{=} \{\lambda : \lambda_{-1} < \lambda < \lambda_1, \quad \lambda \neq 0\}, \tag{5}$$

где λ_1 и λ_{-1} — наименьшие по абсолютной величине соответственно положительное и отрицательное числа спектра краевой задачи:

$$y'' + \lambda P(t) y = 0, \; y(0) + y(T) = y'(0) + y'(T) = 0. \tag{6}$$

(В случае $\dim H < \infty$ $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_{-1} < 0$ существуют и являются собственными числами [3]).

Говорят, что все решения уравнения (1) *устойчиво ограничены*, если при $-\infty < t < \infty$ они ограничены вместе с любыми решениями возмущенного уравнения $y'' + \lambda \tilde{P}(t) y = 0$, $\tilde{P}(t) = \tilde{P}^*(t) = \tilde{P}(t+T)$ с коэффициентом $\tilde{P}(t)$, достаточно близким к $P(t)$ в смысле метрики

$$\rho\{P, \tilde{P}\} = \int_0^T \| P(t) - \tilde{P}(t) \| \, dt. \tag{7}$$

Уравнение (1) в этом случае называется *сильно устойчивым*.

В теореме 1 настоящей работы приведенный выше результат обобщается в соответствующем виде на случай $\dim H = \infty$ (H — сепарабельно).

Затем, в теореме 2 мы приводим некоторый достаточный признак неустойчивости уравнения (1), который дает возможность показать, в частности, что условия теоремы 1, связанные со спецификой бесконечномерного случая, не допускают существенного ослабления.

В доказательстве теоремы 1 мы опираемся на предложенный М. Г. Крейном (в случае $\dim H < \infty$, [3]) метод, основанный на преобразовании уравнения (1) к канонической системе для вектор-функции $x(t)$ в сдвоенном гильбертовом пространстве $H^2 = H \oplus H$ с помощью подстановок

$$x(t) = y \oplus z, \quad z(t) = \frac{1}{\lambda} \frac{dy}{dt} + Q(t) y, \quad (\lambda \neq 0) \tag{8}$$

где

$$Q(t) = \int_0^t P(s) \, ds. \tag{9}$$

Большое значение для нас имеет

Теорема А. *Для того, чтобы все решения периодического канонического уравнения*

$$\frac{dx}{dt} = \lambda J H(t) x, \tag{10}$$

$$J^{-1} = -J^* = -J, \; H(t) = H^*(t) = H(t+T) \tag{11}$$

со слабо измеримым гамильтонианом $H(t)$, имеющим локально суммируемую норму $\| H(t) \|$, были бы устойчиво ограничены, необходимо и достаточно, чтобы оператор монодромии этого уравнения был сильно устойчивым.

В случае $\dim H < \infty$ достаточность условий этой теоремы установлена М. Г. Крейном [4], а необходимость — И. М. Гельфандом и В. Б. Лидским

[5]. Обобщение этих результатов на случай $\dim H = \infty$ было дано В. И. Дерґузовым [6]. Приведенная здесь формулировка теоремы А принадлежит М. Г. Крейну [1, стр. 35, 73].

Итак, рассмотрим уравнение (1), где $P(t)$ — оператор-функция в сепарабельном гильбертовом пространстве H, удовлетворяющая условиям:

$$P(t)\ \text{слабо измерима};\quad \| P(t) \| \in L_1^{\text{loc}}, \tag{12}$$

которые мы считаем выполненными на протяжении всей статьи, а также условиям (2).

Пусть $\theta(t, \lambda)$, $\varphi(t, \lambda)$ являются операторными решениями уравнения (1), удовлетворяющими начальным условиям

$$\theta(0, \lambda) = \varphi'(0, \lambda) = I,\ \theta'(0, \lambda) = \varphi(0, \lambda) = 0, \tag{13}$$

где I — единичный оператор в H.

Назовем *спектром* задачи (6) совокупность тех значений λ, при которых оператор в $H^2 = H \oplus H$

$$\Omega(\lambda) = \begin{pmatrix} \theta(T, \lambda) + I & \varphi(T, \lambda) \\ \theta'(T, \lambda) & \varphi'(T, \lambda) + I \end{pmatrix} \tag{14}$$

не имеет ограниченного обратного, определенного во всем H^2.

Из асимптотики для θ, φ, θ', φ' при $\lambda \to 0$ следует существование окрестности $\Delta_0(\delta)$ точки $\lambda = 0$, свободной от спектра задачи (6)*.

Теорема 1. *Если оператор-функция $P(t)$ в уравнении* (1) *интегрируема по Бохнеру в смысле равномерной операторной топологии***, *удовлетворяет условиям* (2), (3), ($P_{\text{ср}} = 0$), *и при некотором* $\delta > 0$

$$\int_0^T \| P(t) f \| \, dt \geqslant \delta \| f \|, \quad (f \in H), \tag{15}$$

то все решения уравнения (1) *устойчиво ограничены, коль скоро* $\lambda \in \Delta_0(\delta)$. *Если* $\dim H = \infty$, *то условие* (15) *нельзя заменить более слабым условием* (4) *а условие равномерной В-интегрируемости нельзя заменить более слабыми условиями* (12).***

Доказательство. Пусть вектор-функция $y(t)$ есть какое-нибудь решение уравнения (1). С помощью подстановок (8), (9) преобразуем уравнение (1) в каноническое уравнение (10) в пространстве H^2 с гамильтонианом

$$H(t) = \begin{pmatrix} Q^2(t) & -Q(t) \\ -Q(t) & I \end{pmatrix},\quad H(t + T) = H(t). \tag{16}$$

В данном случае

$$x = y \oplus z,\quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

---

* Можно показать (ср. [7, стр. 337]), что так определенный спектр задачи (6) вещественен и совпадает с ее теоретико-операторным спектром, если рассматривать ее в пространстве вектор-функций с нормой из $L_2(0, T)$.

** Определение равномерной B-интегрируемости *см.*, например, [8]. Всюду ниже под B-интегрируемостью оператор-функций мы будем подразумевать равномерную B-интегрируемость.

*** Отметим, однако, что допустимые возмущения коэффициента $P(t)$, при которых сохраняется сильная устойчивость уравнения (1), могут не быть B-интегрируемыми. Достаточна лишь малость их в метрике (7) и соблюдение для них (2) и (12).

Для любого $w = u \oplus v \in H^2$ имеем

$$(H(t)w,\ w) = \| Q(t)u - v \|^2 \geqslant 0.$$

Следовательно, $H(t) \geqslant 0$.

Докажем теперь, что оператор

$$H_{\text{ср}} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T H(t)\,dt$$

равномерно положителен ($H_{\text{ср}} \gg 0$, т. е. для любого $f \in H$ $(H_{\text{ср}} f,\ f) \geqslant c(f,\ f)$, $c > 0$).

Допустим противное. Тогда существует последовательность нормированных векторов $w_k \in H^2$, ($w_k = u_k \oplus v_k$, $\| u_k \|^2 + \| v_k \|^2 = 1$) такая, что при $k \to \infty$

$$\Big(\int\limits_0^T H(t)\,dt w_k,\ w_k\Big) = \int\limits_0^T \| Q(t)u_k - v_k \|^2\,dt \to 0.$$

Обозначим

$$F_k(t) = \| Q(t)u_k - v_k \|.$$

Имеем для любых $s,\ t$:

$$F_k(t) = \| Q(s)u_k - v_k + [Q(t) - Q(s)]u_k \|.$$

Поэтому для всех k

$$| F_k(t) - F_k(s) | \leqslant \| Q(t) - Q(s) \|,$$

и так как $Q(t)$ является непрерывной в равномерной операторной топологии, то все функции последовательности $\{F_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ равностепенно непрерывны.

Следовательно, при $k \to \infty$

$$F_k(t) = \| Q(t)u_k - v_k \| \to 0$$

равномерно по $t \in [0,\ T]$. В частности, положив $t = 0$, имеем при $k \to \infty$: $\| v_k \| \to 0$.

Итак, для всех $t \in [0,\ T]$ получаем при $k \to \infty$

$$Q(t)u_k = \int\limits_0^t P(s)u_k\,ds \to 0,\ \| u_k \| \uparrow 1. \tag{17}$$

В силу B-интегрируемости оператор-функции $P(t)$ имеем для **почти** всех t

$$P(t) = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t P(s)\,ds, \tag{18}$$

где производная в правой части равенства (18) понимается в сильном смысле (см. [8, стр. 102]).

Следовательно, для почти всех t и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(t, \varepsilon) > > 0$ такое, что

$$\left\| \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{t}^{t+\Delta t} P(s)\, ds - P(t) \right\| < \varepsilon$$

при

$$0 < |\Delta t| < \delta(t, \varepsilon).$$

Поэтому почти всюду по $t \in [0, T]$ при всех k имеем для любых Δt, $0 < |\Delta t| < \delta(t, \varepsilon)$,

$$\left\| \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{t}^{t+\Delta t} P(s)\, u_k\, ds - P(t)\, u_k \right\| < \varepsilon.$$

Отсюда в силу (17) имеем почти всюду по t при $k \to \infty$

$$\| P(t)\, u_k \| \to 0.$$

И так как $\| P(t)\, u_k \| \leqslant \| P(t) \| \in L_1(0, T)$, то по теореме Лебега

$$\lim_{k \to \infty} \int\limits_0^T \| P(t)\, u_k \|\, dt = 0, \text{ где } \| u_k \| \to 1.$$

Мы пришли к противоречию с условием (15).

Таким образом, $H(t)$ (16) является гамильтонианом положительного типа ($H(t) \geqslant 0$, $H_{\text{ср}} \gg 0$).

Рассмотрим теперь краевую задачу

$$\frac{dx}{dt} = \lambda J H(t)\, x, \quad x(0) + x(T) = 0. \tag{19}$$

По определению спектр этой краевой задачи состоит из тех значений λ, для которых оператор $U(T, \lambda) + I_2$ не имеет ограниченного обратного, определенного во всем H^2, где $U(T, \lambda)$ — оператор монодромии уравнения (10), I_2 — единичный оператор в H^2. Легко видеть, что в силу (8), (9) и (3) операторы $\Omega(\lambda)$ (14) и $U(T, \lambda) + I_2$ подобны ($\lambda \neq 0$):

$$\Omega(\lambda) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \lambda I \end{pmatrix}^{-1} \{ U(T, \lambda) + I_2 \} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \lambda I \end{pmatrix}.$$

Следовательно, спектры краевых задач (19) и (6) совпадают.

Таким образом, в силу теоремы М. Г. Крейна о центральной зоне устойчивости [1] получаем, что при $\lambda \in \Delta_0$ (5) все решения уравнения (10) с гамильтонианом (16) устойчиво ограничены. Отсюда пока еще нельзя заключить, что все решения уравнения (1) устойчиво ограничены. Однако следующие рассуждения (ср. [3, стр. 662]) позволяют получить искомый результат. Пусть $\lambda = \lambda_0 \in \Delta_0$. По теореме A оператор $U(T, \lambda_0)$ сильно устойчив. При этом же значении λ уравнение (1) эквивалентно системе

$$\frac{dy}{dt} = \lambda_0 z_0, \quad \frac{dz_0}{dt} = -P(t)\, y, \tag{20}$$

которую можно переписать в виде

$$\frac{dx}{dt} = J H_0(t)\, x, \tag{21}$$

где

$$x = y \oplus z_0, \; H_0(t) = \begin{pmatrix} P(t) & 0 \\ 0 & \lambda_0 I \end{pmatrix}, \; J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $z_0(0) = z(0)$ и $z_0(T) = z(T)$ в силу (8), (9), (3) и (20), то оператор монодромии $U_0(T, \lambda_0)$ уравнения (21) совпадает с $U(T, \lambda_0)$ и, следовательно, является сильно устойчивым.

Поэтому в силу теоремы A все решения уравнения (21), а значит и решения уравнения (1) при $\lambda = \lambda_0$ являются сильно устойчивыми.

Таким образом, достаточность условий теоремы доказана. Невозможность ослабления этих условий, указанную в теореме, мы докажем ниже, используя теорему 2.

Отметим, что в случае $\dim H < \infty$ условия (15) и (4) эквивалентны, а доказанная теорема совпадает с теоремами М. Г. Крейна [3] ($\dim H = n$) и А. М. Ляпунова [2] ($\dim H = 1$).

В следующей теореме мы не будем предполагать оператор-функцию $P(t)$ ни самосопряженной, ни периодической, ни B-интегрируемой.

Теорема 2. *Пусть оператор-функция $P(t)$ в уравнении (1) удовлетворяет условиям (12). Тогда, если существует последовательность нормированных векторов $x_k \in H$ такая, что при $к \to \infty$*

$$\left\| \int_0^t (t - s)\, sP(s)\, x_k\, ds \right\| \to 0 \tag{22}$$

равномерно по t в любом конечном интервале, то ни одно значение λ в комплексной λ-плоскости не является точкой устойчивости уравнения (1) (т. е. при любом λ уравнение (1) имеет на оси t неограниченные решения).

Доказательство. Не нарушая общности, положим $\lambda = 1$. Рассмотрим в H следующую задачу Коши:

$$\begin{aligned} &y_k'' + P(t)\, y_k = 0, \\ &y_k(0) = 0, \; y_k'(0) = x_k. \end{aligned} \tag{23}$$

Эта задача эквивалентна интегральному уравнению

$$y_k(t) = x_k t + \int_0^t (s - t)\, P(s)\, y_k(s)\, ds, \tag{24}$$

решая которое методом последовательных приближений, получаем

$$y_k(t) = y_{0k}(t) + y_{1k}(t) + \cdots, \tag{25}$$

где

$$y_{0k}(t) = x_k t, \; y_{nk}(t) = \int_0^t (s - t)\, P(s)\, y_{n-1k}(s)\, ds, \; (n = 1, 2 \ldots).$$

Оценим нормы членов ряда (25). Обозначив

$$M_k(t) = \max_{0 \leqslant s \leqslant t} \left\| \int_0^s (s - \xi)\, \xi P(\xi)\, x_k\, d\xi \right\|,$$

имеем

$$\| y_{nk}(t) \| \leqslant \frac{M_k(t)}{(n-1)!} \left| \int_0^t (t - s) \| P(s) \|\, ds \right|^{n-1} (n = 1, 2, \ldots),$$

откуда следует

$$\| y_k(t) \| \geqslant |t| - M_k(t)\, e^{\left| \int\limits_0^t (t-s) \| P(s) \| ds \right|} \tag{26}$$

Из условия (22) вытекает, что при $k \to \infty$

$$M_k(t) \to 0,$$

а потому

$$\sup_k \sup_{-\infty < t < \infty} \| y_k(t) \| = \infty. \tag{27}$$

Таким образом, вектор-функции $y_k(t)$ неограничены в совокупности, в то время как для любого k $\| y_k(0) \| = 0$, $\| y_k'(0) \| = 1$. Покажем, что отсюда вытекает существование неограниченных на оси t решений уравнения (1).

Допустим противное, т. е., что каждое решение уравнения (1) ограничено на оси. Рассмотрим оператор A, ставящий в соответствие любому вектору $y_0 \in H$ решение следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} & y'' + P(t)\, y = 0, \\ & y(0) = 0, \ y'(0) = y_0. \end{aligned} \tag{28}$$

В силу сделанного предположения об ограниченности на оси t каждог- решения уравнения (1), определенный всюду в H оператор A можно рас, сматривать как оператор, действующий из H в банахово пространство C_H $(-\infty$ $\infty)$ непрерывных вектор-функций со значениями в H и с нормой

$$\| y(\cdot) \|_C = \sup_{-\infty < t < \infty} \| y(t) \|_H.$$

Так как решения задачи Коши (28) в каждом конечном интервале оси t непрерывно зависят от начальных данных, легко видеть, что оператор A замкнут. Поэтому в силу теоремы Банаха о замкнутом графике оператор A ограничен. Мы пришли к противоречию с установленным выше фактом (27). Теорема доказана.

Пример 1. Пусть B-интегрируемая оператор-функция $P(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ в некотором ортонормированном базисе допускает диагональное матричное представление

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) & & & \\ & p_2(t) & 0 & \\ & & \ddots & \\ O & & p_k(t) & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, \tag{29}$$

где $p_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — скалярные функции, такие, что

$$\sup_k |p_k(t)| \in L_1^{\mathrm{loc}}$$

и при $k \to \infty$

$$\int\limits_0^t |p_k(s)|\, ds \to 0, \ (-\infty < t < \infty). \tag{30}$$

Легко видеть, что оператор-функция (29) удовлетворяет всем условиям теоремы 2. Следовательно, уравнение (1) с коэффициентом (29) ни при каком λ из комплексной λ-плоскости не является устойчивым.

Замечание. Потребуем дополнительно, чтобы коэффициент $P(t)$ (29) в рассмотренном примере удовлетворял условиям (2), (3) и чтобы

$$p_k(t) = m_k p_1(t), \text{ где } m_k \downarrow 0.$$

В этом случае обнаруживается следующий любопытный факт. Пересечение центральных зон устойчивости скалярных уравнений, на которые распадается уравнение (1) с коэффициентом (29), не пусто и совпадает с центральной зоной устойчивости первого из этих скалярных уравнений, в то время как само уравнение (1) ни при каком значении λ не устойчиво.

Из этого же примера следует, что в теореме 1 условие (15) нельзя заменить более слабым условием (4), если $\dim H = \infty$.

Пример 2. Пусть оператор-функция $P(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ в некотором ортонормированном базисе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ допускает матричное представление вида (29) с

$$p_k(t) = \sin kt, \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Заметим, что, за исключением условия B-интегрируемости, $P(t)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1, в том числе и условию (15).

С другой стороны, так как

$$\left\| \int_0^t (s-t) P(s) e_k \, ds \right\| = \left| \int_0^t (s-t) s \sin ks \, ds \right| \leqslant \frac{|t|+4}{k^2},$$

то выполняются все условия теоремы 2. Поэтому уравнение (1) в данном случае не является устойчивым.

Таким образом, мы видим, что условие B-интегрируемости операторного коэффициента в теореме 1 нельзя заменить более слабыми условиями (12).

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн. Введение в геометрию J-пространств и теорию операторов в этих пространствах. Вторая летняя математическая школа, I (Кацивели, июнь — июль 1964), Киев, 1965.

2. А. М. Ляпунов. Об одном трансцендентном уравнении и о линейных дифференциальных уравнениях второго порядка с периодическими коэффициентами. Собр. соч., т. II. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1956.

3. М. Г. Крейн. О признаках устойчивой ограниченности решений периодических канонических систем. ПММ, **19**, № 6, 1955.

4. М. Г. Крейн. Основные положения теоремы λ-зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Сборник памяти А. А. Андронова. Изд-во АН СССР, М., 1955.

5. И. М. Гельфанд, В. Б. Лидский. О структуре областей устойчивости линейных канонических систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами УМН, **10**, № 1, 1955.

6. В. И. Дергузов. Об устойчивости решений уравнений Гамильтона с неограниченными периодическими операторными коэффициентами. «Матем. сб.», 63, № 4, 1964.

7. Ф. С. Рофе-Бекетов. Разложение по собственным функциям бесконечных систем дифференциальных уравнений в несамосопряженном и самосопряженном случаях. «Матем. сб.», **51**, № 3, 1960.

8. Э. Хилле, Р. Филлипс. Функциональный анализ и полугруппы. (Перев. с англ.), ИЛ, М., 1962.

Поступила 9 января 1970 г.