О ПОДОБИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СТРОЧНО-ФИНИТНЫХ МАТРИЦ В АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ В КРУГЕ

К. М. Фишман

Пусть $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$ ($\overline{\mathfrak{A}}_R$, $0 \leqslant R < \infty$), пространство однозначных аналитических функций в круге $|z| < R$ ($|z| \leqslant R$) с обычно принятой топологией [1, 2, 3].

Обозначим через $\varphi(i)$, $i = 0, 1, \ldots$, целочисленную функцию

$$\varphi(i) = pi^n + p_1 i^{n-1} + \cdots + p_{n-1} i + q = pi^n + u(i) \tag{1}$$

с неотрицательными целыми коэффициентами $\varphi(i) > i$ $(i \geqslant 1)$, $p \geqslant 1$.

Рассмотрим матрицу $J = [j_{ik}]_0^\infty$,

$$j_{ik} = \begin{cases} \alpha_i & k = \varphi(i) \\ 0 & k \neq \varphi(i), \end{cases} \tag{2}$$

α_i — отличные от нуля комплексные числа. Введем матрицы $A = [a_{ik}]$, $B = [b_{ik}]$, причем

$$a_{ik} = b_{ik} = 0 \quad (k \geqslant \varphi(i)). \tag{3}$$

В работе даются условия, при которых матрицы $J + A$ и $J + B$ подобны в пространстве $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ — одно из пространств $\mathfrak{A}_R$, $\overline{\mathfrak{A}}_R$). Подобие этих матриц значает существование такого изоморфизма $T = [t_{ik}]_0^\infty$ (матрице $[t_{ik}]$ сопоставляем оператор $Tz^k = \sum\limits_{i=0}^{\infty} t_{ik} z^i$, $k \geqslant 0$) пространства $\mathfrak{A}$, что имеет место матричное равенство

$$T(J + A) = (J + B)\,T. \tag{4}$$

Обозначим через $L(\mathfrak{A})$ пространство всех линейных непрерывных отображений $\mathfrak{A}$. Как известно [4, 5, 6], матрица $T = \|t_{ik}\|$ определяет линейный непрерывный оператор в $\mathfrak{A}_R(\overline{\mathfrak{A}}_R)$ тогда и только тогда, когда для любого $\rho < R$ $(r > R)$ существуют такие $r = r(\rho) < R$ $(\rho = \rho(r) > R)$ и $C = C(\rho) > 0$ $(C = C(r) > 0)$, что

$$|t_{ik}| \leqslant C\frac{r^k}{\rho^i} \quad (i,\ k = 0,\ 1,\ \ldots). \tag{5}$$

Будем считать, что матрица T 1) принадлежит классу $L_1(\mathfrak{A}_R)(L_1(\overline{\mathfrak{A}}_R)$, если неравенства (5) можно удовлетворить при $r(\rho) < \rho\ (\rho(r) > r)$; 2) принадлежит классу $L_2(\mathfrak{A}_R)(L_2(\overline{\mathfrak{A}}_R))$, если неравенства (5) выполняются при $r(\rho) = \rho\ (\rho(r) = r)$; 3) принадлежит классу $L_3(\mathfrak{A}_R)(L_3(\overline{\mathfrak{A}}_R))$, если неравенства (5) выполняются при любом $r > \rho\ (\rho < r)$, и соответствующему ему значению C. Очевидно, имеют место включения

$$L_1(\mathfrak{A}) \subset L_2(\mathfrak{A}) \subset L_3(\mathfrak{A}) \subset L_4(\mathfrak{A}) = L(\mathfrak{A}).$$

Сформулируем условия, гарантирующие подобие матриц $J + A$ и $J + B$. Эти условия зависят от выбора пространства $\mathfrak{A}$, вида $\varphi(i)$, последовательности $\{\alpha_i\}$ и от классов, которым принадлежат матрицы A, B.

Теорема 1. *Пусть $\varphi(i) = i + p$, $p \geqslant 1$. Тогда матрицы $J + A$ и $J + B$ подобны в пространстве $\overline{\mathfrak{A}}_0$, если*

$$l_1 = \sup_{j<i} |\alpha_j||\alpha_i|^{-1} < \infty \tag{6}$$

и выполнено одно из следующих условий:

1) *матрицы A и B принадлежат классу $L_1(\overline{\mathfrak{A}}_0)$;*

2) *матрицы A и B принадлежат классу $L_2(\overline{\mathfrak{A}}_0)$ и*

$$l_2 = \varlimsup_{i\to\infty} i|\alpha_i|^{-1} < \infty; \tag{7}$$

3) *матрицы A и B принадлежат классу $L_3(\overline{\mathfrak{A}}_0)$ и*

$$l_3 = \varlimsup_{i\to\infty} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1}} < 1; \tag{8}$$

4) *матрицы A и B принадлежат классу $L_4(\overline{\mathfrak{A}}_0)$ и*

$$l_3 = \varlimsup_{i\to\infty} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1}} = 0. \tag{9}$$

Теорема 2. *Пусть $\varphi(i)$, как в теореме 1. Тогда матрицы $J + A$ и $J + B$ подобны в пространстве $\mathfrak{A}_R(\overline{\mathfrak{A}}_R)$, $0 < R < \infty$,* если

$$l_4 = \varlimsup_{i\to\infty} \max_{j<i} |\alpha_j||\alpha_i|^{-1} \leqslant 1 \tag{10}$$

и выполнено одно из следующих условий:

1) *матрицы A и B принадлежат классу $L_1(\mathfrak{A}_R)(L_1(\overline{\mathfrak{A}}_R))$ и*

$$\lim_{i\to\infty} \alpha_i = \infty; \tag{11}$$

2) *матрицы A и B принадлежат классу $L_2(\mathfrak{A}_R)(L_2(\overline{\mathfrak{A}}_R))$ и*

$$l_5 = \lim_{i\to\infty} i|\alpha_i|^{-1} = 0; \tag{12}$$

3) *матрицы* A *и* B *принадлежат классу* $L_4(\mathfrak{A}_R)$ $(L_4(\overline{\mathfrak{A}}_R))$ *и*

$$l_3 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1}} < 1. \tag{13}$$

Теорема 3. *Пусть* $\varphi(i)$, *как в теореме 1. Тогда матрицы* $J+A$ *и* $J+B$ *подобны в пространстве* $\mathfrak{A}_\infty$, *если*

$$l_1 = \sup_{j<i} |\alpha_j| \, |\alpha_i|^{-1} < \infty \tag{14}$$

и выполнено одно из следующих условий:

1) *матрицы* A *и* B *принадлежат классу* $L_1(\mathfrak{A}_\infty)$ *и*

$$\lim_{i\to\infty} \alpha_i = \infty; \tag{15}$$

2) *матрицы* A *и* B *принадлежат классу* $L_2(\mathfrak{A}_\infty)$ и

$$l_5 = \lim_{i\to\infty} i\,|\alpha_i|^{-1} = 0; \tag{16}$$

3) *матрицы* A *и* B *принадлежат классу* $L_3(\mathfrak{A}_\infty)$ *и*

$$l_3 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1}} < 1; \tag{17}$$

4) *матрицы* A *и* B *принадлежат классу* $L_4(\mathfrak{A}_\infty)$ *и*

$$l_5 = \lim_{i\to\infty} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1}} = 0. \tag{18}$$

Теорема 4. *Пусть* $\varphi(i) = pi + q$, $p > 1$. *Тогда матрицы* $J+A$ *и* $J+B$ *подобны в пространстве* $\overline{\mathfrak{A}}_0$, *если*

$$l_6 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1} \cdot \max_{j<i} |\alpha_j|} < \infty \tag{19}$$

и выполнено одно из условий:

1) *матрицы* A *и* B *принадлежат классу* $L_3(\overline{\mathfrak{A}}_0)$ *и*

$$l_3 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1}} < \infty; \tag{20}$$

2) матрицы A и B принадлежат классу L_4 $(\overline{\mathfrak{A}}_0)$

$$l_3 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1}} = 0. \tag{21}$$

Если к тому же последовательности $\{|\alpha_i| r^{-(p-1)i}\}_{(i)}$ — *неубывающие при достаточно малых* r, $r > 0$, *то условие* (19) *можно заменить условием*

$$l_7 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\alpha_{i-1}| \cdot |\alpha_i|^{-1}} < \infty. \tag{22}$$

Теорема 5. *Пусть* $\varphi(i)$, *как в теореме 4. Тогда матрицы* $J+A$ и $J+B$ *подобны в пространстве* $\mathfrak{A}_R$, $0 < R < \infty$, *если*

$$l_6 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1} \cdot \max_{j<i} |\alpha_j|} \leqslant \min(1, R^{1-p}) \tag{23}$$

и выполнено одно из условий:

1) *матрицы A и B принадлежат классу $L_3(\mathfrak{A}_R)$ и*

$$l_3 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1}} \leqslant R^{1-p}; \tag{24}$$

2) *матрицы A и B принадлежат классу $L_4(\mathfrak{A}_R)$ и*

$$l_3 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1}} < R^{1-p}. \tag{25}$$

Если к тому же последовательности $\{|\alpha_i|\, r^{-(p-1)i}\}_{(i)}$ — неубывающие при $r < R$ достаточно близких к R, то условие (23) *можно заменить:*

$$l_7 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1}\cdot|\alpha_{i-1}|} \leqslant 1. \tag{26}$$

Теорема 6. *Пусть $\varphi(i)$, как в теореме 4. Тогда матрицы $J + A$ и $J + B$ подобны в пространстве $\overline{\mathfrak{A}}_R$, $0 < R < \infty$, если*

$$l_6 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1}\cdot \max_{j<i}|\alpha_j|} \begin{cases} \leqslant 1 & \text{при } R \leqslant 1 \\ < R^{1-p} & \text{при } R > 1, \end{cases} \tag{27}$$

матрицы A и B принадлежат классу $L(\mathfrak{A}_R)$ и выполнено условие (25). *Если к тому же последовательности $\{|\alpha_i|\, r^{-(p-1)i}\}_{(i)}$ неубывают при $r > R$, достаточно близких к R, то условие* (27) *можно заменить условием*

$$l_7 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1}\cdot|\alpha_{i-1}|} \leqslant 1, \tag{28}$$

Теорема 7. *Пусть $\varphi(i)$, как в теореме 4. Тогда матрицы $J + A$ и $J + B$ подобны в пространстве $\mathfrak{A}_\infty$, если*

$$l_6 = \lim_{i\to\infty} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1} \max_{j<i}|\alpha_j|} = 0, \tag{29}$$

матрицы A и B принадлежат классу $L(\mathfrak{A}_\infty)$ и выполнено условие

$$l_3 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1}} = 0. \tag{30}$$

Если к тому же последовательности $\{|\alpha_i|\, r^{-(p-1)i}\}_{(i)}$ — неубывающие при r достаточно больших, то условие (29) *можно заменить условием*

$$l_7 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1}\cdot|\alpha_{i-1}|} < \infty. \tag{31}$$

Теорема 8. *Пусть $\varphi(i) = pi^n + p_1 i^{n-1} + \cdots + p_{n-1} i + q = pi^n + u(i)$ и $n > 1$. Тогда матрицы $J + A$ и $J + B$ подобны в пространстве $\overline{\mathfrak{A}}_0$, если*

$$l_8 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i^n]{|\alpha_i|^{-1} \max_{j<i}|\alpha_j|} < \infty, \tag{32}$$

матрицы A и B принадлежат классу $L(\overline{\mathfrak{A}}_0)$ и

$$l_9 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i^n]{|\alpha_i|^{-1}} < \infty. \tag{33}$$

Если к тому же последовательности $\{|\alpha_i| r^{-pi^n}\}_{(i)}$ — *неубывающие при достаточно малых значениях* r, $r > 0$, *то условие* (32) *можно заменить условием*

$$l_{10} = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i^n]{|\alpha_{i-1}||\alpha_i|^{-1}} < \infty. \quad (34)$$

Теорема 9. *Пусть* $\varphi(i)$, *как в теореме 8. Тогда матрицы* $J + A$ *и* $J + B$ *подобны в пространстве* $\mathfrak{A}_R(\overline{\mathfrak{A}}_R)$, $0 < R < \infty$, *если*

$$l_8 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i^n]{|\alpha_i|^{-1} \cdot \max_{j<i} |\alpha_j|} \leqslant \min(1, R^{-p}), \quad (35)$$

матрицы A *и* B *принадлежат классу* $L(\mathfrak{A}_R)\,|\,L(\overline{\mathfrak{A}}_R)\,|$ и

$$l_9 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i^n]{|\alpha_i|^{-1}} \leqslant R^{-p}\,(l_9 < R^{-p}). \quad (36)$$

Если к тому же последовательности $\{|\alpha_i| r^{-pi^n}\}_{(i)}$ — *неубывающие при* $r < R\,(r > R)$, *достаточно близких к* R, *то условие* (35) *можно заменить условием*

$$l_{10} = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i^n]{|\alpha_i|^{-1} \cdot |\alpha_{i-1}|} \leqslant 1. \quad (37)$$

Теорема 10. *Пусть* $\varphi(i)$, *как в теореме 8. Тогда матрицы* $J + A$ *и* $J + B$ *подобны в пространстве* $\mathfrak{A}_\infty$, *если*

$$l_{11} = \lim_{i\to\infty} \sqrt[i^n]{|\alpha_i|^{-1} \max_{j<i} |\alpha_j|} = 0, \quad (38)$$

матрицы A *и* B *принадлежат классу* $L(\mathfrak{A}_\infty)$ *и*

$$\lim_{i\to\infty} \sqrt[i^n]{|\alpha_i|^{-1}} = 0. \quad (39)$$

Если к тому же последовательности $\{|\alpha_i| r^{-pi^n}\}_{(i)}$ — *неубывающие при достаточно больших* r, *то условие* (38) *можно заменить условием*

$$l_{10} = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i^n]{|\alpha_i|^{-1} \cdot |\alpha_{i-1}|} < \infty. \quad (40)$$

Доказательство теорем 1—10. Условимся обозначать элементы матрицы $J + A\,(J + B)$ через $a_{ik}\,(b_{ik})$, положив

$$a_{i,\varphi(i)} = b_{i,\varphi(i)} = \alpha_i \quad (i = 0, 1, \ldots); \; a_{ik} = b_{ik} = 0 \quad (k > \varphi(i)). \quad (41)$$

Тогда матричное уравнение (4) равносильно бесконечной системе линейных уравнений относительно неизвестных t_{ik} $(i, k = 0, 1, \ldots)$:

$$\sum_{\substack{j \\ \varphi(j)\geqslant k}} t_{ij} a_{jk} = \sum_{\substack{j \\ j\leqslant\varphi(i)}} b_{ij} t_{jk} \quad (i, k = 0, 1, \ldots) \quad (42)$$

или

$$t_{\varphi(i),k} = \frac{1}{a_i}\Bigg(-\sum_{\substack{j \\ j<\varphi(i)}} b_{ij} t_{jk} + \sum_{\substack{j \\ \varphi(j)\geqslant k}} t_{ij} a_{jk}\Bigg). \quad (43)$$

В случае $\varphi(0) = 0$, $\alpha_0 = 0$ положим $t_{0k} = \delta_{0k}$ $(k = 0, 1, \ldots)$.

Элементы строки с номером $\varphi(i)$ выражаются, таким образом, только через элементы предыдущих строк. Это позволяет построить матрицу T рекуррентно сверху вниз. Положим

$$t_{ik}=\delta_{ik} \quad (i<\varphi(0)), \tag{44}$$

где δ_{ik} — символ Кронекера. Заменяя в (43) i через 0, при $\alpha_0 \neq 0$ имеем

$$t_{\varphi(0),\,k}=\frac{1}{\alpha_0}\Big(-\sum_{\substack{j\\ j<\varphi(0)}} b_{0j}t_{jk}+\sum_{\substack{j\\ \varphi(j)\geqslant k}} t_{0j}a_{jk}\Big)=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{\alpha_0}(-b_{0k}+a_{0k}) & \text{при } k<\varphi(0)\\ 1 & \text{при } k=\varphi(0)\\ 0 & \text{при } k>\varphi(0).\end{cases} \tag{45}$$

Пусть уже найдены элементы t_{jk} при $j\leqslant\varphi(i-1)$, причем

$$t_{jk}=\delta_{jk}\begin{cases}\text{при } j\leqslant\varphi(i-1) \text{ и } k\geqslant j\\ \text{при } j\notin R_\varphi,\ j<\varphi(i-1) \text{ и } k\geqslant 0,\end{cases} \tag{46}$$

где R_φ — область значений функции $\varphi(i)$. Тогда, положив

$$t_{jk}=\delta_{jk} \quad (\varphi(i-1)<j<\varphi(i)), \tag{47}$$

находим элементы строки с номером $\varphi(i)$ по формуле (43). Учитывая (46) (47), получаем

$$t_{\varphi(i),\,k}=\frac{1}{\alpha_i}\Big(-\sum_{\substack{j\\ k\leqslant j<\varphi(i)}} b_{ij}t_{jk}+\sum_{\substack{j\\ \varphi(j)\geqslant k\\ j<i}} t_{ij}a_{jk}\Big). \tag{48}$$

Из последней формулы заключаем:

$$t_{\varphi(i),\,k}=\begin{cases}1 & k=\varphi(i)\\ 0 & k>\varphi(i).\end{cases} \tag{49}$$

Продолжая таким образом, находим матрицу $T=[t_{ik}]$, удовлетворяющую условиям:

$$t_{ik}=\delta_{ik}\begin{cases}\text{при } i\notin R_\varphi \text{ и } k\geqslant 0\\ \text{при } i\in R_\varphi \text{ и } k\geqslant i.\end{cases} \tag{50}$$

Как видно из данного построения, существует одна и только одна матрица T, удовлетворяющая условию (4) и при $i\notin R_\varphi$ — условию (50).

Предположим, что элементы матриц A и B удовлетворяют оценкам

$$|a_{ik}|\leqslant C'\frac{r_1^k}{\rho_1^i} \quad (i,\ k=0,\ 1,\ \ldots), \tag{51}$$

$$|b_{ik}|\leqslant C'\frac{r_1^k}{\rho_1^i} \quad (i,\ k=0,\ 1,\ \ldots), \tag{52}$$

при некоторых положительных значениях C', r_1 и ρ_1.

Пусть теперь элементы t_{jk} при $j<\varphi(i)$ удовлетворяют оценкам

$$|t_{jk}|\leqslant C_i\frac{r^k}{\rho^j} \quad (j<\varphi(i),\ k\geqslant 0), \tag{53}$$

где $C_i \geqslant 1$, $r > \rho > 0$. Тогда из (48) следует

$$|t_{\varphi(i),k}| \leqslant \frac{1}{|\alpha_i|}\Bigg(\sum_{\substack{j \\ k \leqslant j < \varphi(i)}} |b_{ij}||t_{jk}| + \sum_{\substack{j \\ j \leqslant i \\ \varphi(j) \geqslant k}} |t_{ij}||a_{jk}|\Bigg) \leqslant$$

$$\leqslant C_i \frac{r^k}{\rho^{\varphi(i)}} \frac{1}{|\alpha_i|}\Bigg(C' \frac{\rho^{\varphi(i)}}{\rho_1^i} \sum_{\substack{j \\ k \leqslant j < \varphi(i)}} \left(\frac{r_1}{\rho}\right)^j + C' \left(\frac{r_1}{r}\right)^k \rho^{\varphi(i)-i} \sum_{\substack{j \\ j \leqslant i \\ \varphi(j) > k}} \left(\frac{r}{\rho_1}\right)^j +$$

$$+ \begin{cases} 0 & \text{при } k \notin R_\varphi \\ |\alpha_j| \dfrac{\rho^{\varphi(i)-i}}{r^{\varphi(j)-j}} & \text{при } k = \varphi(j) < \varphi(i) \quad (k < \varphi(i)). \end{cases} \tag{54}$$

Введем следующие обозначения:

$$\tau_1(i, k) = C' \frac{1}{|\alpha_i|} \frac{\rho^{\varphi(i)}}{\rho_1^i} \sum_{\substack{j \\ k \leqslant j < \varphi(i)}} \left(\frac{r_1}{\rho}\right)^j, \tag{55}$$

$$\tau_2(i, k) \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_i|} \left(\frac{r_1}{r}\right)^k \rho^{\varphi(i)-i} \sum_{\substack{j \\ j \leqslant i \\ \varphi(j) > k}} \left(\frac{r}{\rho_1}\right)^j, \tag{56}$$

$$\tau_3(i, k) = \begin{cases} 0 & \text{при } k \notin R_\varphi \\ \dfrac{|\alpha_j|}{|\alpha_i|} \dfrac{\rho^{\varphi(i)-i}}{r^{\varphi(j)-j}} & \text{при } k = \varphi(j) < \varphi(i), \end{cases} \tag{57}$$

$$\tau_\nu(i) = \max_{k < \varphi(i)} \tau_\nu(i, k) \quad (\nu = 1, 2, 3), \tag{58}$$

$$\tau(i) = \tau_1(i) + \tau_2(i) + \tau_3(i). \tag{59}$$

Тогда из (54)—(59) следует

$$|t_{\varphi(i),k}| \leqslant C_i \tau(i) \frac{r^k}{\rho^{\varphi(i)}} \quad (k < \varphi(i)), \tag{60}$$

и мы вправе положить

$$C_{i+1} = \max(C_i, C_i \cdot \tau(i)). \tag{61}$$

Если существует i_0 такое, что

$$\tau(i) \leqslant 1 \text{ при } i \geqslant i_0, \tag{62}$$

то имеет место оценка

$$|t_{ik}| \leqslant C_{i_0} \frac{r^k}{\rho^i} \quad (i, k = 0, 1, \ldots). \tag{63}$$

Согласно (55)

$$\tau_1(i) = \max_{k < \varphi(i)} C' \frac{1}{|\alpha_i|} \frac{\rho^{\varphi(i)}}{\rho_1^i} \sum_{\substack{j \\ k \leqslant j < \varphi(i)}} \left(\frac{r_1}{\rho}\right)^j \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} C' \dfrac{1}{|\alpha_i|} \dfrac{\rho^{\varphi(i)}}{\rho_1^i} \cdot \varphi(i) \text{ при } r_1 = \rho & (64) \\ C' \dfrac{1}{|\alpha_i|} \dfrac{r_1^{\varphi(i)}}{\rho_1^i} \dfrac{\rho}{r_1 - \rho} \text{ при } r_1 > \rho & (64_1) \end{cases}$$

Отсюда, уточняя вид функции $\varphi(i)$, имеем:

1) при $\varphi(i) = i + p,\ p \geqslant 1$

$$\tau_1(i) \leqslant \begin{cases} C' \dfrac{1}{|\alpha_i|} \left(\dfrac{\rho}{\rho_1}\right)^i \rho^p \cdot \varphi(i) \text{ при } r_1 = \rho & (65_1) \\ C' \dfrac{1}{|\alpha_i|} \left(\dfrac{r_1}{\rho_1}\right)^i r_1^p \dfrac{\rho}{r_1 - \rho} \text{ при } r_1 > \rho; & (65_2) \end{cases}$$

2) при $\varphi(i) = pi + q,\ p > 1,\ q \geqslant 0$

$$\tau_1(i) \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_i|} \left(\frac{r_1^p}{\rho_1}\right)^i r_1^q \frac{\rho}{r_1 - \rho} \text{ при } r_1 > \rho; \tag{66}$$

3) при $\varphi(i) = pi^n + u(i),\ n > 1,$

$$\tau_1(i) \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_i|} r_1^{pi^n + u(i)} \frac{1}{\rho_1^i} \frac{\rho}{r_1 - \rho} \text{ при } r_1 > \rho. \tag{67}$$

Согласно (56), (58)

$$\tau_2(i) = \max_{k < \varphi(i)} C' \frac{1}{|\alpha_i|} \left(\frac{r_1}{r}\right)^k \rho^{\varphi(i) - i} \sum_{\substack{j \\ j \leqslant i \\ \varphi(j) > k}} \left(\frac{r}{\rho_1}\right)^j \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} C' \dfrac{1}{|\alpha_i|} \rho^{\varphi(i) - i} \dfrac{\rho_1}{\rho_1 - r} \text{ при } r_1 \leqslant r < \rho_1 & (68_1) \\ C' \dfrac{1}{|\alpha_i|} \rho^{\varphi(i) - i} \cdot (i + 1) \text{ при } r_1 \leqslant r,\ r = \rho_1 & (68_2) \\ C' \dfrac{1}{|\alpha_i|} \rho^{\varphi(i) - i} \left(\dfrac{r}{\rho_1}\right)^i \dfrac{r}{r - \rho_1} \text{ при } r_1 \leqslant r > \rho_1. & (68_3) \end{cases}$$

Отсюда

1) при $\varphi(i) = i + p,\ p \geqslant 1$

$$\tau_2(i) \leqslant \begin{cases} C' \dfrac{1}{|\alpha_i|} \rho^p \dfrac{\rho_1}{\rho_1 - r} \text{ при } r_1 \leqslant r < \rho_1 & (69_1) \\ C' \dfrac{1}{|\alpha_i|} \rho^p (i + 1) \text{ при } r_1 \leqslant r = \rho_1 & (69_2) \\ C' \dfrac{1}{|\alpha_i|} \rho^p \left(\dfrac{r}{\rho_1}\right)^i \dfrac{r}{r - \rho_1} \text{ при } r_1 \leqslant r > \rho_1; & (69_3) \end{cases}$$

2) при $\varphi(i) = pi + q,\ p > 1,\ q \geqslant 0,$

$$\tau_2(i) \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_i|} \left(\frac{\rho^{p-1} \cdot r}{\rho_1}\right)^i \rho^q \frac{r}{r - \rho_1} \text{ при } r_1 \leqslant r > \rho_1; \tag{70}$$

3) при $\varphi(i) = pi^n + u(i),\ n > 1,$

$$\tau_2(i) \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_i|} \rho^{pi^n + u(i) - i} \left(\frac{r}{\rho_1}\right)^i \frac{r}{r - \rho_1} \text{ при } r_1 \leqslant r > \rho_1. \tag{71}$$

Согласно (57), (58)

$$\tau_3(i) \leqslant \max_{j < i} \frac{|\alpha_j|}{|\alpha_i|} \frac{\rho^{\varphi(i) - i}}{r^{\varphi(j) - j}}. \tag{72}$$

Отсюда

1) при $\varphi(i) = i + p,\ p \geqslant 1,$

$$\tau_3(i) \leqslant \max_{j < i} \frac{|\alpha_j|}{|\alpha_i|} \left(\frac{\rho}{r}\right)^p; \tag{73}$$

2) при $\varphi(i) = pi + q$, $p > 1$, $q \geqslant 0$,

$$\tau_3(i) \leqslant \max_{j<i} \frac{|\alpha_j|}{|\alpha_i|} \frac{\rho^{(p-1)i}}{r^{(p-1)j}} \left(\frac{\rho}{r}\right)^q; \tag{74}$$

3) при $\varphi(i) = pi^n + u(i)$, $n > 1$,

$$\tau_3(i) \leqslant \max_{j<i} \frac{|\alpha_j|}{|\alpha_i|} \frac{\rho^{pi^n+u(i)-i}}{r^{pj^n+u(j)-j}}. \tag{75}$$

Если последовательности $\{|\alpha_j| r^{-(p-1)j}\}_{(j)}$ не убывают при возрастании j, то вместо (74) имеем

$$\tau_3(i) \leqslant \frac{|\alpha_{i-1}|}{|\alpha_i|} \left(\frac{\rho^{p-1}}{r^{p-1}}\right)^i r^{p-1} \left(\frac{\rho}{r}\right)^q. \tag{76}$$

Из неравенства (74) получаем также

$$\tau_3(i) \leqslant \frac{\max\limits_{j<i} |\alpha_j|}{|\alpha_i|} \left(\frac{\rho^{p-1}}{r^{p-1}}\right)^i \left(\frac{\rho}{r}\right)^q \quad \text{при } r < 1 \tag{77}$$

и

$$\tau_3(i) \leqslant \frac{\max\limits_{j<i} |\alpha_j|}{|\alpha_i|} \rho^{(p-1)i} \left(\frac{\rho}{r}\right)^q \quad \text{при } r > 1. \tag{78}$$

Для проверки непрерывности матрицы T достаточно установить неравенство (63), ограничивая величины, входящие в (63), наложенными условиями непрерывности.

Предположим, что условия теоремы о выполнены. Пусть r — произвольное положительное число. Тогда при достаточно малых значениях ρ, $\rho < r$, из (73) следует

$$\tau_3(i) \leqslant l_1 \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^p < \frac{1}{3}. \tag{79}$$

Переходим к отдельным пунктам теоремы 1.

1) Положив $r_1 = r$, находим $\rho_1 > r_1$ и $C' > 0$ так, что выполняются неравенства (51), (52). Учитывая (65_2), (69_1) и выбирая достаточно малое значение ρ, получаем при $i \geqslant 2$

$$\tau_1(i) \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_i|} r_1^p \frac{\rho}{r_1 - \rho} \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_1|} l_1 \frac{\rho r_1^p}{r_1 - \rho} < \frac{1}{3},$$

$$\tau_2(i) \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_i|} \rho^p \frac{\rho_1}{\rho_1 - r} \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_1|} l_1 \rho^p \frac{\rho_1}{\rho_1 - r} < \frac{1}{3}.$$

2) Положив $\rho_1 = r_1 = r$, находим C' так, что выполняются неравенства (51), (52). Учитывая (65_2) и (69_2), выбирая достаточно большое $i_0 \geqslant 1$ и достаточно малое значение ρ, $\rho < r$, получаем

$$\tau_1(i) \leqslant C' \frac{1}{i} \frac{i}{|\alpha_i|} r_1^p \frac{\rho}{r_1 - \rho} \leqslant C'(l_2 + 1) r_1^p \frac{\rho}{r_1 - \rho} < \frac{1}{3} \quad (i \geqslant i_0),$$

$$\tau_2(i) \leqslant C' \frac{i}{|\alpha_i|} \rho^p \frac{i+1}{i} \leqslant 2C'(l_2 + 1)\rho^p < \frac{1}{3} \quad (i \geqslant i_0).$$

3) Положив $r_1 = r$, находим $\rho_1 < r_1$ так, чтобы $\frac{r_1}{\rho_1} < \frac{2}{l_3 + 1}$ и ему соответствующее значение C', при котором выполняются неравенства (51), (52).

Пусть $\frac{1}{|a_i|} < \left(\frac{1+l_3}{2}\right)^i$ при $i \geqslant i_0$. Выбирая ρ достаточно малым, имеем согласно (65_2), (69_3)

$$\tau_1(i) \leqslant C'\left(\frac{1+l_3}{2}\right)^i\left(\frac{2}{l_3+1}\right)^i r_1^\rho \frac{\rho}{r_1-\rho} \leqslant C' r_1^\rho \frac{\rho}{r_1-\rho} < \frac{1}{3} \quad (i \geqslant i_0),$$

$$\tau_2(i) \leqslant C'\left(\frac{1+l_3}{2}\right)^i \rho^\rho \left(\frac{2}{1+l_3}\right)^i \frac{r}{r-\rho_1} < \frac{1}{3} \quad (i \geqslant i_0).$$

4) Положив $r_1 = r$, находим $\rho_1 < r_1$ и C' так, чтобы выполнялись оценки (51), (52). Пусть $\frac{1}{|a_i|} \leqslant \left(\frac{\rho_1}{2r_1}\right)^i$ при $i \geqslant i_0$. Тогда в силу (65_2), (69_3) при достаточно малых значениях ρ имеем:

$$\tau_1(i) \leqslant C'\left(\frac{\rho_1}{2r_1}\right)^i\left(\frac{r_1}{\rho_1}\right)^i r_1^\rho \frac{\rho}{r_1-\rho} \leqslant C' r_1^\rho \frac{\rho}{r_1-\rho} < \frac{1}{3} \quad (i \geqslant i_0),$$

$$\tau_2(i) \leqslant C'\left(\frac{\rho_1}{2r_1}\right)^i \rho^\rho \left(\frac{r_1}{\rho_1}\right)^i \frac{r}{r-\rho_1} \leqslant C'\rho^\rho \frac{r}{r-\rho_1} < \frac{1}{3} \quad (i \geqslant i_0).$$

Предположим выполненными условия теоремы 2. Пусть ρ (r) произвольное, $\rho < R$ $(r > R)$. Фиксируем значение ρ_0 (r_0), $\rho < \rho_0 < R$ $(R < r_0 < r)$. Выберем $\varepsilon > 0$ настолько мало, чтобы

$$(l_4+\varepsilon)\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^p < 1 \left((l_4+\varepsilon)\left(\frac{r_0}{r}\right)^p < 1\right). \tag{80}$$

Тогда при $\rho_0 < r < R$ $(R < \rho < r_0)$ и при достаточно большом i_0 имеем согласно (73)

$$\tau_3(i) \leqslant (l_4+\varepsilon)\left(\frac{\rho}{r}\right)^p \leqslant (l_4+\varepsilon)\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^p < 1 \quad (i \geqslant i_0) \tag{81}$$

$$\left(\tau_3(i) \leqslant (l_4+\varepsilon)\left(\frac{\rho}{r}\right)^p \leqslant (l_4+\varepsilon)\left(\frac{r_0}{r}\right)^p < 1 \quad (i \geqslant i_0)\right). \tag{82}$$

1) Выберем ρ_1, $\rho_0 < \rho_1 < R$ $(r_1$, $r_1 = r)$ и найдем r_1, $\rho_0 < r_1 < \rho_1$ $(\rho_1$, $r_1 < \rho_1)$ и C' так, чтобы выполнялись неравенства (51), (52). Фиксируем теперь r, $r_1 < r < \rho_1$ $(\rho$, $R < \rho < r_0)$. Учитывая (65_2), (69_1), (11), получаем

$$\tau_1(i) \leqslant C'\frac{1}{|a_i|} r_1^\rho \frac{\rho}{r_1-\rho} \to 0 \quad (i \to \infty),$$

$$\tau_2(i) \leqslant C'\frac{1}{|a_i|} \rho^\rho \frac{\rho_1}{\rho_1 - r} \to 0 \ (i \to \infty).$$

2) Выбирая $r_1 = \rho_1$, $\rho_0 < \rho_1 < R$ $(\rho_1 = r_1 = r)$, находим C' так, чтобы выполнялись неравенства (51), (52). Положим $r = \rho_1$ $(\rho = r_1)$. Учитывая (65_2), (65_1), (69_2) и (12) получаем

$$\tau_1(i) \leqslant C'\frac{1}{|a_i|} r_1^\rho \frac{\rho}{r_1-\rho} \to 0 \ (i \to \infty),$$

$$|\tau_1(i) \leqslant C'\frac{1}{|a_i|} \rho^\rho (i+p) \to 0 \ (i \to \infty)|,$$

$$\tau_2(i) \leqslant C'\frac{1}{|a_i|} \rho^\rho (i+1) \to 0 \ (i \to \infty).$$

3) Предположим, что с самого начала ρ (r) был выбран настолько близко от R, чтобы $\frac{R}{\rho}\frac{l_3+1}{2} < 1$ $\left(\frac{r}{R}\frac{l_3+1}{2} < 1\right)$. Выберем ρ_1, $\rho < \rho_1 < R$ $(r_1$,

$R < r_1 < r$). Находим r_1 (ρ_1), $\rho_1 < r_1 < R$ ($R < \rho_1 < r_1$) и C' так, что выполняются неравенства (51), (52). Пусть еще $\frac{1}{|\alpha_i|} \leqslant \left(\frac{l_3+1}{2}\right)^i$ при $i \geqslant i_0$. Тогда, положив $r = r_1$ ($\rho = \rho_1$), имеем в силу (65_2), (69_3) и (11)

$$\tau_1(i) \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_i|}\left(\frac{r_1}{\rho_1}\right)^i r_1^p \frac{\rho}{r_1-\rho} \leqslant C' \left(\frac{l_3+1}{2}\right)^i \left(\frac{R}{\rho}\right)^i r_1^p \frac{\rho}{r_1-\rho} \to 0 \ (i_0 \leqslant i \to \infty)$$
$$\left(\tau_1(i) \leqslant C' \left(\frac{l_3+1}{2}\right)^i \left(\frac{r}{R}\right)^i r_1^p \frac{\rho}{r_1-\rho} \to 0 \ (i_0 \leqslant i \to \infty)\right),$$
$$\tau_2(i) \leqslant C' \frac{1}{|\alpha^i|}\left(\frac{r}{\rho_1}\right)^i \rho^p \frac{r}{r-\rho_1} \leqslant C' \left(\frac{l_3+1}{2}\right)^i \left(\frac{R}{\rho}\right)^i \rho^p \frac{r}{r-\rho_1} \to 0 \ (i_0 \leqslant i \to \infty)$$
$$\left(\tau_2(i) \leqslant C' \left(\frac{l_3+1}{2}\right)^i \left(\frac{r}{R}\right)^i \rho^p \frac{r}{r-\rho_1} \to 0 \ (i_0 \leqslant i \to \infty)\right).$$

Предположим выполненными условия теоремы 3.

Пусть ρ, $\rho > 0$, задано произвольно. Находим ρ_0, $\rho_0 > \rho$, так, чтобы

$$l_1\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^p < 1. \tag{83}$$

Тогда при $r > \rho_0$ в силу (73) имеем

$$\tau_3(i) \leqslant l_1\left(\frac{\rho}{r}\right)^p \leqslant l_1\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^p < 1. \tag{84}$$

Переходим к отдельным пунктам теоремы.

1) Выберем ρ_1, $\rho_1 > \rho_0$, и найдем соответствующие значения r_1, $\rho_0 < r_1 < \rho_1$, C' так, что выполняются условия (51), (52). Положив $r = r_1$, получаем в силу (65_2), (69_1) и (15)

$$\tau_1(i) \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_i|} r_1^p \frac{\rho}{r_1-\rho} \to 0 \ (i \to \infty),$$
$$\tau_2(i) \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_i|} \rho^p \frac{\rho_1}{\rho_1 - r} \to 0 \ (i \to \infty).$$

2) Для $\rho_1 = r_1$, $\rho_1 > \rho_0$, находим соответствующее значение C' так, что выполняются условия (51), (52). Положив $r = r_1$, получаем в силу (65_2), (69_2) и (16)

$$\tau_1(i) \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_i|} r_1^p \frac{\rho}{r_1-\rho} \to 0 \ (i \to \infty),$$
$$\tau_2(i) \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_i|} (i+1)\rho^p \to 0 \ (i \to \infty).$$

3) *Для* ρ_1, $\rho_1 > \rho_0$, выберем r_1, $r_1 > \rho_1$, так близко от ρ_1, чтобы $r_1/\rho_1 < 1/l_3$ и соответствующее значение C' так, чтобы выполнялись неравенства (51), (52). Положив теперь $r = r_1$, получаем в силу (65_2), (69_3) и (17)

$$\tau_1(i) \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_i|}\left(\frac{r_1}{\rho_1}\right)^i r_1^p \frac{\rho}{r_1-\rho} \to 0 \ (i \to \infty),$$
$$\tau_2(i) \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_i|}\left(\frac{r}{\rho_1}\right)^i \rho^p \frac{r}{r-\rho_1} \to 0 \ (i \to \infty).$$

4) Для ρ_1, $\rho_1 > \rho_0$, находим соответствующие значения r_1, $r_1 > \rho_1$, и C' так, что выполняются неравенства (51), (52). Положив $r = r_1$, получаем в силу (65_2), (69_3) и (18)

$$\tau_1(i) \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_i|} \left(\frac{r_1}{\rho_1}\right)^i r_1^\rho \frac{\rho}{r_1 - \rho} \to 0 \ (i \to \infty),$$
$$\tau_2(i) \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_i|} \left(\frac{r}{\rho_1}\right)^i \rho^p \frac{r}{r - \rho_1} \to 0 \ (i \to \infty).$$

Предположим выполненными условия теоремы 4.

Пусть r произвольное значение промежутка (0,1). Учитывая (19), (74), находим значение r_0, $0 < r_0 < r$ так, чтобы при $\rho < r_0$ имело место

$$\tau_3(i) \leqslant \frac{\max\limits_{j<i} |\alpha_j|}{|\alpha_i|} \left(\frac{\rho^{p-1}}{r^{p-1}}\right)^i r^{p-1} \left(\frac{\rho}{r}\right)^p < 1. \tag{85}$$

Рассмотрим отдельные пункты теоремы.

Выберем сперва $r_1, r_1 < r_0$, настолько близко от нуля, чтобы $r_1^{p-1} < l_3^{-1}$. Находим теперь ρ_1, $0 < \rho_1 < r_1$, настолько близко от r_1, чтобы $\frac{r_1}{\rho_1} r_1^{p-1} < l_3^{-1}$. Пусть C' — соответствующее r_1 и ρ_1 значение, при котором выполняются неравенства (51), (52). Выбирая ρ, $\rho < r_1$, настолько малым, чтобы $\rho^{p-1} \frac{r}{\rho_1} < l_3^{-1}$, получаем в силу (66), (70) и (20)

$$\tau_1(i) \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_i|} \left(\frac{r_1^p}{\rho_1}\right)^i r_1^q \frac{\rho}{r_1 - \rho} \to 0 \ (i \to \infty), \tag{86}$$
$$\tau_2(i) \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_i|} \left(\frac{\rho^{p-1} r}{\rho_1}\right)^i \rho^q \frac{r}{r - \rho_1} \to 0 \ (i \to \infty). \tag{87}$$

2) Фиксируем r_1, $r_1 < r_0$, и находим ему соответствующие значения ρ_1 и C', $\rho_1 < r_1$, при которых выполняются неравенства (51), (52). Выберем теперь произвольно ρ, $\rho < \rho_1$. Тогда в силу (66), (70) и (21) убеждаемся в справедливости (86), (87).

Если последовательности $\{|\alpha_i| r^{-(p-1)i}\}_{(i)}$ неубывающие при достаточно малых r, используя (76) выберем r_0, $r_0 < r$, так чтобы

$$\tau_3(i) \leqslant \frac{|\alpha_{i-1}|}{|\alpha_i|} \left(\frac{\rho^{p-1}}{r^{p-1}}\right)^i r^{p-1} \left(\frac{\rho}{r}\right)^q < 1 \ \text{при}\ \rho < r_0.$$

Это соотношение заменяет в данном случае неравенство (85).

Предположим выполненными условия теоремы 5.

Пусть ρ — произвольное значение меньше R. Фиксируем значение r_0, $\rho < r_0 < R$. Если $R \leqslant 1$, то в силу (77), (23) существует i_0 такое, что при $r_0 < r < R$ и $i \geqslant i_0$

$$\tau_3(i) \leqslant \frac{\max\limits_{j<i} |\alpha_j|}{|\alpha_i|} \left(\frac{\rho^{p-1}}{r^{p-1}}\right)^i < 1.$$

Если же $R > 1$, то, предположив $1 < \rho < r < R$, согласно (78), (23) существует i_1 такое, что при $i \geqslant i_1$

$$\tau_3(i) \geqslant \frac{\max\limits_{j<i} |\alpha_j|}{|\alpha_i|} \rho^{(p-1)i} < 1.$$

Рассмотрим отдельно пункты теоремы.

1) Фиксируем ρ_1, $r_0 < \rho_1 < R$, и выберем r_1, $\rho_1 < r_1 < R$, настолько близко от ρ_1, чтобы $\frac{r_1}{\rho_1} r_1^{p-1} < R^{p-1}$ и $\rho^{p-1}\frac{r_1}{\rho_1} < R^{p-1}$, после чего находим C' так, чтобы выполнялись неравенства (51), (52). Выбирая теперь $r = r_1$, получаем в силу (66), (70) и (24)

$$\tau_1(i) \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_i|}\left(\frac{r_1^p}{\rho_1}\right)^i r_1^q \frac{\rho}{r_1-\rho} \to 0 \quad (i \to \infty),$$

$$\tau_2(i) \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_i|}\left(\rho^{p-1}\frac{r_1}{\rho_1}\right)^i \rho^q \frac{r_1}{r_1-\rho_1} \to 0 \quad (i \to \infty).$$

2) Выберем ρ_1, $r_0 < \rho_1 < R$, настолько близко от R, чтобы $\frac{R}{\rho_1} R^{p-1} < < l_3^{-1}$. Для ρ_1 находим r_1, $\rho_1 < r_1 < R$, и C' так, чтобы выполнялись неравенства (51), (52), и положим $r = r_1$. Тогда в силу (66), (70) и (25) заключаем

$$\tau_1(i) \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_i|}\left(\frac{r_1^p}{\rho_1}\right)^i r_1^q \frac{\rho}{r_1-\rho} \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_i|}\left(\frac{R^p}{\rho_1}\right)^i r_1^q \frac{\rho}{r_1-\rho} \to 0 \quad (i \to \infty),$$

$$\tau_2(i) \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_i|}\left(\frac{\rho^{p-1}\cdot r}{\rho_1}\right)^i \rho^q \frac{\rho}{r-\rho_1} \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_i|}\left(\frac{R^p}{\rho_1}\right)^i \rho^q \frac{r}{r-\rho_1} \to 0 \quad (i \to \infty).$$

Если последовательности $\{\alpha_i r^{-(p-1)\,i}\}_{(i)}$ не убывают при $r_0 < r < R$, то, исходя из оценки (76) и учитывая (26), заключаем

$$\tau_3(i) \leqslant \left|\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\right| \left(\frac{\rho}{r}\right)^{(p-1)\,i} r^{p-1}\left(\frac{\rho}{r}\right)^q \to 0 \quad (i \to \infty).$$

Предположим выполненными условия теоремы 6.

Если $R \leqslant 1$ и $R < \rho < r$, то в силу (27) и (77) имеем

$$\tau_3(i) \leqslant \frac{\max\limits_{j<i}|\alpha_j|}{|\alpha_i|}\left(\frac{\rho^{p-1}}{r^{p-1}}\right)^i r^{p-1}\left(\frac{\rho}{r}\right)^q \to 0 \quad (i \to \infty).$$

Пусть $R > 1$. Выберем $\rho_0 > R$ так близко от R, чтобы $\rho^{p-1} < l_6^{-1}$ при $R < \rho < \rho_0$. Тогда при таких значениях ρ в силу (27) и (78) имеем

$$\tau_3(i) \leqslant \frac{\max\limits_{j<i}|\alpha_j|}{|\alpha_i|}\rho^{(p-1)\,i}\left(\frac{\rho}{r}\right)^q \to 0 \quad (i \to \infty).$$

Пусть r_0 выбран настолько близко от R, что $\frac{r_0}{R} r_0^{p-1} < l_3^{-1}$ и кроме того $r_0 < \rho_0$ в случае $R > 1$. Пусть r — произвольное значение промежутка (R, r_0). Положим $r_1 = r$ и найдем соответствующие значения ρ_1, $R < \rho_1 < r_1$, и C' так, чтобы выполнялись условия (51), (52). Пусть ρ произвольное значение промежутка (R, ρ_1). Тогда из (66), (70) и (28) следует

$$\tau_1(i) \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_i|}\left(\frac{r_1^p}{\rho_1}\right)^i r_1^q \frac{\rho}{r_1-\rho} \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_i|}\left(\frac{r_0^p}{R}\right)^i r_1^q \frac{\rho}{r_1-\rho} \to 0 \quad (i \to \infty),$$

$$\tau_2(i) \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_i|}\left(\frac{\rho^p r}{\rho_1}\right)^i \rho^q \frac{r}{r-\rho_1} \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_i|}\left(\frac{r_0^p}{R}\right)^i \rho^q \frac{r}{r-\rho_1} \to 0 \quad (i \to \infty).$$

Если последовательности $\{|\alpha_i| r^{-(p-1)i}\}_{(i)}$ не убывают при $r > R$ достаточно близких от R, то на основании (76) и (28) имеем

$$\tau_3(i) \leqslant \left|\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\right| \left(\frac{\rho^{p-1}}{r^{p-1}}\right)^i r^{p-1}\left(\frac{\rho}{r}\right)^q \to 0 \quad (i \to \infty).$$

Предположим выполненными условия теоремы 7.

Пусть ρ произвольно, $\rho > 1$. Для фиксированного значения ρ_1, $\rho_1 > \rho$, находим соответствующие значения r_1 и C' $r_1 > \rho_1$, так, что выполняются неравенства (51), (52). Выберем r, $r > r_1$, таким большим, чтобы $\rho^{p-1}/r^{p-1} < l_7^{-1}$. Тогда в силу (78), (29), (66), (69_3) и (30) имеем

$$\begin{aligned} \tau_3(i) &\leqslant \frac{\max\limits_{j<i}|\alpha_j|}{|\alpha_i|}\,\rho^{(p-1)\,i}\left(\frac{\rho}{r}\right)^q \to 0 \ \ (i\to\infty), \\ \tau_1(i) &\leqslant C'\,\frac{1}{|\alpha_i|}\left(\frac{r_1^p}{\rho_1}\right)^i r_1^q\,\frac{\rho}{r_1-\rho} \to 0 \ \ (i\to\infty). \\ \tau_2(i) &\leqslant C'\,\frac{1}{|\alpha_i|}\left(\frac{r}{\rho_1}\right)^i \rho^q\,\frac{r}{r-\rho_1} \to 0 \ \ (i\to\infty). \end{aligned} \tag{88}$$

Если последовательности $\{|\alpha_i|\,r^{-(p-1)\,i}\}_{(i)}$ не убывают при r достаточно больших, то используя (76) и (31) можно заменить (88) соотношением

$$\tau_3(i) \leqslant \left|\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\right|\left(\frac{\rho^{p-1}}{r^{p-1}}\right)^i r^{p-1}\left(\frac{\rho}{r}\right)^q \to 0 \quad (i\to\infty).$$

Предположим выполненными условия теоремы 8.

Пусть r — произвольное значение, удовлетворяющее условию $r^p < \min(1, l_9^{-1})$. Для значения r_1, $r_1 < r$, находим соответствующие значения ρ_1 и C', $\rho_1 < r_1$, так, что выполняются условия (51), (52). Фиксируем значение ρ так, чтобы $\rho < \rho_1$, $\rho^p/r^p < \min(l_8^{-1}, l_{10}^{-1})$. Тогда в силу (75), (32) при достаточно больших значениях i имеем

$$\tau_3(i) \leqslant \frac{\max\limits_{j<i}|\alpha_j|}{|\alpha_i|}\left(\frac{\rho^p}{r^p}\right)^{i^n}\frac{\rho^{u(i)-i}}{r^{p(i-1)^n-pi^n+u(i-1)}} \to 0 \ \ (i\to\infty), \tag{89}$$

а (67), (71) и (33) дают

$$\begin{aligned} \tau_1(i) &\leqslant C'\,\frac{1}{|\alpha_i|}\,r_1^{pi^n}\,r_1^{u(i)}\,\frac{1}{\rho_1^i}\,\frac{\rho}{r_1-\rho} \to 0 \ \ (i\to\infty), \\ \tau_2(i) &\leqslant C'\,\frac{1}{|\alpha_i|}\,\rho^{pi^n}\rho^{u(i)-i}\left(\frac{r}{\rho_1}\right)^i\frac{r}{r-\rho_1} \to 0 \quad (i\to\infty). \end{aligned}$$

Если последовательности $\{|\alpha_i|\,r^{-pi^n}\}_{(i)}$ — неубывающие при достаточно малых значениях r, то, используя (75) и (34), можно заменить (89) соотношением

$$\tau_3(i) \leqslant \left|\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\right|\left(\frac{\rho^p}{r^p}\right)^{i^n}\frac{\rho^{u(i)-i}}{r^{u(i-1)+p\cdot(i-1)^n-pi^n}} \to 0 \quad (i\to\infty).$$

Предположим выполненными условия теоремы 9.

Пусть ρ (r) произвольное, $\rho < R$, $\rho > 1$, если $R > 1$ $(R^p < r^p < l_9^{-1}$, $r < 1$, если $R < 1)$. Для $\rho_1(r_1)$, $\rho < \rho_1 < R$ $(R < r_1 < r)$ находим соответствующие значения r_1 (ρ_1) и C', $\rho_1 < r_1 < R$ $(R < \rho_1 < r_1)$, для которых выполняются неравенства (51), (52). Фиксируем произвольно r (ρ), $r_1 < r < R$ $(R < \rho < \rho_1)$. Тогда из (75) и (35) при $R \leqslant 1$ $(R < 1)$ и достаточно больших i следует

$$\tau_3(i) \leqslant \frac{\max\limits_{j<i}|\alpha_j|}{|\alpha_i|}\left(\frac{\rho^p}{r^p}\right)^{i^n}\frac{\rho^{u(i)-i}}{r^{u(i-1)+p(i-1)^n-pi^n}} \to 0 \quad (i\to\infty),$$

а при $R > 1$ $(R \geqslant 1)$

$$\tau_3(i) \leqslant \frac{\max\limits_{j<i} |\alpha_j|}{|\alpha_i|} \rho^{pi^n} \frac{\rho^{u(i)-i} r^{i-1}}{r^q} \to 0 \quad (i \to \infty).$$

Из (67), (71) и (36) следует также

$$\tau_1(i) \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_i|} r_1^{pi^n} r_1^{u(i)} \frac{1}{\rho_1^i} \frac{\rho}{r_1 - \rho} \to 0, \quad (i \to \infty), \tag{90}$$

$$\tau_2(i) \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_i|} \rho^{pi^n} \rho^{u(i)-i} \left(\frac{r}{\rho_1}\right)^i \frac{r}{r - \rho_1} \to 0 \quad (i \to \infty).$$

Если последовательности $\{|\alpha_i| r^{-pi^n}\}_{(i)}$ неубывающие при $r < R$ $(r > R)$ достаточно близких к R, то в силу (75) и (37), (90) и (91) заменяются соответственно соотношениями

$$\tau_3(i) \leqslant \left|\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\right| \left(\frac{\rho^p}{r^p}\right)^{i^n} \frac{\rho^{u(i)-i}}{r^{p(i-1)^n - pi^n + u(i-1)}} \to 0 \quad (i \to \infty)$$

при $R \leqslant 1$ $(R < 1)$ и

$$\tau_3(i) \leqslant \left|\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\right| \left[\frac{\rho^p}{r^p}\right]^{i^n} \frac{\rho^{u(i)-i} r^{i-1}}{r^{q+p\cdot(i-1)^n - pi^n}} \to 0 \quad (i \to \infty)$$

при $R > 1$ $(R \geqslant 1)$.

Предположим выполненными условия теоремы 10.

Пусть ρ, $\rho > 1$, произвольное. Выберем ρ_1, $\rho_1 > \rho$, и найдем ему соответствующие значения r_1 и C', $r_1 > \rho_1$, так, что выполняются неравенства (51), (52). Фиксируем теперь произвольно r, $r > r_1$. Тогда из (75) и (38) заключаем

$$\tau_3(i) \leqslant \frac{\max\limits_{j<i} |\alpha_j|}{|\alpha_i|} \rho^{pi^n} \frac{\rho^{u(i)-i} r^{i-1}}{r^q} \to 0 \quad (i \to \infty)$$

а из (67), (71) и (39)

$$\tau_1(i) \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_i|} r_1^{pi^n} r_1^{u(i)} \frac{1}{\rho_1^i} \frac{\rho}{r_1 - \rho} \to 0 \quad (i \to \infty), \tag{91}$$

$$\tau_2(i) \leqslant C' \frac{1}{|\alpha_i|} \rho^{pi^n} \rho^{u(i)-i} \left(\frac{r}{\rho_1}\right)^i \frac{r}{r - \rho_1} \to 0 \quad (i \to \infty).$$

Если же последовательности $\{|\alpha_i| r^{-pi^n}\}_{(i)}$ неубывающие при достаточно больших значений r, то выбирая r так, чтобы $\rho^p/r^p < l_{10}^{-1}$, получаем на основе (75) и (40)

$$\tau_3(i) \leqslant \left|\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\right| \left(\frac{\rho^p}{r^p}\right)^i \frac{\rho^{u(i)-i} r^{i-1}}{r^{p\cdot(i-1)^n - pi^n + q}} \to 0 \quad (i \to \infty).$$

Осталось доказать непрерывную обратимость матрицы T в соответствующем пространстве. Пусть матрица $T' = [t'_{ik}]$ построена как указано выше, исходя вместо (4) из соотношения

$$T'(J + B) = (J + A)T'. \tag{4'}$$

Тогда из (4) и (4') заключаем, что

$$T'T(J + A) = (J + A)T'T. \tag{92}$$

Пусть $T'T = [\tau_{ik}]$. Тогда при $i \notin R_\varphi$, учитывая (50), имеем $\tau_{ik} = \sum\limits_{k \leqslant \nu \leqslant i} t'_{i\nu} t_{\nu k} = t_{ik} = \delta_{ik}$. Так как единичная матрица I тоже удовлетворяет условиям (50) и $I(J+A) = (J+A)I$, то, учитывая единственность нашего построения, заключаем $T'T = I$ и таким же образом убеждаемся, что $TT' = I$.

Опираясь на двойственность аналитических пространств [1—3], из доказанных теорем можно получить аналогичные предложения для матриц, имеющих в каждом столбце конечное число элементов, а именно, в i-м столбце все элементы, лежащие ниже $\varphi(i)$-й строки равны нулю. При этом надо учесть, что пространство $\mathfrak{A}_R$ двойственно с пространством $\overline{\mathfrak{A}}_{\frac{1}{R}}$ и пространство $\overline{\mathfrak{A}}_R$ — с пространством $\mathfrak{A}_{\frac{1}{R}}$, сопряженный оператор к изоморфизму в данном пространстве есть изоморфизм в сопряженном пространстве и что семейства $L_i(\overline{\mathfrak{A}}_0)$, $L_i(\mathfrak{A}_R)$, $L_i(\overline{\mathfrak{A}}_R)$, $L_i(\mathfrak{A}_\infty)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ переходят соответственно в семейства $L_i(\mathfrak{A}_\infty)$, $L_i\left(\overline{\mathfrak{A}}_{\frac{1}{R}}\right)$, $L_i\left(\mathfrak{A}_{\frac{1}{R}}\right)$, $L_i(\dot{\overline{\mathfrak{A}}}_0)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Итак, предполагаем теперь, что $J = [j_{ki}]_0^\infty$, где

$$j_{ki} = \begin{cases} \alpha_i & k = \varphi(i) \\ 0 & k \neq \varphi(i), \end{cases}$$

$A = [a_{ki}]_0^\infty$, $B = [b_{ki}]_0^\infty$, причем $a_{ki} = b_{ki} = 0$ $(k \geqslant \varphi(i))$. Тогда имеют место следующие предложения.

Теорема 1′. *Пусть* $\varphi(i) = i + p$, $p \geqslant 1$. *Тогда матрицы* $J + A$ *и* $J + B$ *подобны в пространстве* $\mathfrak{A}_\infty$, *если*

$$l_1 = \sup_{j<i} \left| \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \right| < \infty \tag{6′}$$

и выполнено одно из следующих условий:

1) *матрицы* A *и* B *принадлежат классу* $L_1(\mathfrak{A}_\infty)$,

2) *матрицы* A *и* B *принадлежат классу* $L_2(\mathfrak{A}_\infty)$ и

$$l_2 = \overline{\lim_{i\to\infty}}\, i\, |\alpha_i|^{-1} < \infty; \tag{7′}$$

3) *матрицы* A *и* B *принадлежат классу* $L_3(\mathfrak{A}_\infty)$ *и*

$$l_3 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1}} < 1; \tag{8′}$$

4) *матрицы* A *и* B *принадлежат классу* $L_4(\mathfrak{A}_\infty)$ *и*

$$l_3 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1}} = 0. \tag{9′}$$

Теорема 2′. *Пусть* $\varphi(i)$ *как в теореме 1′. Тогда матрицы* $J + A$ и $J + B$ *подобны в пространстве* $\overline{\mathfrak{A}}_R(\mathfrak{A}_R)$, $0 < R < \infty$, если

$$l_4 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \max_{j<i} \left| \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \right| \leqslant 1 \tag{10′}$$

и выполнено одно из следующих условий:

1) *матрицы* A *и* B *принадлежат классу* $L_1(\overline{\mathfrak{A}}_R)$ $(L_1(\mathfrak{A}_R))$ и

$$\lim_{i\to\infty} \alpha_i = \infty; \tag{11′}$$

2) *матрицы A и B принадлежат классу* $L_2(\overline{\mathfrak{A}}_R)$ $(L_2(\mathfrak{A}_R))$ и

$$l_5 = \lim_{i\to\infty} i\,|\alpha_i|^{-1} = 0; \tag{12'}$$

3) *матрицы A и B принадлежат классу* $L_4(\overline{\mathfrak{A}}_R)$ $(L_4(\mathfrak{A}_R))$ и

$$l_3 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1}} < 1. \tag{13'}$$

Теорема 3'. *Пусть $\varphi(i)$ как в теореме 1'. Тогда матрицы $J+A$ и $J+B$ подобны в пространстве $\overline{\mathfrak{A}}_0$, если*

$$l_1 = \sup_{j<i} \left|\frac{\alpha_j}{\alpha_i}\right| < \infty \tag{14'}$$

и выполнено одно из следующих условий:

1) *матрицы A и B принадлежат классу $L_1(\overline{\mathfrak{A}}_0)$ и*

$$\lim_{i\to\infty} \alpha_i = \infty; \tag{15'}$$

2) *матрицы A и B принадлежат классу $L_2(\overline{\mathfrak{A}}_0)$ и*

$$l_5 = \lim_{i\to\infty} i\,|\alpha_i|^{-1} = 0; \tag{16'}$$

3) *матрицы A и B принадлежат классу $L_3(\overline{\mathfrak{A}}_0)$ и*

$$l_3 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1}} < 1; \tag{17'}$$

4) *матрицы A и B принадлежат классу $L_4(\overline{\mathfrak{A}}_0)$ и*

$$l_3 = \lim_{i\to\infty} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1}} = 0 \tag{18'}$$

Теорема 4'. *Пусть $\varphi(i) = pi + q$, $p > 1$, $q \geqslant 0$. Тогда матрицы $J+A$ и $J+B$ подобны в пространстве $\mathfrak{A}_\infty$, если*

$$l_6 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1} \max_{j<i} |\alpha_j|} < \infty \tag{19'}$$

и выполнено одно из условий:

1) *матрицы A и B принадлежат классу $L_3(\mathfrak{A}_\infty)$ и*

$$l_3 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1}} < \infty; \tag{20'}$$

2) *матрицы A и B принадлежат классу $L_4(\mathfrak{A}_\infty)$ и*

$$l_3 = \lim_{i\to\infty} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1}} = 0. \tag{21'}$$

Если к тому же последовательности $\{|\alpha_i|\, r^{-(p-1)\,i}\}_{(i)}$ — неубывающие при достаточно больших значениях r, то условие (19') можно заменить условием

$$l_7 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1} \cdot |\alpha_{i-1}|} < \infty. \tag{22'}$$

Теорема 5'. *Пусть* $\varphi(i)$ *как в теореме 4'. Тогда матрицы* $J+A$ и $J+$ $+B$ *подобны в пространстве* $\overline{\mathfrak{A}}_R$, $0 < R < \infty$, *если*

$$l_6 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1} \cdot \max_{j<i} |\alpha_j|} \leqslant \min(1,\ R^{p-1}) \tag{23'}$$

и выполнено одно из условий:

1) *матрицы* A *и* B *принадлежат классу* $L_3(\overline{\mathfrak{A}}_R)$ *и*

$$l_3 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1}} \leqslant R^{p-1}; \tag{24'}$$

2) *матрицы* A *и* B *принадлежат классу* $L_4(\overline{\mathfrak{A}}_R)$ *и*

$$l_3 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1}} < R^{p-1}. \tag{25'}$$

Если к тому же последовательности $\{|\alpha_i| r^{-(p-1)i}\}$ — *неубывающие при* $r > R$ *достаточно близких к* R, *то условие (23') можно заменить условием*

$$l_7 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1} \cdot |\alpha_{i-1}|} \leqslant 1. \tag{26'}$$

Теорема 6'. *Пусть* $\varphi(i)$ *как в теореме 4'. Тогда матрицы* $J+A$ *и* $J+$ $+B$ *подобны в пространстве* $\mathfrak{A}_R$, $0 < R < \infty$, *если*

$$l_6 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1} \max_{j<i} |\alpha_j|} \begin{cases} \leqslant 1 & \text{при } R \geqslant 1 \\ < R^{p-1} & \text{при } R < 1, \end{cases} \tag{27'}$$

матрицы A *и* B *принадлежат классу* $\mathrm{L}(\mathfrak{A}_R)$ *и выполнено условие (25'). Если к тому же последовательности* $\{|\alpha_i| r^{-(p-1)i}\}_{(i)}$ — *неубывающие при* $r < R$, *достаточно близких к* R, *то условие (27') можно заменить условием*

$$l_7 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1} \cdot |\alpha_{i-1}|} \leqslant 1. \tag{28'}$$

Теорема 7'. *Пусть* $\varphi(i)$ *как в теореме 4'. Тогда матрицы* $J+A$ *и* $J+$ $+B$ *подобны в пространстве* $\overline{\mathfrak{A}}_0$, *если*

$$l_6 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1} \cdot \max_{j<i} |\alpha_j|} = 0, \tag{29'}$$

матрицы A *и* B *принадлежат классу* $\mathrm{L}(\overline{\mathfrak{A}}_0)$ *и выполнено условие*

$$l_3 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1}} = 0. \tag{30'}$$

Если к тому же последовательности $\{|\alpha_i| r^{-(p-1)i}\}_{(i)}$ — *неубывающие при* r *достаточно малых, то условие (29') можно заменить условием*

$$l_7 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1} \cdot |\alpha_{i-1}|} < \infty. \tag{31'}$$

Теорема 8'. *Пусть* $\varphi(i) = pi^n + u(i)$, $n > 1$. *Тогда матрицы* $J+A$ *и* $J+B$ *подобны в пространстве* $\mathfrak{A}_\infty$, *если*

$$l_8 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[in]{|\alpha_i|^{-1} \cdot \max_{j<i} |\alpha_j|} < \infty, \tag{32'}$$

матрицы A и B принадлежат классу $L(\overline{\mathfrak{A}}_\infty)$ и

$$l_9 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i^n]{|\alpha_i|^{-1}} < \infty. \tag{33'}$$

Если к тому же последовательности $\{|\alpha_i| r^{-pi^n}\}_{(i)}$ — неубывающие при достаточно больших значениях r, то условие (32′) можно заменить условием

$$l_{10} = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i^n]{|\alpha_{i-1}| \cdot |\alpha_i|^{-1}} < \infty. \tag{34'}$$

Теорема 9′. *Пусть $\varphi(i)$ как в теореме 8′. Тогда матрицы $J+A$ и $J+$ $+B$ подобны в пространстве $\overline{\mathfrak{A}}_R$ $(\mathfrak{A}_R)$, $0<R<\infty$, если*

$$l_8 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i^n]{|\alpha_i|^{-1} \max_{j<i} |\alpha_j|} \leqslant \min(1,\ R^{-p}), \tag{35'}$$

матрицы A и B принадлежат классу $L(\overline{\mathfrak{A}}_R)$ $(L(\mathfrak{A}_R))$ и

$$l_9 = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i^n]{|\alpha_i|^{-1}} \leqslant R^{-p}\ (l_9 < R^{-p}). \tag{36'}$$

Если к тому же последовательности $\{|\alpha_i| r^{-pi^n}\}_{(i)}$ — неубывающие при $r>R$ $(r<R)$ достаточно близких к R, то условие (35′) можно заменить условием

$$l_{10} = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i^n]{|\alpha_{i-1}| |\alpha_i|^{-1}} \leqslant 1. \tag{37'}$$

Теорема 10′. *Пусть $\varphi(i)$ как в теореме 8′. Тогда матрицы $J+A$ и $J+$ $+B$ подобны в пространстве $\overline{\mathfrak{A}}_0$, если*

$$\lim_{i\to\infty} \sqrt[i^n]{|\alpha_i|^{-1} \cdot \max_{j<i} |\alpha_j|} = 0, \tag{38'}$$

матрицы A и B принадлежат классу $L(\overline{\mathfrak{A}}_0)$ и

$$\lim_{i\to\infty} \sqrt[i^n]{|\alpha_i|^{-1}} = 0. \tag{39'}$$

Если к тому же последовательности $\{|\alpha_i| r^{-pi^n}\}_{(i)}$ — неубывающие при достаточно малых значениях r, то условие (37′) можно заменить условием

$$l_{10} = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i^n]{|\alpha_{i-1}| |\alpha_i|^{-1}} < \infty. \tag{40'}$$

Замечание. Положив $B=0$ во всех рассматриваемых случаях, заключаем о подобии матрицы $J+A$ матрице J, имеющей в каждой строке (каждом столбце) только один элемент отличный от нуля.

Приведем несколько примеров, указывающих на существенность некоторых формулируемых в теоремах условий. В примерах 1—10 предположим везде $\varphi(i) = i+1$.

Пример 1. Положим $\alpha_i = 1$ $(i=0, 1, \ldots)$, $a_{ik} = (i+1)\,\delta_{ik}$. Тогда последовательность $\{\alpha_i\}$ удовлетворяет условию (6) и $A \in L_3(\overline{\mathfrak{A}}_0) \setminus L_2(\overline{\mathfrak{A}})_0$. Оператор J имеет нетривиальный нуль, $J1=0$, в то время как $J+A$ такого в пространстве $\overline{\mathfrak{A}}_0$ не имеет. Следовательно, $J+A$ не подобно J в $\overline{\mathfrak{A}}_0$. Пример показывает, что в п. 1 теоремы 1 нельзя заменить $L_1(\overline{\mathfrak{A}}_0)$ на $L_3(\overline{\mathfrak{A}}_0)$ и что утверждение п. 3 теоремы 1 неверно, если $l_3 = 1$.

Пример 2. Положим $\alpha_i = i + 1$ $(i = 0, 1, \ldots)$, $a_{ik} = (i+1)^2 \delta_{ik}$. Последовательность $\{\alpha_i\}$ удовлетворяет условиям (7), (14) и $A \in [L_3(\overline{\mathfrak{A}}_0) \setminus L_2(\overline{\mathfrak{A}}_0)] \cap \cap [L_3(\mathfrak{A}_\infty) \setminus L_2(\mathfrak{A}_\infty)]$. По тем же причинам, что и в примере 1 матрица $J + A$ не подобна матрице J в пространствах $\overline{\mathfrak{A}}_0$ и $\mathfrak{A}_\infty$. Пример показывает, что в п. 2 теоремы 1 нельзя заменить $L_2(\overline{\mathfrak{A}}_0)$ на $L_3(\overline{\mathfrak{A}}_0)$, а в п. 1 теоремы 3 — $L_2(\mathfrak{A}_\infty)$ на $L_3(\mathfrak{A}_\infty)$.

Пример 3. Пусть $R > 1$, $\alpha_i = (i+1)^2$ $(i = 0, 1, \ldots)$, $a_{ik} = -(i+1)^2 \delta_{ik}$. Последовательность $\{\alpha_i\}$ удовлетворяет условиям (10), (14) и $A \in L_3(\mathfrak{A}) \setminus L_2(\mathfrak{A})$, где $\mathfrak{A}$ одно из пространств $\mathfrak{A}_R$, $\overline{\mathfrak{A}}_R$ или $\mathfrak{A}_\infty$. Матрица $J + A$ не подобна матрице J в пространстве $\mathfrak{A}$ по тем же причинам, что и в примере 1. Пример показывает, что в п. 2 теорем 2 и 3 нельзя заменить L_2 на L_3 и утверждение п. 3 теоремы 2 неверно при $l_3 = 1$, даже если A и B принадлежат классу $L_3(\mathfrak{A}_R)$.

Пример 4. Пусть $R = \infty$, $\alpha_i = \eta^i$ $(i = 0, 1, \ldots; \eta > 1)$ $a_{ik} = -\eta^i \delta_{ik}$. Последовательность $\{\alpha_i\}$ удовлетворяет условию (14) и $A \in L_4(\mathfrak{A}_\infty) \setminus L_3(\mathfrak{A}_\infty)$. По тем же причинам, что и в примере 1, матрица $J + A$ не подобна матрице J в пространстве $\mathfrak{A}_\infty$. Пример показывает, что в п. 3 теоремы 3 нельзя заменить $L_3(\mathfrak{A}_\infty)$ на $L_4(\mathfrak{A}_\infty)$.

Пример 5. Пусть $R > 1$, $\alpha_i = \alpha > 0$, $a_{ik} = \alpha\delta_{ik}$ $(i \geqslant 1)$, $a_{ok} = 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Последовательность $\{\alpha_i\}$ удовлетворяет условиям (10) и (14) и $A \in L_2(\mathfrak{A}_\infty) \cap L_2(\mathfrak{A}_R)$. Область значений R_J матрицы J совпадает со всем пространством, в то время как R_{J+A} состоит из всех функций $f(z)$, для которых $f(-1) = 0$ так, что матрица $J + A$ не подобна матрице J. Пример показывает, что утверждение п. 1 теорем 2 и 3 при $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}} |\alpha_i| < \infty$ неверно для семейства L_2, и что утверждения п. 2 теорем 2 и 3 при $l_3 = \infty$ неверно.

Пример 6. Положим $\alpha_i = (i+1)^2$ и $a_{ik} = i^2 \delta_{ik}$ $(i, k = 0, 1, \ldots)$. Последовательность $\{\alpha_i\}$ удовлетворяет условию (14) и $A \in L_3(\mathfrak{A}_\infty)$. По той же причине, что и в примере 5, матрица $J + A$ не подобна матрице J. Пример показывает, что утверждение п. 3 теоремы 3 при $l_3 = 1$ неверно.

Пример 7. Положим $\alpha_i = \eta^{i+1}$, $\eta > 1$, $a_{ik} = -(i+1)\eta^{i+1}\delta_{ik}$. Последовательность $\{\alpha_i\}$ удовлетворяет условиям (6), (14) и $A \in L_4(\overline{\mathfrak{A}}_0) \cap L_4(\mathfrak{A}_\infty)$. Матрица $J + A$ не имеет нулей в постранстве $\overline{\mathfrak{A}}_0$, следовательно, $J + A$ не подобна матрице J в пространствах $\overline{\mathfrak{A}}_0$ и $\mathfrak{A}_\infty$. Пример показывает, что утверждение п. 4 теорем 1 и 3 при $l_3 > 0$ неверно.

Пример 8. Положим $\alpha_i = (i+1)^{-i-1}$, $a_{ik} = -(i+1)^{-i}\delta_{ik}$. Тогда $A \in L_1(\overline{\mathfrak{A}}_0)$. Матрица $J + A$ не имеет нулей в пространстве $\overline{\mathfrak{A}}_0$ и потому не подобна матрице J. Пример показывает, что утверждение п. 1 теоремы 1 при $l_1 = \infty$ неверно.

Пример 9. Положим $\alpha_i = \alpha > 0$, $R > \alpha$, $a_{ik} = \delta_{ik}\delta_{i1}$. Последовательность $\{\alpha_i\}$ удовлетворяет условиям (10), (14) и $A \in L_1(\mathfrak{A}_R) \cap L_1(\overline{\mathfrak{A}}_R) \cap L_1(\mathfrak{A}_\infty)$. Матрица $J + A$ имеет ненулевой неподвижный элемент, а именно, $(J+A)\,1 = 1$, в то время как матрица J в пространствах $\mathfrak{A}_R$, $\overline{\mathfrak{A}}_R$, $\mathfrak{A}_\infty$ такого не имеет, следовательно, матрица $J + A$ не подобна матрице J в рассматриваемых пространствах. Пример показывает, что утверждение п. 1 в теоремах 2 и 3 при $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}} \alpha_i | < \infty$ неверно.

Пример 10. Пусть $\alpha_n \to 0$ и $a_{ik} = \delta_{ik}\delta_{i1}$. Матрица $A \in L_1(\overline{\mathfrak{A}}_0) \cap L_1(\mathfrak{A}_R) \cap \cap L_1(\mathfrak{A}_\infty)$. Тогда матрица $J + A$ имеет в пространстве $\overline{\mathfrak{A}}_0$ нетривиальный неподвижный элемент, в то время как матрица J в этом пространстве такого не имеет. Поэтому эти матрицы не подобны в пространствах $\overline{\mathfrak{A}}_0$, $\mathfrak{A}_R$, $\overline{\mathfrak{A}}_R$ и $\mathfrak{A}_\infty$. Пример показывает, что утверждения п. 1 теорем 1, 2 и 3 при $l_1 = l_4 = \infty$ неверны.

Пример 11. Пусть $\varphi(i) = 2(i+1)$, $\alpha_i = 1$ $(i = 0, 1, \ldots)$ и $a_{ik} = \delta_{ik}\delta_{i0}$. Пусть $f(z) = \sum_i a_i z^i$ есть неподвижный элемент матрицы J в пространстве $\mathfrak{A}$, $J \sum_i a_i z^i = \sum_i a_{\varphi(i)} z^i = \sum_i a_i z^i$, откуда

$$a_{\varphi(i)} = a_i \; (i = 0, 1, \ldots). \tag{93}$$

Пусть a_k, $k \geqslant 0$, первый коэффициент $f(z)$ отличен от нуля. Тогда из (93) следует $a_{\varphi(k)} = a_k$, $a_{\varphi(\varphi(k))} = a_{\varphi^{(2)}(k)} = a_k, \ldots, a_{\varphi^{(n)}(k)} = a_k$, т. е. проекция $f(z)$ на подпространство, порожденное $\left\{z^{\varphi^{(n)}(k)}\right\}_{n=0}^{\infty}$, есть элемент $\bar{f} = a_k \sum_{n=0}^{\infty} z^{\varphi^{(n)}(k)}$, который должен принадлежать пространству. Однако $\bar{f}$ не принадлежит $\mathfrak{A}_R$ при $R > 1$ и $\bar{\mathfrak{A}}_R$ при $R \geqslant 1$. Но матрица $J + A$ имеет неподвижный элемент в любом пространстве $\mathfrak{A}$. Таким образом, матрицы J и $J + A$ не подобны в $\mathfrak{A}_R$ при $R > 1$ и в $\bar{\mathfrak{A}}_R$ при $R \geqslant 1$, хотя $A \in L_1(\mathfrak{A})$. Так как в этом случае $l_6 = 1$ и $l_3 = 1$, то пример показывает, что в правых частях (23) и (25) нельзя заменить $\min(1, R^{1-p})$ и R^{1-p} на 1, а при $R = 1$ в теореме 6 условие (25) нельзя заменить условием $l_3 \leqslant R^{1-p}$.

Пример 12. Пусть $\varphi(i) = i^2 + 1$, $\alpha_i = 1$ $(i = 0, 1, \ldots)$, $a_{ik} = \delta_{ik}\delta_{i0}$. В этом случае, как в предыдущем примере, у матрицы J нет нетривиального неподвижного элемента в $\mathfrak{A}_R$ при $R > 1$ и в $\bar{\mathfrak{A}}_R$ при $R \geqslant 1$. Имеем $l_8 = l_9 = 1$. Пример показывает, что в правых частях формул (35), (36) нельзя заменить $\min(1, R^{-p})$, R^{-p} на 1.

Замечание. В рассматриваемых нами случаях матрицы A и B всегда непрерывны, в то время как матрица J и поэтому и матрицы $J+A$ и $J+B$ не всегда удовлетворяют условию непрерывности в соответствующем пространстве $\mathfrak{A}$. Поэтому, переходя к операторному истолкованию матриц в аналитическом пространстве и желая связать подобие матриц с линейной эквивалентностью операторов, необходимо сделать некоторые уточнения.

Пусть $C = [c_{ik}]$ — некоторая матрица и $\mathfrak{A}$ — одно из рассматриваемых пространств. Сопоставим матрице C линейный оператор C в $\mathfrak{A}$, определенный на линейном подпространстве $Д(C)$, состоящем из всех $f = f(z) = \sum_k f_k z^k \in \mathfrak{A}$, для которых сходятся ряды $\sum_j c_{kj} f_j = g_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ и для которых $g = \sum_k g_k z^k \in \mathfrak{A}$; положим

$$Cf = C \sum_k f_k z^k = \sum_k g_k z^k = g \quad (f \in Д(C)). \tag{94}$$

Согласно этому определению, $Д(J)$ состоит из тех и только тех элементов $f = \sum_k f_k z^k \in \mathfrak{A}$, для которых

$$\sum_k f_{\varphi(k)} z^k \in \mathfrak{A}. \tag{95}$$

Так как A и B непрерывные матрицы и $Д(A) = Д(B) = \mathfrak{A}$, то

$$Д(J + A) = Д(J + B) = Д(J). \tag{96}$$

Пусть теперь линейные операторы C и D соответствуют матрицам $C = [c_{ik}]$, $D = [d_{ik}]$.

Определение. *Операторы C и D линейно эквивалентны в пространстве $\mathfrak{A}$, если существует изоморфизм T пространства $\mathfrak{A}$ такой, что*

$$TД(C) = Д(D) \tag{97}$$

и

$$ДTf = TCf \quad (f \in Д(C)). \tag{98}$$

Покажем, что в случаях, рассматриваемых в теоремах 1—10, из подобия матриц $J+A$ и $J+B$ следует линейная эквивалентность соответствующих линейных операторов.

Нами было установлено матричное равенство (4), где T — изоморфизм пространства $\mathfrak{A}$. Необходимо сначала установить, что $TД(J)=Д(J)$, где T — оператор, соответствующий матрице $[t_{ik}]$. Из (4) следует матричное равенство $TJ+C=JT$, где $C=TA-BT=[c_{ik}]$ — непрерывная матрица в $\mathfrak{A}$. Отсюда, приравнивая соответствующие элементы, имеем

$$\alpha_k t_{\varphi(k),\, j} = \begin{cases} t_{k,\nu}\alpha_\nu + c_{k,\varphi(\nu)} & j \in R_\varphi,\ j=\varphi(\nu) \\ c_{kj} & j \notin R_\varphi\ (j \leqslant \varphi(k)), \end{cases}$$

при $j>\varphi(k)$ обе части равны нулю.

Пусть теперь $f=\sum\limits_k f_k z^k \in Д(J)$, т. е. $\sum\limits_k f_{\varphi(k)}\alpha_k z \in \mathfrak{A}$, и $Tf=g=$ $=\sum\limits_k g_k z^k$. Имеем $g_{\varphi(k)}=\sum\limits_{j\leqslant\varphi(k)} t_{\varphi(k),\, j} f_j$ и $\sum\limits_k g_{\varphi(k)}\alpha_k z^k=\sum\limits_k \Big(\sum\limits_{j\leqslant\varphi(k)} \alpha_k t_{\varphi(k),\, j} f_j\Big) z^k=$ $=\sum\limits_k \Big(\sum\limits_{\nu=k} t_{k\nu}\alpha_\nu f_{\varphi(\nu)}\Big) z^k+\sum\limits_k \Big(\sum\limits_{j\leqslant\varphi(\nu)} c_{kj} f_j\Big) z^k \in \mathfrak{A}$, так как T и C — непрерывные матрицы и $\sum\limits_\nu f_{\varphi(\nu)}\alpha_\nu z^\nu \in \mathfrak{A}$. Таким образом установлено, что $TД(J)=Д(J)$. Аналогично, исходя из матричного равенства $T^{-1}(J+B)=(J+A)T^{-1}$, заключаем $T^{-1}Д(J)\subset Д(J)$. Так как T есть изоморфизм, то отсюда следует $TД(J)=Д(J)$. Легко убедиться, что матричное равенство (4) влечет за собой соответствующее операторное равенство.

Рассмотрим приложения изложенных выше результатов к линейным дифференциальным уравнениям бесконечного порядка в аналитическом пространстве. М. Г. Хапланов [7, 8] указал на связь между ними и бесконечными матрицами в аналитическом пространстве. Этим методом М. Г. Хапланов изучил некоторые классы линейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка с полиноминальными коэффициентами в аналитических пространствах в круге и в изоморфных к ним пространствах.

Пусть Δ — дифференциальный оператор бесконечного порядка

$$\Delta=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k(z)}{k!}D^k, \tag{99}$$

где $a_k(z)=\sum\limits_i a_{ik}z^i \in \mathfrak{A}$, $D=\dfrac{d}{dz}$. Оператору Δ соответствует матрица $[a_{ik}]$.

Так как Δ определен на базисе $\{z^n\}$, $\Delta z^n \in \mathfrak{A}\ (n=0,\ 1,\ \ldots)$ и тем самым на всех многочленах, то оператору Δ можно сопоставить кроме того матрицу $[\tilde{a}_{ik}]$, определяемую из соотношений

$$\Delta z^j=\sum_{i=0}^{\infty}\tilde{a}_{ij}z^i. \tag{100}$$

Из

$$\Delta z^j=\sum_{k\leqslant j}a_k(z)\frac{1}{k!}(z^j)^{(k)}=\sum_{0\leqslant k\leqslant j}a_k(z)\frac{j!}{k!\,(j-k)!}z^{j-k}=$$

$$=\sum_{0\leqslant k\leqslant j}\ \sum_{\nu\geqslant 0}a_{\nu k}\frac{j!}{k!\,(j-k)!}z^{j-k+\nu}=\sum_{i=0}^{\infty}\Bigg(\sum_{0,\ j-i\leqslant k\leqslant j}\frac{j!}{k!\,(j-k)!}a_{k+i-j,\,k}\Bigg)z^i$$

следует

$$\tilde{a}_{ij} = \sum_{0 \leqslant k \leqslant i,\, j} \frac{j!}{(j-k)!\,k!} a_{i-k,\, j-k} \; (i, \; j \geqslant 0). \tag{101}$$

Решая уравнение (101) относительно a_{ij}, получаем

$$a_{ij} = \sum_{0 \leqslant k \leqslant i,\, j} (-1)^k \frac{j!}{k!\,(j-k)!} \tilde{a}_{i-k,\, j-k} \;\; (i, \; j \geqslant 0). \tag{102}$$

Как видно из (101) и (102), $\tilde{a}_{ij}(a_{ij})$ выражается через $(i, \; j)$-й элемент матрицы $[a_{ij}]$ $([\tilde{a}_{ij}])$ и через элементы, лежащие на прямой, проходящей через данный элемент параллельно диагонали, и находящиеся выше. При таких преобразованиях сохраняется структура матриц, рассмотренных выше. Мы будем рассматривать такие операторы Δ, для которых матрицы $[\tilde{a}_{ij}]$ имеют вид $J + A$, изученный выше. В этом случае оператор допускает замыкание, и поэтому естественно определить его область определения $Д(\Delta)$ в $\mathfrak{A}$ следующим образом: функция $f(z) \in \mathfrak{A}$ принадлежит $Д(\Delta)$, если существует последовательность многочленов $\{p_n(z)\}$ такая, что $p_n(z) \to f(z)$ и $\Delta p_n(z) \to g(z) \in \mathfrak{A}$ по топологии $\mathfrak{A}$. Для $f(z) \in Д(\Delta)$ положим $\Delta f(z) = g(z)$. В силу (100), (101) матрица $[\tilde{a}_{ik}]$ принимает на полиномах такие же значения, что и оператор Δ. Поэтому достаточно убедиться, что оператор, определенный матрицей $[\tilde{a}_{ik}]$, допускает замыкания. Пусть $[\tilde{a}_{ik}] = \tilde{J} + \tilde{A}$, $p_n(z) \to 0$ и $(\tilde{J} + \tilde{A})\, p_n(z) \to g(z)$. Но $\tilde{A}$ есть непрерывная матрица и тем самым $\tilde{A} p_n(z) \to 0$ и следовательно, $\tilde{J} p_n(z) = \tilde{J} \sum\limits_{k=0}^{q_n} p_k^{(n)} z^k = \sum\limits_{\varphi(i) \leqslant q_n} p_{\varphi(i)}^{(n)} \alpha_i z^i \to \sum\limits_i g_i z^i = g(z)$. Так как коэффициенты при степенях z^i являются непрерывными линейными функционалами [1] в $\mathfrak{A}$, заключаем, что $p_{\varphi(i)}^{(n)} \to 0$ и $p_{\varphi(i)}^{n} \alpha_i \to g_i$, т. е. $g_i = 0$ $(i = 0, 1, \ldots)$ при $\alpha_i \neq 0$ $(i = 0, \; 1, \; \ldots)$.

В рассматриваемом случае область $Д(\Delta)$ совпадает с естественной областью определения $Д(\tilde{J} + \tilde{A})$ матрицы $\tilde{J} + \tilde{A}$. Действительно, пусть $f(z) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} f_i z^i$ элемент из области определения матрицы $\tilde{J} + \tilde{A}$, т. е. $\sum\limits_i f_{\varphi(i)} \alpha_i z^i = g \in \mathfrak{A}$. Положив $p_n(z) = \sum\limits_{i=0}^{n} f_i z^i$, имеем $p_n(z) \to f(z)$ и $(\tilde{J} + \tilde{A}) \times p_n(z) = \sum\limits_{\substack{i \\ \varphi(i) \leqslant n}} f_{\varphi(i)} \alpha_i z^i + \sum\limits_{i=0}^{\infty} \Big(\sum\limits_{\substack{k < \varphi(i) \\ k \leqslant n}} \tilde{a}_{ik} f_k \Big) z^i \to \sum\limits_{i=0}^{\infty} f_{\varphi(i)} \alpha_i z^i + \sum\limits_{i=0}^{\infty} \Big(\sum\limits_{k < \varphi(i)} a_{ik} f_i \Big) \times z^i \in \mathfrak{A}$ в силу непрерывности матрицы $\tilde{A}$. Итак, $f(z) \in Д(\Delta)$. Пусть обратно $f(z) \in Д(\Delta)$, т. е. существует последовательность многочленов $p_n(z)$, $p_n(z) \to f(z)$, и $(\tilde{J} + \tilde{A})\, p_n(z) \to g(z) \in \mathfrak{A}$, или, что то же, $J p_n(z) \to g(z) - \tilde{A} f(z) = h(z) = \sum\limits_i h_i z^i \in \mathfrak{A}$. Положив $p_n(z) = \sum\limits_{i=0}^{q_n} p_i^{(n)} z^i$, имеем $p_i^{(n)} \to f_i \; (i = 0, \; 1, \ldots)$ и $\sum\limits_{\varphi(i) \leqslant q_n} p_{\varphi(i)}^{(n)} \alpha_i z^i \to \sum\limits_i h_i z^i$, откуда $p_{\varphi(i)}^{(n)} \alpha_i \to h_i \, (n \to \infty)$ или $p_{\varphi(i)}^{(n)} \to h_i / \alpha_i$. Таким образом заключаем, что $f_{\varphi(i)} = \dfrac{h_i}{\alpha_i}$, и поэтому $\sum\limits_i f_{\varphi(i)} \alpha_i z^i = \sum\limits_i h_i z^i \in \mathfrak{A}$, $f(z)$ принадлежит области определения матрицы $\tilde{J} + \tilde{A}$.

Замечание. Из изложенного выше следует, что в определении $Д(\Delta)$ вместо многочленов $p_n(z)$ можно брать частичные суммы $\sum_1^n f_i z^i$ степенного ряда элемента $f(z)$.

Как относятся преобразования (101) и (102) к классу непрерывных матриц в аналитических пространствах? В пространствах $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_\infty$ матрица $[\tilde{a}_{ik}]$ непрерывна тогда и только тогда, когда матрица $[a_{ik}]$ непрерывна. Действительно, пусть матрица $[\tilde{a}_{ik}]$ непрерывна в пространстве $\mathfrak{A}_0$. Фиксируем произвольно значение $r > 0$ и выберем r так, чтобы $\frac{\tilde{r}}{r} < {}^1/_2$. Находим ему соответствующие значения $\tilde{\rho}$, $\tilde{\rho} < \tilde{r}$ и $\tilde{C}$ так, чтобы

$$|a_{ik}| \leqslant \tilde{C}\frac{\tilde{r}^k}{\tilde{\rho}^i}\ (i,\ k = 0,\ 1,\ \ldots). \tag{103}$$

Выберем теперь $\rho < \tilde{\rho}$ и $C \geqslant \tilde{C}\left(\frac{\tilde{r}}{r}\right)^j \cdot 2^j\,(j = 0,\ 1,\ \ldots)$. Тогда согласно (102)

$$|a_{ij}| \leqslant \sum_{0 \leqslant k \leqslant i,\ j} \frac{j!}{k!\,(j-k)!}|\tilde{a}_{i-k,\ j-k}| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{0 \leqslant k \leqslant i,\ j} \frac{j!}{k!\,(j-k)!}\tilde{C}\frac{\tilde{r}^{j-k}}{\tilde{\rho}^{i-k}} \leqslant \frac{\tilde{C}}{\tilde{\rho}^i}\sum_{0 \leqslant k \leqslant j} \frac{j!}{k!\,(j-k)!}\tilde{\rho}^k\tilde{r}^{j-k} =$$

$$= \frac{\tilde{C}}{\tilde{\rho}^i}(\tilde{\rho} + \tilde{r})^j = \tilde{C}\frac{\tilde{r}^j}{\tilde{\rho}^i}\left(1 + \frac{\tilde{\rho}}{r}\right)^j \leqslant \tilde{C}2^j\left(\frac{\tilde{r}}{r}\right)^j\left(\frac{\rho}{\tilde{\rho}}\right)^i\frac{r^j}{\rho^i} \leqslant C\frac{r^j}{\rho^i}\ (i,\ j = 0,\ 1,\ \ldots).$$

Обратно, в силу симметричности формул (101), (102) (с точностью до знака слагаемых) заключаем таким же образом, что из непрерывности матрицы $[a_{ik}]$ следует непрерывность матрицы $[\tilde{a}_{ik}]$.

Пусть теперь матрица $[\tilde{a}_{ik}]$ — непрерывная в пространстве $\mathfrak{A}_\infty$ и пусть $\rho > 0$ — произвольное. Фиксируем ρ, $\tilde{\rho} > \rho$, и находим ему соответствующее значение $\tilde{r} > \tilde{\rho}$ и $\tilde{C} > 0$ так, что имеет место оценка (103). Выберем теперь r так, чтобы $\frac{\tilde{r}}{r} < \frac{1}{2}$ и $C \geqslant \tilde{C}\left(\frac{\tilde{r}}{r}\right)^j \cdot 2^j\,(j = 0,\ 1,\ \ldots)$. Тогда опять из (102) следует, как и выше, непрерывность матрицы $[a_{ik}]$ в пространстве $\mathfrak{A}_\infty$ и аналогично обратное утверждение.

Замечание. Утверждение теоремы вообще неверно для пространств $\mathfrak{A}_R$ при $0 < R < \infty$. Действительно, пусть $a_{ij} = \frac{(\Theta R)^j}{R^i}$, где $0 < \Theta < 1$. Взяв для произвольного $\rho < R$ значение r, $\Theta R < r < R$, и $C = 1$, мы убеждаемся, что $[a_{ik}] \in L(\mathfrak{A}_R)$. Имеем согласно (101) при $i > j : \tilde{a}_{ij} = \sum_{0 \leqslant k \leqslant j} \frac{j!}{k!\,(j-k)!}\frac{(\Theta R)^{j-k}}{R^{i-k}} = \frac{1}{R^i}[(1 + \Theta)R]^j$. Выберем ρ, $\rho < R$, настолько близко от R, чтобы $\frac{\rho}{r}(1 + \Theta) > 1$ при всех r, $\rho < r < R$. Если при выбранном ρ и при некотором r, $r < R$ и $C > 0$ имели бы место неравенства $|\tilde{a}_{ij}| = \frac{[(1+\Theta)R]^j}{R^i} \leq C\frac{r^j}{\rho^i}$ при $i > j$, то $\left(\frac{\rho}{R}\right)^i\left[\frac{(1+\Theta)R}{r}\right]^j \leqslant C\ (j < i)$ (можно предположить, что $\rho < r < R$), в частности, при $j = i - 1$ следовало бы $\left(\frac{\rho}{R}\right)^i\left[\frac{(1+\Theta)R}{r}\right]^i = C' < \infty$, $(i = 0,\ 1,\ \ldots)$, что неверно, ибо $[\rho(1 + \Theta)r^{-1}]^i$ $(i \to \infty)$. Аналогично показывается, что из непрерывности в $\mathfrak{A}_R$ матрицы $[\tilde{a}_{ik}]$ вообще не следует непрерывность матрицы $[a_{ik}]$. Для этого достаточно выбрать $\tilde{a}_{ij} = (-1)^j \frac{(\Theta R)^j}{R^i}$, $0 < \Theta < 1$.

Преобразования (101), (102) не сохраняют классы $L_i(\mathfrak{A})$ даже в пространстве $\overline{\mathfrak{A}}_0$. Так, например, матрица $[a_{ij}]$, $a_{ij} = \delta_{ij}\Theta^i$, где $0 < \Theta < 1$, принадлежит классу $L_1(\overline{\mathfrak{A}}_0)$, в то время как $[\tilde{a}_{ij}]$ имеет вид $\tilde{a}_{ij} = (1+\Theta)^i$ и классу $L_1(\overline{\mathfrak{A}}_0)$ не принадлежит. Если $a_{ij} = \delta_{ij}$, то $a_{ij} \in L_2(\overline{\mathfrak{A}}_0)$, а соответствующая матрица $[\tilde{a}_{ik}]$ имеет вид $\tilde{a}_{ij} = 2^j\delta_{ij}$ и не принадлежит $L_3(\overline{\mathfrak{A}}_0)$, так что классы $L_2(\overline{\mathfrak{A}}_0)$ и $L_3(\overline{\mathfrak{A}}_0)$ при этом преобразовании не сохраняются.

Предположим, что дифференциальный оператор

$$\Delta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(z)}{k!} D^k, \quad a_k(z) = \sum_i a_{ik} z^i$$

имеет следующую структуру: $a_{ik} = 0\,(k > \varphi(i))$, $a_{i,\varphi(i)} = \alpha_i$ $(i = 0, 1, \ldots)$, т. е. матрица $[a_{ik}]$ представляется в виде $J + A$, рассмотренном в начале. Таким образом, мы предполагаем, что в разложении $a_k(z)$ в степенном ряде первый коэффициент, отличный от нуля, есть a_{ik}, если $k = \varphi(i)$, и a_{jk}, $j \geqslant \varphi(i)$, если $\varphi(i-1) < k < \varphi(i)$. Согласно (101) для матрицы $\widetilde{J+A} = [\tilde{a}_{ij}]$ соответствующей оператору Δ в степенном базисе, имеем $\alpha_{ij} = 0$ $(j > \varphi(i))$. Положим $\tilde{a}_{i,\varphi(i)} = \tilde{\alpha}_i$. Предположим, что все $\tilde{\alpha}_i \neq 0$. Тогда матрица $[\tilde{a}_{ik}]$ имеет структуру $\widetilde{J+A} = J^* + A^*$, где тильда обозначает преобразование (101). Если матрица $[\tilde{a}_{ik}] = J^* + A^*$ удовлетворяет одному из условий теорем 1—10, то при помощи изоморфизма T преобразуем матрицу $J^* + A^*$ в матрицу J^*, которой на основе преобразования (102) соответствует дифференциальный оператор Δ^*, подобный исходному Δ. Оператор Δ^* в силу его соответствия с матрицей J^* является более простым, чем исходный.

Если $\varphi(i) = i + p$, $p \geqslant 1$, то $J^* = \tilde{J}$ и $A^* = \tilde{A}$, а оператору $\tilde{J}$ соответствует $\tilde{\Delta}$,

$$\tilde{\Delta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{a}_k(z)}{k!} D^k = \sum_{k \geqslant p} \frac{\tilde{\alpha}_{k-p}}{k!} z^{k-p} D^k = \frac{1}{z^p} \sum_{k \geqslant p} \tilde{\alpha}_{k-p} z^k \frac{D^k}{k!},$$

т. е. оператора типа, встречающегося в уравнении Эйлера. Если $\varphi(i) = pi + q$, $p > 1$, или $\varphi(i) = pi^n + u(i)$, то $J^* = J$ и $A^* = \widetilde{J+A} - J$.

Рассмотрим матрицу типа J в пространстве $\mathfrak{A}$ и соответствующее ему уравнение

$$Jf = g. \tag{104}$$

Учитывая, что $Jf = J\sum_i f_i z^i = \sum_i f_{\varphi(i)}\alpha_i z^i = \sum_i g_i z^i = g$, заключаем, что уравнение (104) разрешимо тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\sum_i \frac{g_i}{\alpha_i} z^{\varphi(i)} \in \mathfrak{A}. \tag{105}$$

Из (105) следует, что для того чтобы уравнение (104) было разрешимо для всех $g \in \mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы из $\sum_i g_i z^i \in \mathfrak{A}$ всегда следовало $\sum_i \frac{g_i}{\alpha_i} z^{\varphi(i)} \in \mathfrak{A}$.

1) Случай $\varphi(i) = i + p,\ p \geqslant 1$.

Из $\sum_i g_i z^i \in \mathfrak{A}$ должно следовать $z^p \sum_i \frac{g_i}{\alpha_i} z^i \in \mathfrak{A}$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы диагональная матрица $[\delta_{ik}\alpha_i^{-1}]$ была непрерывной в пространстве $\mathfrak{A}$, т. е. при $\overline{\mathfrak{A}}_0 = \mathfrak{A}_0$ или $\mathfrak{A}_\infty$ должно выполняться условие

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1}} < \infty, \tag{106}$$

а при $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_R$ или $\overline{\mathfrak{A}}_R$ $(0 < R < \infty)$ — условие

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1}} \leqslant 1. \tag{107}$$

2) Случай $\varphi(i) = pi + q,\ p > 1$.

Из $\sum_i g_i z^i \in \mathfrak{A}$ должно следовать, $z^q \sum_i \frac{g_i}{\alpha_i} z^{pi} \in \mathfrak{A}$, что в пространствах $\overline{\mathfrak{A}}_0$ и $\mathfrak{A}_\infty$ равносильно условию $\sum_i \frac{g_i}{\alpha_i} z^i \in \mathfrak{A}$, т. е. условие (106). Пусть теперь $\mathfrak{A}$ равен $\overline{\mathfrak{A}}_R$ или $\mathfrak{A}_R$, $0 < R < \infty$. Условие $\sum_i \frac{g_i}{\alpha_i} z^{pi} \in \mathfrak{A}_R\,(\overline{\mathfrak{A}}_R)$ равносильно условию $\sum_i \frac{g_i}{\alpha_i} \left(\sqrt[p]{R^{p-1}}\right)^i z^i \in \mathfrak{A}_R\,(\overline{\mathfrak{A}}_R)$. Следуя (107), получаем условие

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|\alpha_i|^{-1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[p]{R^{p-1}}}.$$

3) Случай $\varphi(i) = pi^n + u(i),\ n > 1$.

Из $\sum_i g_i z^i \in \mathfrak{A}$ должно следовать $\sum_i \frac{g_i}{\alpha_i} z^{pi^n + u(i)} \in \mathfrak{A}$. Последнее имеет место тогда и только тогда, когда $\sum_i \frac{g_i}{\alpha_i} z^{pi^n} \in \mathfrak{A}$. Искомое условие имеет следующий вид: $\overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i^n]{|\alpha_i|^{-1}} = 0$ при $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_\infty$, $\overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i^n]{|\alpha_i|^{-1}} < \infty$ при $\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{A}}_0$, $\overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i^n]{|\alpha_i|^{-1}} \leqslant \frac{1}{R}$ при $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_R$ и $\overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i^n]{|\alpha_i|^{-1}} < \frac{1}{R}$ при $\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{A}}_R$. Применяя аналогичные рассуждения, мы можем найти приложения теорем 1—10 к дифференциальным уравнениям бесконечного порядка в случае, когда коэффициенты являются полиномами, степени которых растут по определенному функцией $\varphi(i)$ закону.

В качестве другого приложения приведем некоторые критерии полноты и базиса систем вида $\{(J + A)^n f\}_0^\infty$.

Пусть $J = [j_{ik}]$, $j_{ik} = \delta_{i+1,k}\omega^i$ $(i, k = 0, 1, \ldots)$ и $A = [a_{ik}]$, $a_{ik} = 0$ $(k > i)$. Обозначим через $T = [t_{ik}]$ нижнетреугольную матрицу, построенную рекуррентно следующим образом: положим $t_{ik} = \delta_{ik}$ $(i = 0, 1, \ldots;\ k \geqslant i)$, если известны t_{jk} для $j \leqslant i$, то положим

$$t_{i+1,\,k} = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega^i}\left[\sum\limits_{k\leqslant j\leqslant i} t_{ij}a_{jk} + t_{i,k-1}\omega^{k-1}\right] & k > 0 \\[2ex] \dfrac{1}{\omega^i}\sum\limits_{0\leqslant j\leqslant i} t_{ij}a_{j0} & k = 0 \end{cases} \tag{108}$$

Теорема 11. *Если* $|\omega| = 1$, $A \in L_1(\overline{\mathfrak{A}}_0)$, $f = f(z) = \sum\limits_k f_k z^k \in \overline{\mathfrak{A}}_0$ и функция

$$(Tf)_\omega = (Tf)_\omega(z) = \sum_k \Big(\sum_{i=0}^{k} t_{ki} f_i\Big)\, \omega^{\frac{k(k-1)}{2}} \cdot z^k \tag{109}$$

не является рациональной, то система $\{(J+A)^n f\}_0^\infty$ *полна в пространстве* $\overline{\mathfrak{A}}_0$.

Доказательство. Матрицы J и A удовлетворяют условиям теоремы 1, п. 1, следовательно, матрица $T = [t_{ik}]$, построенная выше (см. (108)), есть изоморфизм пространства $\overline{\mathfrak{A}}_0$ такой, что

$$T(J+A)^n = J^n T \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots). \tag{110}$$

Существует такое $R > 0$, что f и $Tf \in \mathfrak{A}_R$, в силу одного результата Ю. А. Казьмина [9] (теорема Б, стр. 74) система $\{J^n Tf\}_0^\infty$ полна в $\mathfrak{A}_R$, и потому полна в $\overline{\mathfrak{A}}_0$. В силу (110) полны в $\overline{\mathfrak{A}}_0$ и системы $\{T(J+A)^n f\}_0^\infty$ и $\{(J+A)^n f\}_0^\infty$.

Замечание. Если $\omega = e^{2\pi i r}$, где r — вещественное рациональное, то система $\{(J+A)^n f\}_0^\infty$ полна в $\overline{\mathfrak{A}}_0$, если $(Tf)(z) = \sum\limits_k \Big(\sum\limits_{i=0}^{k} t_{ki} f_i\Big) z^k$ не является рациональной функцией (см. [9], следствие теоремы Б, стр. 76).

Теорема 12. *Если* $|\omega| > 1$, $A \in L_3(\overline{\mathfrak{A}}_0)$, $f = f_{(z)} = \sum\limits_k f_k z^k \in \overline{\mathfrak{A}}_0$ *такой, что* $Tf \in \mathfrak{A}_\infty$ и $(Tf)_\omega(z) \in \overline{\mathfrak{A}}_0$, *и не является рациональной функцией, то система* $\{(J+A)^n f\}_0^\infty$ *полна в пространстве* $\overline{\mathfrak{A}}_0$.

Доказательство. Матрицы J и A удовлетворяют условиям теоремы 1 п. 3, следовательно, T есть изоморфизм пространства $\overline{\mathfrak{A}}_0$, удовлетворяющий (110). Пусть $R > 0$ такое, что f и $Tf \in \mathfrak{A}_R$. На основании результата Ю. А. Казьмина [9] (теорема В, стр. 77) система $\{J^n Tf\}_0^\infty$ полна в каждом $\mathfrak{A}_R$, $0 < R < \infty$, и потому полна в $\overline{\mathfrak{A}}_0$, но тогда полны в $\overline{\mathfrak{A}}_0$ системы $\{T(J+A)^n f\}_0^\infty$ и $\{(J+A)^n f\}_0^\infty$.

Теорема 13. *Пусть* $|\omega| > 1$, *матрица* A *непрерывная в* $\mathfrak{A}_R$, $0 < R < \infty$, и $f = \sum\limits_k f_k z^k \in \mathfrak{A}_\infty$ *такой, что* $(Tf)_\omega \in \overline{\mathfrak{A}}_0$. *Тогда система* $\{(J+A)^n f\}_0^\infty$ *полна в пространстве* $\mathfrak{A}^R$ *тогда и только тогда, когда* $(Tf)_\omega$ *не является рациональной функцией.*

Доказательство. Матрицы J и A удовлетворяют условиям теоремы 2 п. 3, следовательно, T есть изоморфизм пространства $\mathfrak{A}_R$ и, будучи нижнетреугольной матрицей, является одновременно изоморфизмом пространства $\mathfrak{A}_\infty$, и поэтому $Tf \in \mathfrak{A}_\infty$. По теореме В [9] для полноты системы $\{J^n Tf\}_0^\infty$ в пространстве $\mathfrak{A}_R$ необходимо и достаточно, чтобы $(Tf)_\omega$ не было рациональной функцией. С другой стороны, в силу (110) система $\{(J+A)^n f\}_0^\infty$ полна в $\mathfrak{A}_R$ тогда и только тогда, когда в нем полна система $\{J^n Tf\}_0^\infty$.

Аналогично, основываясь на теореме 3 п. 3 и теореме В Ю. А. Казьмина, доказывается

Теорема 14. *Пусть* $|\omega| > 1$, $A \in L_3(\mathfrak{A}_\infty)$, $f \in \mathfrak{A}_\infty$ *такая, что* $(Tf)_\omega \in \overline{\mathfrak{A}}_0$; *тогда система* $\{(J+A)^n f\}_0^\infty$ *полна в пространстве* $\mathfrak{A}_\infty$ *тогда и только тогда, когда* $(Tf)_\omega(z)$ *не является рациональной функцией.*

Пусть теперь $J = [j_{ki}]$, $j_{ki} = \delta_{k,\,i+1}\omega^i$ $(i,\ k = 0,\ 1,\ \ldots)$, $A = [a_{ki}]$, $a_{ki} = 0$ $(k > i)$. *Обозначим через* $T = [t_{ki}]$ *верхнетреугольную матрицу, по-*

строенную рекуррентно следующим образом: $t_{ki} = \delta_{ki}$ $(i = 0, 1, \ldots; k \geqslant i)$, *если известны элементы* t_{kj} *для* $j \leqslant i$, *то положим*

$$t_{k,i+1} = \begin{cases} -\frac{1}{\omega i} \sum\limits_{0 \leqslant j \leqslant i} t_{0j} a_{ji} & k = 0 \\ \frac{1}{\omega i} \left[t_{k-1,\,i} \omega^{k-1} - \sum\limits_{k \leqslant j \leqslant i} t_{kj} a_{ji} \right] & k > 0. \end{cases} \tag{111}$$

Теорема 15. (Н. И. Нагнибида). *Пусть* $f = \sum\limits_k f_k z^k \in \mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$ и $|\omega| = 1$. *Система*

$$\{J^n f\}_0^\infty, \; J^n f = \omega^{-\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} f_k \omega^{kn} z^{k+n} \tag{112}$$

образует базис в пространстве $\mathfrak{A}_R$ *тогда и только тогда, когда функция*

$$f_{[\omega]} z = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \omega^{-\frac{k(k-1)}{2}} \cdot z^k \tag{113}$$

не имеет нулей в круге $|z| < R$.

Теорема 16. (Н. И. Нагнибида). *Пусть* $f = \sum\limits_k f_k z^k \in \mathfrak{A}_\infty$ *и* $|\omega| > 1$. *Если система* (112) *образует базис в некотором пространстве* $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$, *то*

$$f(z) = f(0) \neq 0. \tag{114}$$

Обратно, если выполнено (114), *то система* (112) *образует базис в каждом пространстве* $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$.

Теорема 17. *Пусть* $|\omega| = 1$, $A \in L_1(\mathfrak{A}_\infty)$ *и* $f = \sum\limits_k f_k z^k \in \mathfrak{A}_\infty$. *Тогда система* $\{(J + A)^n f\}_0^\infty$ *образует базис в пространстве* $\mathfrak{A}_\infty$ *тогда и только тогда, когда функция* $(Tf)_{[\omega]}(z)$ *не имеет нулей.*

Доказательство. Матрицы J и A удовлетворяют условиям теоремы 1 п. 1, следовательно, матрица T, построенная выше (см. (111)), есть изоморфизм пространства $\mathfrak{A}_\infty$ такой, что выполнено соотношение (110). В силу теоремы 15 система $\{J^n Tf\}_0^\infty$ образует базис в каждом пространстве $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$, но тогда в силу (110) образует базис и система $\{(J + A)^n f\}_0^\infty$.

Обратно, если система $\{(J + A)^n f\}_0^\infty$ образует базис в $\mathfrak{A}_\infty$, то базисом будет и система $\{J^n Tf\}_0^\infty$, следовательно, в силу теоремы 15 функция $(Tf)_{[\omega]}(z)$ не имеет нулей.

Теорема 18. *Пусть* $|\omega| > 1$, $A \in L_3(\mathfrak{A}_\infty)$, $f = \sum\limits_k f_k z^k \in \mathfrak{A}_\infty$. *Тогда система* $\{(J + A)^n f\}_0^\infty$ *образует базис в пространстве* $\mathfrak{A}_\infty$ *тогда и только тогда, когда* $f(z) = f(0) \neq 0$.

Доказательство. Матрицы J и A удовлетворяют условиям теоремы 1′ п. 3, следовательно, матрица T есть изоморфизм пространства $\mathfrak{A}_\infty$ такой, что выполняется (110). Если система $\{(J + A)^n f\}_0^\infty$ образует базис в $\mathfrak{A}_\infty$, то и система $\{J^n Tf\}_0^\infty$ образует такой базис. Тогда в силу теоремы 16 заключаем $(Tf)(z) = (Tf)(0) \neq 0$. Так как T — верхнетреугольная матрица и $t_{ii} = 1$ $(i = 0, 1, \ldots)$, то последнее имеет место тогда и только тогда, когда $f(z) = f(0) \neq 0$. Пусть теперь $f(z) = f(0) \neq 0$. Тогда $(Tf)(z) = T(f)(0) \neq$ $\neq 0$ и в силу теоремы 16, система $\{J^n Tf\}_0^\infty$ образует базис в пространстве $\mathfrak{A}_\infty$ одновременно с системой $\{(J+A)^n f\}_0^\infty$. На основе теоремы $2'$ (п. 3), $3'$ (п. 3) и 16 аналогично доказывается

Теорема 19. *Пусть* $|\omega| > 1$, $A \in L_4(\mathfrak{A}_R)$, $0 < R < \infty$ $f = \sum_k f_k z^k$ такая, что $Tf \in \mathfrak{A}_\infty$. *Система* $\{(J+A)^n f\}_0^\infty$ *образует базис в* $\mathfrak{A}_R$ *тогда и только тогда, когда* $f(z) = f(0) \neq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Маркушевич. О базисе в пространстве аналитических функций. «Матем. сб.», 17 (59), 1945.
2. М. Г. Хапланов. Некоторые свойства аналитических пространств. ДАН СССР, т. 79, № 6, 1951.
3. G. Köthe. Dualität in der Funktionentheorie. «J. f. d. reine und angew. Math.», 191, № 1—2, 1953.
4. М. Г. Хапланов. Линейные преобразования аналитических пространств. ДАН СССР, т. 80, № 1, 1951.
5. К. М. Фишман. К вопросу о линейных преобразованиях аналитических пространств. ДАН СССР, т. 127, № 1, 40—43, 1959.
6. К. М. Фишман. Линейные непрерывные и вполне непрерывные отображения аналитических пространств. «Вопросы математической физики и теории функций, II», Киев.
7. М. Г. Хапланов. Линейные дифференциальные уравнения бесконечного порядка с аналитическими коэффициентами. ДАН СССР, т. 105, № 6, 1955.
8. М. Г. Хапланов. Линейные операторы в аналитическом пространстве и их приложения. Автореф. докт. дисс.
9. Ю. А. Казьмин. Полнота некоторых типов последовательностей аналитических функций. «Сиб. матем. ж.», VII, № 1, 1966.

Поступила 31 мая 1968 г.