О НУЛЯХ ФУНКЦИЙ ИЗ W_+

В. Э. Кацнельсон, Г. М. Фельдман

Пусть $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность точек, лежащих внутри единичного круга с единственной предельной точкой на окружности. Не ограничивая общности, можно считать, что это точка $z=1$.

Для того чтобы существовала аналитическая в открытом единичном круге функция $f(z)$, непрерывная в замкнутом круге, множество нулей которой совпадает с заданной последовательностью $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность удовлетворяла условию Бляшке:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)<\infty. \tag{1}$$

Рассмотрим W_+-алгебру аналитических в единичном круге функций $f(z)$, разлагающихся в абсолютно сходящихся ряд Тейлора $f(z)=\sum_{k\geqslant 0} a_k z^k$ с нормой $\|f\|=\sum_{k\geqslant 0}|a_k|$.

Покажем вначале, что условие (1) не является достаточным для того, чтобы можно было построить функцию из W_+, множество нулей которой совпадает с последовательностью $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Для этого докажем существование такой последовательности точек $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ в открытом единичном круге, для которой выполнено (1), причем если $f(z) \in W_+$

и $f(z_k)=0,\ k=1,2,3,\ldots$, то $f(z)\equiv 0$.

Доказательство основывается на следующем соображении. Пусть последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (1), и множеством предельных точек этой последовательности является дуга единичной окружности. Тогда для любого N существует $k(N)$ такое, что если $f(z)\in W_+$, $f(0)=1$, и $f(z_k)=0,\quad k=1,2,\ldots,k(N)$, то $\|f\|\geqslant N$.

Действительно, если это не так, то существует M и последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ функций из W_+ такие, что $f_k(z_i)=0,\quad i=1,2,\ldots,k$, и $\|f_k\|\leqslant M,\ k=1,2,\ldots$ Тогда из этой последовательности можно выбрать последовательность функций, сходящуюся на каждом компакте внутри единичного круга к некоторой функции $f(z)$. Так как все функции $f_k(z)$ принадлежат W_+ и $\|f_k\|\leqslant M$, то и $f(z)$ принадлежит W_+, а значит, $f(z)$ непрерывна в замкнутом круге. Но на дуге окружности она принимает нулевые значения. Значит $f(z)\equiv 0$, что противоречит тому, что $f(0)=1$.

Построим теперь нужную нам последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$. Заметим, что условие (1) налагает ограничение лишь на модули членов последовательности. Единственное условие, налагаемое на аргументы, состоит в том, что последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет единственную предельную точку на окружности.

Пусть последовательность положительных чисел $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что $\sum\limits_{k\geqslant 0}(1-r_k)<\infty,\ r_k<1$.

Рассмотрим дугу окружности

$$l_1=\left\{e^{it}:\frac{\pi}{4}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Построим последовательность $\{z_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что $|z_k^{(1)}|=r_k$, и множество предельных точек последовательности $\{z_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$ совпадает с l_1. Как было показано выше, существует такое N_1, что если $f(z)\in W_+$ и $f(z_k^{(1)})=0$, $k=1,2,\ldots,\ N_1;\ f(0)=1$, то $\|f\|>1$. Таким образом, мы выбираем число N_1 и точки $z_1^{(1)},\ z_2^{(1)},\ldots,\ z_{N_1}^{(1)}$.

Рассмотрим теперь дугу

$$l_2=\left\{e^{it}:\frac{\pi}{8}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}.$$

Построим последовательность $\{z_k^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что $|z_k^{(2)}|=r_{k+N_1}$, и множество предельных точек этой последовательности совпадает с l_2. Как было показано выше, существует такое N_2, что если $f(z)\in W^+$ и $f(z_k^{(2)})=$ $=0,\ k=1,2,\ldots,N_2,\ f(0)=1$, то $\|f\|\geqslant 2$.

Таким образом, каждая функция из W_+, которая обращается в нуль на множестве

$$z_1^{(2)},\ z_2^{(2)},\ \ldots,\ z_{N_2}^{(2)},$$

имеет $\|f\| \geqslant 2$. Продолжая это построение, мы получаем семейство последовательностей $\{z_k^{(i)}\}_{k=1}^{N_i}$ таких, что $|z_k^{(i)}| = r_{N_1+N_2+\cdots+N_{i-1}+k}$, и если $f(z) \in W_+$ и $f(z_k^{(i)}) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, N_i$, то $\|f\| > i$. Рассмотрим теперь объединение этих последовательностей. Очевидно, что полученное множество точек удовлетворяет условию Бляшке, но не только не может являться множеством нулей функции, принадлежащей W_+, но даже не может содержаться в множестве нулей функции из W_+.

Из сказанного выше следует, что если последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (1) и имеет единственную предельную точку на окружности, то на нее нужно налагать какие-то дополнительные условия, чтобы гарантировать существование функции $f(z)$ из W_+, для которой множество нулей в открытом круге — заданная последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Следующая теорема дает достаточные условия того, что последовательность точек $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ единичного круга является множеством нулей функции $f(z) \in W_+$.

Теорема. *Пусть γ — замкнутая выпуклая кривая, лежащая в единичном круге, $R = R(\theta)$ $(-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi)$ — уравнение кривой γ в полярных координатах, $R(0) = 1$, $R(\theta) < 1$ $(\theta \neq 0)$, и пусть функция $r(\theta) = 1 - R(\theta)$ дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условию*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln r(\theta)\, d\theta > -\infty \tag{2}$$

и условиям регулярности:

$$\exists m > 0 : \frac{r'(\theta)}{r(\theta)} \leqslant \frac{C_1}{|\theta|^m} \quad (-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi;\ \theta \neq 0), \tag{3}$$

$$\exists \varepsilon > 0 : \frac{r^2(\theta)}{r((1-\varepsilon)\theta)} \leqslant C_2 \quad (-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi;\ \theta \neq 0). \tag{4}$$

Если $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность точек, лежащая внутри кривой γ, удовлетворяющей условию (1), то существует функция $f(z) \in W_+$ с множеством нулей $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Заметим, что типичными примерами кривых γ, для которых имеют место (2) — (4), являются кривые, для которых $R(\theta) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{|\theta|^{\alpha}}\right)$, $0 < \alpha < 1$ (при малых θ).

Доказательство. Достаточно показать, что при условиях теоремы существует функция $f(z)$, аналитическая внутри единичного круга и непрерывно дифференцируемая вплоть до границы с множеством нулей $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Мы будем строить такую функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = B(z) \cdot g(z),$$

где $B(z)$ — произведение Бляшке, построенное по последовательности $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$,

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{z}_k}{|z_k|} \cdot \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z},$$

а $g(z)$ — функция, аналитическая при $|z| < 1$ и непрерывно дифференцируема при $|z| = 1$, причем $g(z)$ и $g'(z)$ быстро стремятся к нулю, когда z стремится к 1.

Как известно, $B(z)$ — функция, аналитическая во всей комплексной плоскости за исключением точек последовательности $\{\bar{z}_k^{-1}\}_{k=1}^{\infty}$ и предельных точек этой последовательности. В условиях нашей теоремы функция $B(e^{i\theta})$ аналитична при всех $\theta \in [-\pi, \pi]$ кроме $\theta = 0$.

Оценим $B'(z)$. Имеем

$$\frac{B'(z)}{B(z)} = \sum_{k=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{z_k - z} + \frac{\bar{z}_k}{1 - z\bar{z}_k}\right]$$

и

$$|B'(e^{i\theta})| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - |z_k|^2}{|e^{i\theta} - z_k|^2}.$$

Так как кривая γ выпукла и касается единичной окружности в точке $z = 1$, а точки z_k лежат внутри γ, то

$$\inf_k |e^{i\theta} - z_k| \geqslant C \cdot r(\theta),$$

где $C > 0$ — константа, зависящая только от кривой γ, и значит при некоторой константе $C < \infty$ выполняется неравенство

$$|B'(e^{i\theta})| \leqslant \frac{C}{r^2(\theta)} \quad (-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi;\ \theta \neq 0). \tag{5}$$

Рассмотрим функцию

$$F(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \ln r^2(t)\, dt\right\}.$$

Функция $F(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и вследствие гладкости $r(t)$ может быть продолжена до функции, непрерывной в круге $|z| \leqslant 1$. При этом $F(e^{i\theta}) = \rho(\theta) \cdot e^{i\psi(\theta)}$, где $\rho(\theta) = r^2(\theta)$, а (см. например, работу А. Зигмунда, т. 1, гл. III, § 7)

$$\psi(\theta) = \text{V. P.} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln \rho(t) \cdot \operatorname{ctg}\frac{\theta - t}{2}\, dt \quad (|\theta| \leqslant \pi;\ \theta \neq 0)$$

и

$$\psi'(\theta) = \text{V. P.} -\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} \frac{\ln \rho(t + \theta) + \ln \rho(\theta - t) - 2\ln \rho(\theta)}{2\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt.$$

Дадим теперь оценку для $\psi'(\theta)$ при θ, стремящемся к нулю. Положим $\ln \rho(\theta) = h(\theta)$,

$$I = -\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} \frac{h(\theta + t) + h(\theta - t) - 2h(\theta)}{2\sin^2\frac{t}{2}}\, dt = \int_{0}^{(1-\varepsilon)|\theta|} + \int_{(1-\varepsilon)|\theta|} = I_1 + I_2.$$

Очевидно,

$$|I_1| \leqslant C_3 \cdot \sup_{|\xi - \theta| < (1-\varepsilon)|\theta|} |h''(\xi)|,$$
$$|I_2| \leqslant C_4 \cdot |\theta|^{-2} \cdot [1 + |h(\theta)|].$$

* А. Зигмунд. Тригонометрические ряды. «Мир», М., 1965.

Объединяя оценки для I_1 и I_2, получим

$$|I| \leqslant \frac{C_5}{\theta^2}[1 + h(\theta)] + \sup_{|\xi-\theta| < (1-\varepsilon)|\theta|} |h''(\xi)|. \tag{6}$$

Для получения требуемых оценок нужно лишь учесть, что

$$h(\theta) = 2\ln r(\theta) \text{ и } h''(\theta) = 2\frac{r''(\theta)\, r(\theta) - r'^2(\theta)}{r(\theta)}. \tag{7}$$

Из (3), (4), учитывая (6) и (7), имеем

$$r^2(\theta) \cdot |\psi'(\theta)| \leqslant \frac{C_6}{|\theta|^{m_1}} \quad (m_1 = \max(m, 2)). \tag{8}$$

И значит, из (8) получим оценку для $F'(e^{i\theta})$:

$$|F'(e^{i\theta})| \leqslant \frac{C_7}{|\theta|^{m_1}}. \tag{9}$$

Из (9) и (5) следует, что функция $f(z) = B(z) \cdot F(z) \cdot (1-z)^{1+m_1}$ непрерывно дифференцируема на окружности $|z| = 1$, а значит, $f(z) \in W_+$.

Поступила 25 декабря 1969 г.